ÜBER DIE REDUCTION
EINER BESTIMMTEN KLASSE ABEL'SCHER INTEGRALE
3ten RANGES
AUF ELLIPTISCHE INTEGRALE (1)

VON

SOPHIE KOWALEVSKI

in STOCKHOLM.

Einleitung.

ABEL hat in seinem *Précis des fonctions elliptiques* (Oeuvres complètes, Bd I, p. 350) das nachstehende Theorem bewiesen:

»Wenn sich überhaupt ein Integral von der Form

$$\int (y_1 dx_1 + \ldots + y_\mu dx_\mu)$$

wo $y_1, \ldots, y_\mu$ *algebraische* Functionen von $x_1, \ldots, x_\mu$ bedeuten, welche durch irgend eine Anzahl von algebraischen Gleichungen mit einander verbunden sind, — durch algebraische, logarithmische und elliptische Functionen ausdrücken lässt, so ist diese Reduction stets auf der folgenden Weise möglich:

$$\int (y_1 dx_1 + \ldots + y_\mu dx_\mu) = r + A_1 \log \rho^{(1)} + \ldots + A_k \log \rho^{(k)}$$

$$+ \alpha_1 \int \frac{F(s_1) ds_1}{\Delta_1(s_1)} + \ldots + \alpha_n \int \frac{F(s_n) ds_n}{\Delta_n(s_n)}$$

(1) Diese Abhandlung ist von mir im Sommer 1874 der philosophischen Facultät der Universität Göttingen vorgelegt worden. Sie erscheint hier ganz unverändert.

wo $A_1, \ldots, A_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Constanten bedeuten; $F_\nu(s_\nu)$ eine rationale Function von s_ν; $\Delta_\nu(s_\nu)$ die Quadratwurzel aus einer ganzen Function dritten oder vierten Grades von s_ν; $r, \rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k)}, s_1, \ldots, s_n, \Delta_1(s_1), \ldots, \Delta_n(s_n)$ *rational* aus $x_1, \ldots, x_\mu, y_1, \ldots, y_\mu$ zusammengesetzt sind.»

Als eine Folgerung von diesem Satz hat mir mein verehrter Lehrer, Herr WEIERSTRASS, den folgenden Satz mitgetheilt:

»Wenn y eine algebraische Function von x ist und es giebt unter den Integralen

$$\int F(x, y)\,dx$$

wo $F(x, y)$ eine beliebige rationale Function von x und y bedeutet, solche, die sich auf elliptische Integrale zurückführen lassen, *so ist diese Reduction auch stets für ein Integral erster Gattung möglich.*

Denn da s_μ, $\Delta_\mu(s_\mu)$ rational durch x und y ausdrückbar sind, so geht

$$\int \frac{ds_\mu}{\Delta_\mu(s_\mu)} \quad \text{in} \quad \int H(x, y)\,dx$$

über, wo $H(x, y)$ eine rationale Function von x, y bedeutet, und da $\int \frac{ds_\mu}{\Delta_\mu(s_\mu)}$ ein Integral erster Gattung ist, so muss das transformirte, $\int H(x, y)\,dx$ auch ein solches sein.

Hierdurch ist die Untersuchung über die Reduction ABEL'scher Integrale höheren Ranges auf elliptische Integrale hauptsächlich auf die Beantwortung folgender Frage zurückgeführt:

»Es bestehe zwischen zwei Veränderlichen x, y eine algebraische Gleichung ρ^{ten} Ranges,(¹) so dass es, wenn y als Function von x betrachtet wird, unter den Integralen $\int F(x, y)\,dx$ ρ linear von einander unabhängige $(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$ giebt, durch welche sich jedes Integral erster Gattung u in der Form

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_\rho u_\rho$$

(¹) Die Zahl ρ ist dieselbe, welche RIEMANN mit p bezeichnet.

wo $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ Constanten bedeuten, ausdrücken lässt; es fragt sich, welche besondere Beschaffenheit die Gleichung zwischen x und y haben muss, d. h. welche Relationen unter ihren Constanten stattfinden müssen, wenn es möglich sein soll, die Grössen c so zu bestimmen, dass sich u in ein elliptisches Integral

$$\int \frac{ds}{\Delta(s)}$$

verwandeln lässt, und zwar so, dass s und $\Delta(s)$ rational durch x, y ausdrückbar sind.»

Herr WEIERSTRASS hat die fragliche Relation zunächst in *transcendenter Form* folgendermassen dargestellt.

Man kann bekanntlich die Integrale $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ so wählen, dass dieselben 2ρ primitive Perioden-Systeme von der Gestalt:

$$\begin{array}{l}
1, 0, 0, \ldots, 0, \tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1\rho} \\
0, 1, 0, \ldots, 0, \tau_{21}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{2\rho} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0, 0, 0, \ldots, 1, \tau_{\rho 1}, \tau_{\rho 2}, \ldots, \tau_{\rho\rho}
\end{array}$$

besitzen, wo unter den $\tau_{\alpha\beta}$ die Relation

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

besteht. Dann hat das Integral u folgende 2ρ primitive Perioden

$$c_1, c_2, \ldots, c_\rho, \sum_1^\rho {}_\alpha c_\alpha \tau_{\alpha,1}, \sum_1^\rho {}_\alpha c_\alpha \tau_{\alpha,2}, \ldots, \sum_1^\rho {}_\alpha c_\alpha \tau_{\alpha,\rho}.$$

Jeder derselben entspricht nun, wenn sich u in der angegebenen Weise in ein elliptisches Integral verwandeln lässt, eine Periode des letzteren, so dass man

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2n_1\omega + 2n_1'\omega' \\
c_2 &= 2n_2\omega + 2n_2'\omega' \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
c_\rho &= 2n_\rho\omega + 2n_\rho'\omega'
\end{aligned}$$

$$c_1\tau_{11} + c_2\tau_{21} + \ldots + c_\rho\tau_{\rho 1} = -2(m_1\omega + m_1'\omega')$$
$$c_1\tau_{12} + c_2\tau_{22} + \ldots + c_\rho\tau_{\rho 2} = -2(m_2\omega + m_2'\omega')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_1\tau_{1\rho} + c_2\tau_{2\rho} + \ldots + c_\rho\tau_{\rho\rho} = -2(m_\rho\omega + m_\rho'\omega')$$

hat, wo die n, n', m, m' sämmtlich ganze (positive oder negative) Zahlen bezeichnen und $(2\omega,\ 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar des elliptischen Integrals ist. Setzt man in die ρ letzte Gleichungen $c_1, \ldots, c_\rho$ aus den ρ ersten, so ergiebt sich:

$$0 = (m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 1})\omega + (m_1' + n_1'\tau_{11} + n_2'\tau_{21} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 1})\omega'$$
$$0 = (m_2 + n_1\tau_{12} + n_2\tau_{22} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 2})\omega + (m_2' + n_1'\tau_{12} + n_2'\tau_{22} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 2})\omega'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = (m_\rho + n_1\tau_{1\rho} + n_2\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho\rho})\omega + (m_\rho' + n_1'\tau_{1\rho} + n_2'\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho\rho})\omega'$$

woraus sich unter den Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ die $(\rho - 1)$ Relationen

$$(1)\quad \frac{m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 1}}{m_1' + n_1'\tau_{11} + n_2'\tau_{21} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 1}} = \frac{m_2 + n_1\tau_{12} + n_2\tau_{22} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 2}}{m_2' + n_1'\tau_{12} + n_2'\tau_{22} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 2}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{m_\rho + n_1\tau_{1\rho} + n_2\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho\rho}}{m_\rho' + n_1'\tau_{1\rho} + n_2'\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho\rho}}$$

ergeben.

Man darf dann, wie mir Herr Weierstrass ebenfalls gezeigt hat, von den Zahlen m, n, m', n' voraussetzen, dass

$$m_1n_1' + m_2n_2' + \ldots + m_\rho n_\rho' - m_1'n_1 - m_2'n_2 - \ldots - m_\rho' n_\rho$$

eine *ganze* und *positive* Zahl ist, die mit k bezeichnet werde und kann dann ein System von $4\rho(\rho - 1)$ ganze Zahlen

$$m_{12},\ m_{22},\ \ldots,\ m_{\rho 2},\ n_{12},\ n_{22},\ \ldots,\ n_{\rho 2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_{1\rho},\ m_{2\rho},\ \ldots,\ m_{\rho\rho},\ n_{1\rho},\ n_{2\rho},\ \ldots,\ n_{\rho\rho}$$
$$m_{12}',\ m_{22}',\ \ldots,\ m_{\rho 2}',\ n_{12}',\ n_{22}',\ \ldots,\ n_{\rho 2}'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_{1\rho}',\ m_{2\rho}',\ \ldots,\ m_{\rho\rho}',\ n_{1\rho}',\ n_{2\rho}',\ \ldots,\ n_{\rho\rho}'$$

so bestimmen, dass dieselben die Relationen

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_1^{\rho}{}_{\alpha}(m_{\alpha} m'_{\beta\alpha} - m'_{\alpha} m_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_1^{\rho}{}_{\alpha}(n_{\alpha} n'_{\beta\alpha} - n'_{\alpha} n_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_1^{\rho}{}_{\alpha}(m_{\alpha} n'_{\beta\alpha} - n_{\alpha} m'_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_1^{\rho}{}_{\alpha}(m_{\alpha\beta} n_{\alpha\gamma} - m_{\alpha\gamma} n_{\alpha\beta}) = 0\\
&\sum_1^{\rho}{}_{\alpha}(m'_{\alpha\beta} n'_{\alpha\gamma} - m'_{\alpha\gamma} n'_{\alpha\beta}) = 0\\
&\sum_1^{\rho}{}_{\alpha}(m_{\alpha\beta} n'_{\alpha\gamma} - m'_{\alpha\gamma} n_{\alpha\beta}) = \begin{cases} 0 & (\beta \gtrless \gamma)\\ k & (\beta = \gamma)\end{cases}
\end{aligned}
\qquad \begin{matrix}(\beta = 1, \ldots, \rho)\\ (\gamma = 1, \ldots, \rho)\end{matrix}
$$

stattfinden. Setzt man dann

$$
\begin{aligned}
&\omega_{11} = m_1 + n_1 \tau_{11} + \cdots + n_{\rho} \tau_{1\rho}, \ \ldots, \ \omega_{\rho 1} = m_{\rho} + n_1 \tau_{\rho 1} + \cdots + n_{\rho} \tau_{\rho\rho}\\
&\omega_{12} = m_{12} + n_{12} \tau_{11} + \cdots + n_{\rho 2} \tau_{1\rho}, \ \ldots, \ \omega_{\rho 2} = m_{\rho 2} + n_{12} \tau_{\rho 1} + \cdots + n_{\rho 2} \tau_{\rho\rho}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_{1\rho} = m_{1\rho} + n_{1\rho} \tau_{11} + \cdots + n_{\rho\rho} \tau_{1\rho}, \ \ldots, \ \omega_{\rho\rho} = m_{\rho\rho} + n_{1\rho} \tau_{\rho 1} + \cdots + n_{\rho\rho} \tau_{\rho\rho}\\
&\omega'_{11} = m'_1 + n'_1 \tau_{11} + \cdots + n'_{\rho} \tau_{1\rho}, \ \ldots, \ \omega'_{\rho 1} = m'_{\rho} + n'_1 \tau_{\rho 1} + \cdots + n'_{\rho} \tau_{\rho\rho}\\
&\omega'_{12} = m'_{12} + n'_{12} \tau_{11} + \cdots + n'_{\rho 2} \tau_{1\rho}, \ \ldots, \ \omega'_{\rho 2} = m'_{\rho 2} + n'_{12} \tau_{\rho 1} + \cdots + n'_{\rho 2} \tau_{\rho\rho}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega'_{1\rho} = m'_{1\rho} + n'_{1\rho} \tau_{11} + \cdots + n'_{\rho\rho} \tau_{1\rho}, \ \ldots, \ \omega'_{\rho\rho} = m'_{\rho\rho} + n'_{1\rho} \tau_{\rho 1} + \cdots + n'_{\rho\rho} \tau_{\rho\rho}
\end{aligned}
$$

so bestehen unter den Grössen $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ die Relationen

$$
(3)\qquad \sum_1^{\rho}{}_{\gamma}(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0. \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, \rho\\ \beta = 1, \ldots, \rho\end{pmatrix}
$$

Wenn man daher, unter $v_1, \ldots, v_\rho$ unabhängige Veränderliche verstehend,

$$v'_a = \frac{(\omega)_{1a} v_1 + \ldots + (\omega)_{\rho a} v_\rho}{(\omega)}, \qquad (a=1, \ldots, \rho)$$

setzt, so kann man eine Function

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

bilden, welche dann eine Transformation der Function

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$$

ist. (Zum vollständigen Beweise muss gezeigt werden, dass die Grössen $\tau'_{a\beta}$ auch denjenigen Bedingungen genügen, welche für die Convergenz der Reihe, durch welche

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

dargestellt wird, erforderlich sind.)

Die Relationen

$$\frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} = \frac{\omega'_{21}}{\omega_{21}} = \ldots = \frac{\omega'_{\rho 1}}{\omega_{\rho 1}}$$

besagen nun, dass

$$\tau_{12} = \tau_{13} = \ldots = \tau_{1\rho} = 0$$

und es lässt sich also

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

als ein Product einer ϑ-Function von $(\rho - 1)$ Veränderlichen und einer elliptischen ϑ

$$\vartheta(v'_1 \mid \tau'_{11})$$

ausdrücken; und wenn dies der Fall ist, so kann das Integral

$$\sum_1^\rho {}_a \frac{1}{(\omega)} (\omega)_{1a} u_a$$

auch stets in der verlangten Weise in ein elliptisches verwandelt werden.

Dieses ist der Satz dessen (für den Fall $\rho = 2$) Herr Königsberger n der Abhandlung: *Über die Transformation des zweiten Grades für die*

Abel'sche Functionen der ersten Ordnung (BORCHARDT's Journal, B. 67, S. 71) als eines ihm brieflich von Herrn WEIERSTRASS mitgetheilen, erwähnt.

Hiermit ist die Aufgabe um die es sich handelt, mit der Transformations-Theorie der ϑ-Functionen in Verbindung gebracht. Wenn nämlich die Function

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

sich als Product aus einer ϑ-Function von $(\rho - 1)$ Veränderlichen und einer elliptischen darstellen lässt, so gilt dasselbe auch für die übrigen Functionen

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})_\lambda$$

welche aus jener entspringen. (¹)

Daraus folgt, dass unter den Grössen

$$\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})_\lambda$$

Relationen bestehen müssen, welche die Bedingungen für die Möglichkeit der in Rede stehenden Zerlegbarkeit der Function aussprechen. Namentlich ergiebt sich, dass unter den *graden* Functionen

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})_\lambda$$

es eine gewisse Anzahl solcher giebt, welche für $v'_1 = v'_2 = \ldots = v'_\rho = 0$ verschwinden. Nun aber hängen die Grössen $\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$ mit den $\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$ algebraisch zusammen; die Quotienten dieser letzteren aber lassen sich algebraisch durch die Constanten der zwischen x und y bestehenden Gleichung ausdrücken. Dadurch wird es möglich die obigen transcendenten Gleichungen durch algebraische zu ersetzen.

Dieses hat Herr KÖNIGSBERGER in der erwähnten Abhandlung für den Fall $(\rho = 2, k = 2)$ ausgeführt und gezeigt, dass die schon von

---

(¹) In Betreff der gebrauchten Bezeichnungen verweise ich auf die Abhandlung von KÖNIGSBERGER: *Über die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung* (BORCHARDT's Journal, B. 64, S. 17) und auch auf HENNOCH's Dissertation: *De Abelianarum functionum periodis* (Berlin 1867).

JACOBI (CRELLE's Journal, B. 8) betrachteten und auf elliptische zurückgeführten Integrale

$$\int \frac{1 + \sqrt{k\lambda}\,.\,x}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1+k\lambda x)}}\,dx, \quad \int \frac{1 - \sqrt{k\lambda}\,.\,x}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)}}\,dx$$

und die aus diesen durch eine lineare Transformation hervorgehenden, die *einzigen* ABEL'sche Integrale erster Ordnung und erster Gattung sind, welche sich in der angegebenen Weise auf elliptische reduciren lassen.

In der vorliegenden Arbeit habe ich nun versucht auch für den Fall, wo zwischen x, y eine Gleichung *dritten* Ranges besteht, die algebraische Relationen zu ermitteln, welche unter den Constanten dieser Gleichung stattfinden müssen, wenn unter den Integralen $\int F(x, y)\,dx$ sich solche finden sollen, die sich durch eine Transformation zweiten Grades (d. h. bei welcher $k = 2$ ist) auf elliptische zurückführen lassen.

Ich habe aber dabei einen anderen als den eben angedeuteten Weg eingeschlagen.

Herr WEIERSTRASS hat später zu dem angeführten Satze noch eine wesentliche Ergänzung gefunden:

»Wenn aus einer Function $\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$ durch irgend eine Transformation k^{ten} Grades eine andere hervorgeht, die ein Product aus einer ϑ-Function von $(\rho - 1)$ Veränderlichen und einer elliptischen ist, so kann die ursprüngliche Function stets durch eine *lineare* Transformation (bei der $k = 1$ ist) in eine andere $\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \mid \bar{\tau}_{11}, \ldots, \bar{\tau}_{\rho\rho})$ verwandelt werden, in der

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\mu}{k}, \quad \bar{\tau}_{13} = 0, \ldots, \bar{\tau}_{1\rho} = 0$$

ist, wo μ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, k-1$ bedeutet.»

Nun kann man die eben betrachteten Integrale $u_1, \ldots, u_\rho$ durch andere ersetzen, für welche an die Stelle der Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ die $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ treten; und so ergiebt sich der Satz:

»Soll unter den von einer gegebenen algebraischen Function ρ^{ten} Ranges abhängigen Integralen sich eins finden, das auf ein elliptisches reducirt werden kann, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass unter den aus derselben Function entspringenden Functionen

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$$

eine sei, für welche

$$\tau_{12} = \frac{\mu}{k}, \; \tau_{13} = 0, \ldots, \tau_{1\rho} = 0,$$

(k eine ganze positive Zahl und $\mu = 1, 2, \ldots, k-1$) ist.»

Ich habe nun bemerkt, dass man unter Zugrundelegung dieses Satzes die fraglichen Relationen auch ohne auf die Transformationstheorie zu recurriren erhalten kann, wenn man noch das folgende, in den Vorlesungen des Herrn WEIERSTRASS über ABEL'sche Functionen entwickelte Theorem zu Hülfe nimmt.

Es mögen $x, y, u_1, \ldots, u_\rho, \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho}$ dieselbe Bedeutung haben wie oben, und die $u_1', \ldots, u_\rho'$ die Werthe von $u_1, \ldots, u_\rho$ an einer anderen Stelle sein. Unter den ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ wähle man irgend zwei *ungrade*

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\lambda, \; \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\mu$$

willkürlich aus, so hat man, wenn

$$(4) \qquad \frac{du_\alpha}{dx} = \overline{H}(x, y)_\alpha, \; \frac{du_\alpha'}{dx'} = \overline{H}(x', y')_\alpha$$

gesetzt wird

$$(5) \qquad \left\{\frac{\vartheta(u_1 - u_1', \ldots, u_\rho - u_\rho')_\lambda}{\vartheta(u_1 - u_1', \ldots, u_\rho - u_\rho')_\mu}\right\}^2 = \sum_\alpha \frac{\vartheta_\lambda^{(\alpha)} \overline{H}(x', y')_\alpha}{\vartheta_\mu^{(\alpha)} \overline{H}(x', y')_\alpha} \cdot \sum_\alpha \frac{\vartheta_\lambda^{(\alpha)} \overline{H}(x, y)_\alpha}{\vartheta_\mu^{(\alpha)} \overline{H}(x, y)_\alpha}$$

wo $\vartheta_\lambda^{(\alpha)}, \vartheta_\mu^{(\alpha)}$ die Werthe bedeuten, die

$$\frac{\partial \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\lambda}{\partial v_\alpha}, \; \frac{\partial \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\mu}{\partial v_\alpha}$$

für $v_1 = 0, \ldots, v_\rho = 0$ erhalten.

Dieses vorausgeschickt nehme ich nun an, es sei y eine algebraische Function dritten Ranges von x und so beschaffen, dass in einer der aus ihr entspringenden ϑ-Functionen

$$\tau_{12} = \frac{1}{2}, \quad \tau_{13} = 0$$

ist.

In diesem Falle ist

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \sum e^{\pi i \left\{ n_1\left(2v_1 + n_1\tau_{11} + \frac{1}{2} n_2\right) + n_2\left(2v_2 + \frac{1}{2} n_1 + n_2\tau_{22} + n_3\tau_{23}\right) + n_3(2v_3 + n_2\tau_{23} + n_3\tau_{33}) \right\}}$$

Trennt man in dieser Summen diejenige Glieder, in welchen n_1 grade, von denen, in welchen es ungrade ist, so erhält man,

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
\vartheta(v \mid \tau) &= \sum e^{n(2v + n\tau)\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_0 &= \sum e^{n\left[2\left(v - \frac{1}{2}\right) + n\tau\right]\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_2 &= \sum e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[2v + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right]\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_1 &= \sum e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[2\left(v - \frac{1}{2}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right]\pi i}
\end{aligned}
$$

und

$$\vartheta(v, w \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}) = \sum e^{\left\{ n_1(2v + n_1\tau_{22} + n_2\tau_{23}) + n_2(2w + n_1\tau_{23} + n_2\tau_{33}) \right\}\pi i}$$

setzend

$$(7) \qquad \vartheta(v_1, v_2, v_3)$$

$$= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\vartheta(v_2, v_3 \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}) + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2 \vartheta\left(v_2 - \frac{1}{2}, v_3 \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}\right).$$

Indem man die Veränderliche v_1, v_2, v_3 um halbe Perioden vermehrt und die üblichen Bezeichnungen braucht, erhält man aus dieser Gleichung die folgenden:

$$(8)\quad \begin{aligned}
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_5 &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_3 + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_{04} \\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{125} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_3 - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_{04} \\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{345} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_{04} + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_3 \\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{06} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_{04} - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_3 \\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{46} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_0\vartheta(v_2, v_3)_{24} + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_1\vartheta(v_2, v_3)_{14} \\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{035} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_0\vartheta(v_2, v_3)_{24} - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_1\vartheta(v_2, v_3)_{14}.
\end{aligned}$$

Unter den vielen, unter den $\vartheta(v_1, v_2, v_3)_\lambda$ bestehenden Gleichungen giebt es auch die folgende

$$(9)\quad \begin{aligned}
&g_1\vartheta(v_1, v_2, v_3)_5\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{125} + g_2\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{345}\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{06} \\
&+ g_3\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{46}\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{035} + g_4\vartheta(v_1, v_2, v_3)_3\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{123} = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$v_a = u_a - u'_a$$

und wählt, was immer möglich ist, das Paar (x', y') so, dass

$$\vartheta(u_1 - u'_1, u_2 - u'_2, u_3 - u'_3)_3$$

identisch Null wird, und setzt

$$(10)\quad \begin{aligned}
\xi_1 &= \vartheta_5^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_5^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_5^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi_2 &= \vartheta_{345}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{345}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{345}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi_3 &= \vartheta_{46}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{46}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{46}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi'_1 &= \vartheta_{125}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{125}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{125}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi'_2 &= \vartheta_{06}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{06}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{06}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3 \\
\xi'_3 &= \vartheta_{035}^{(1)}\overline{H}(x, y)_1 + \vartheta_{035}^{(2)}\overline{H}(x, y)_2 + \vartheta_{035}^{(3)}\overline{H}(x, y)_3
\end{aligned}$$

so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung (9)

$$(11)\qquad h_1\sqrt{\xi_1\xi_1'} + h_2\sqrt{\xi_2\xi_2'} + h_3\sqrt{\xi_3\xi_3'} = 0$$

wo h_1, h_2, h_3 Constanten bedeuten. Zugleich sind ξ_1', ξ_2', ξ_3' homogene lineare Functionen von ξ_1, ξ_2, ξ_3. Fasst man daher ξ_1, ξ_2, ξ_3 als (homogene) Coordinaten eines Punktes auf, so stellt diese Gleichung eine Curve dar. Die durch die Gleichungen

$$\xi_1 = 0,\ \xi_1' = 0,\ \xi_2 = 0,\ \xi_2' = 0,\ \xi_3 = 0,\ \xi_3' = 0$$

dargestellten Geraden, für welche, der Kürze wegen, die Buchstaben ξ_1, ξ_1', ... selbst als Bezeichnungen gewählt werden mögen, sind dann *Doppeltangenten* dieser Curve, und zwar gehören die drei Paare

$$(\xi_1,\ \xi_1'),\ (\xi_2,\ \xi_2'),\ (\xi_3,\ \xi_3')$$

einer der bekannten 63 Gruppen an, in welche die aus den 28 Doppeltangenten einer Curve 4ten Grades gebildeten Paare vertheilt werden können. (1)

Jetzt differentiire man die Gleichungen (8) nach v_1, v_2, v_3 und setze sodann $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, so erhält man

$$(12)\qquad \vartheta_5^{(1)} = \vartheta_{125}^{(1)} = \vartheta_{06}^{(1)} = \vartheta_{345}^{(1)} = 0.$$

Daraus folgt, dass die vier Geraden

$$\xi_1,\ \xi_1',\ \xi_2,\ \xi_2'$$

sich in *einem* Punkte schneiden.

Nun kann man aber die Gleichung der in Rede stehenden Curve so dargestellt erhalten, dass ihre Coefficienten *rational* aus den Constanten der zwischen x, y bestehenden Gleichung zusammengesetzt sind. Denn es

---

(1) Nimmt man ein solches Paar willkürlich an und legt durch die vier Berührungspunkte desselben irgend einen Kegelschnitt, so schneidet der die Curve vierten Grades noch in 4 Punkten, in welchen dieselbe von einem zweiten Kegelschnitt berührt werden kann. Es giebt dann (ausser dem System jener beiden Doppeltangenten) *fünf* solche Kegelschnitte, für welche der jedesmalige zweite in ein System zweier Geraden zerfällt. Die so sich ergebenden fünf Paare von Geraden sind dann Doppeltangenten-Paare und bilden mit dem ursprünglichen *eine der in Rede stehenden 63 Gruppen.*

lassen sich stets (auf unendlich viele Weisen) drei rational aus x, y und den Constanten der genannten Gleichung zusammengesetzte Ausdrücke

$$H(x, y)_1, \; H(x, y)_2, \; H(x, y)_3$$

bilden, aus denen Integrale erster Gattung entspringen. Dann sind, wenn man

$$H(x, y)_\alpha = X_\alpha$$

setzt, $\overline{H}(x, y)_1$, $\overline{H}(x, y)_2$, $\overline{H}(x, y)_3$ und somit auch $\xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \xi_3, \xi_3'$ homogene lineare Functionen von X_1, X_2, X_3; und es muss daher zwischen diesen Grössen eine Gleichung

$$F(X_1, X_2, X_3) = 0$$

bestehen, in welcher der Ausdruck auf der linken Seite eine homogene ganze Function 4^{ten} Grades von X_1, X_2, X_3 ist.

Diese Gleichung lässt sich aus der gegebenen Gleichung zwischen x und y, und den beiden angenommenen

$$X_1 H(x, y)_2 - X_2 H(x, y)_1 = 0, \; X_2 H(x, y)_3 - X_3 H(x, y)_2 = 0$$

durch Elimination der Grössen x, y herstellen, und es haben also ihre Coefficienten die angegebene Beschaffenheit.

Betrachtet man nun die Grössen X_1, X_2, X_3 als (homogene) Coordinaten eines Punktes (in einer Ebene) so stellt die Gleichung

$$F = 0$$

dieselbe Curve 4^{ten} Grades dar wie die vorstehende (11). Dabei ist jedoch folgendes zu bemerken.

Setzt man

$$\xi = \frac{H(x, y)_1}{H(x, y)_3}, \quad \eta = \frac{H(x, y)_2}{H(x, y)_3}$$

so müssen sich, wenn die Gleichung

$$F(\xi, \eta, 1) = 0$$

der Gleichung zwischen x, y äquivalent sein soll, mit Zuziehung der letzteren, x, y rational durch ξ, η ausdrücken lassen. Dies trifft nur dann nicht ein, wenn sich für *jeden* Werth von ξ nur *zwei* verschiedene Werthe von η ergeben.

Schliessen wir diesen Fall, der besonders behandelt werden muss, aus, so ist also jetzt folgendes erwiesen.

»Ist y eine algebraische Function 3^{ten} Ranges von x, so lässt sich die zwischen x und y bestehende Gleichung auf unendlich viele Arten in eine homogene Gleichung 4^{ten} Grades $F = 0$ zwischen drei Grössen X_1, X_2, X_3, welche rationale Functionen von x, y sind transformiren und zwar kann dieses auch stets so geschehen, dass die Coefficienten dieser Gleichung so wie auch die der Ausdrücke X rational aus den Constanten der gegebenen Gleichung zusammengesetzt sind. Die Gleichung $F = 0$ ist dann im Allgemeinen — d. h. stets wenn der erwähnte Fall nicht eintritt — irreductibel und stellt eine Curve 4^{ten} Grades ohne Doppelpunkte dar.

Unter den Doppeltangenten dieser Gleichung müssen dann vier zusammengehörige — d. h. solche deren 8 Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen — geben, welche in *einem* Punkte sich schneiden, wenn unter den von y abhängenden Abel'schen Integralen sich eins finden soll, welches sich durch eine Transformation der hier betrachteten Art ($k = 2$) in ein elliptisches verwandeln lässt.»

Dieser Satz gilt aber auch umgekehrt.

Sind nämlich ξ_1, ξ_1', ξ_2, ξ_2' homogene lineare Functionen von X_1, X_2, X_3, welche gleich Null gesetzt die Gleichungen von irgend vier zusammengehörigen Doppeltangenten der Curve $F = 0$ geben, und man nimmt aus der durch das Paar (ξ_1, ξ_1') bestimmten Gruppe von Doppeltangenten-Paaren noch irgend ein drittes (ξ_3, ξ_3') so kann man bekantlich $F(X_1, X_2, X_3)$ auf die Form

$$g_1^2(\xi_1\xi_1')^2 + g_2^2(\xi_2\xi_2')^2 + g_3^2(\xi_3\xi_3')^2 - 2g_2g_3(\xi_2\xi_3\xi_2'\xi_3') - 2g_3g_1(\xi_3\xi_1\xi_3'\xi_1') \\ - 2g_1g_2(\xi_1\xi_2\xi_1'\xi_2')$$

bringen, wo g_1, g_2, g_3 Constanten bedeuten, von denen keine gleich Null ist.

Man hat also

$$F(X_1, X_2, X_3) = (g_3\xi_3\xi_3' - g_2\xi_2\xi_2' - g_1\xi_1\xi_1')^2 - 4g_1g_2\xi_1\xi_2\xi_1'\xi_2'.$$

Schneiden sich nun die vier Graden $(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')$ in einem Punkte, und mögen p, q irgend zwei homogene lineare Functionen von X_1, X_2, X_3 sein, welche in demselben Punkte sich verschneiden, so sind ξ_1, ξ_2, ξ_1', ξ_2' sämmtlich homogene lineare Functionen von p, q, und es wird, wenn man noch ξ_3' durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 ausdrückt

$$g_3\xi\xi_3' - g_1\xi_1\xi_1' - g_2\xi_2\xi_2' = l\xi_3^2 + (p, q)_1\xi_3 + (p, q)_2$$

wo l constant, und $(p, q)_1$, $(p, q)_2$ ganze homogene Functionen von p, q beziehlich vom 1^{ten} und 2^{ten} Grade sind.

Setzt man daher

$$r = h\left(\xi_3 + \frac{1}{2}\frac{(p, q)_1}{l}\right)$$

unter h eine beliebige Constante verstehend, so ergiebt sich

$$F(X_1, X_2, X_3) = R_0 r^4 + 2R_2(p, q)r^2 + R_4(p, q)$$

wo R_0 constant und von Null verschieden,(¹) und R_2, R_4 ganze homogene Functionen von p, q beziehlich des 2^{ten} und 4^{ten} Grades sind.

Nimmt man h so an, dass die Determinante von p, q, r gleich 1 wird und bezeichnet den Ausdruck auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung mit $G(p, q, r)$, so ist bekanntlich, unter der Voraussetzung, dass für X_1, X_2, X_3 deren Ausdrücke in x, y gesetzt werden, so dass $F = 0$ ist

$$\frac{X_2dX_3 - X_3dX_2}{\frac{\partial F}{\partial X_1}} = \frac{X_3dX_1 - X_1dX_3}{\frac{\partial F}{\partial X_2}} = \frac{X_1dX_2 - X_2dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

$$= \frac{qdr - rdq}{\frac{\partial G}{\partial p}} = \frac{rdp - pdr}{\frac{\partial G}{\partial q}} = \frac{pdq - qdp}{\frac{\partial G}{\partial r}}.$$

(¹) Wäre R_0 gleich Null, so würde der Durchschnittspunkt der Doppeltangenten auf der Curve liegen, was bei einer Curve 4^{ten} Grades ohne Doppelpunkte (und nur für eine solche ist $\rho = 3$) nicht der Fall sein kann.

Es ist aber

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 4r[R_0 r^2 + R_2(p, q)]$$

$$[R_0 r^2 + R_2(p, q)]^2 = R_2^2(p, q) - R_4(p, q).$$

Man hat also

$$\frac{pdq - qdp}{4[R_0 r^2 + R_2(p, q)]} = r\frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}} = \ldots$$

oder wenn man

$$\xi = \frac{q}{r}, \; R(\xi) = R_2^2(1, \xi) - R_4(1, \xi)$$

$$r = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$$

setzt

$$\int \frac{c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3}{\frac{\partial F}{\partial X_3}} (X_1 dX_2 - X_2 dX_1) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

wobei zu bemerken ist, dass

$$\sqrt{R(\xi)} = R_0 \frac{r^2}{p^2} + \frac{R_2(p, q)}{p^2}$$

so dass entsprechend dem in der Einleitung bemerkten

$$\xi \text{ und } \sqrt{R(\xi)}$$

beide rational durch x, y ausdrückbar sind.

Bemerkt man noch, dass, wenn $G(p, q, r)$ die angegebene Form hat, in dem Punkte ($p = 0$, $q = 0$) sich auch stets 4 zusammengehörige Doppeltangenten der durch die Gleichung $F = 0$ dargestellten Curve schneiden, so kann man jetzt sagen:

»Damit die Gleichung zwischen x, y die in Rede stehende Beschaffenheit habe, ist *nothwendig* und *hinreichend*, dass die aus ihr hervorgehende Gleichung 4^{ten} Grades

$$F(X_1, X_2, X_3) = 0$$

sich durch eine lineare Transformation in eine andere

$$G(p, q, r) = 0$$

überführen liesse, in welcher nur die *graden* Potenzen der Veränderlichen r vorkommen, was identisch damit ist, dass sich 4 zusammengehörige Doppeltangenten der durch die Gleichung $F = 0$ dargestellten Curve 4^{ten} Grades in *einem* Punkte schneiden. Damit aber das letztere stattfinde, müssen unter den Coefficienten von F zwei bestimmte algebraische Relationen bestehen, welche dann auch in ebensolche Relationen zwischen den Constanten der Gleichung zwischen x und y verwandelt werden können. Wenn die Umformung von F in G ausgeführt ist, so ist zugleich dasjenige von y abhängige Integral erster Gattung, welches in ein elliptisches transformirt werden kann, bestimmt und diese Transformation selbst sofort ausführbar.»

Es fragt sich nun, ob es noch andere von y abhängende Integrale erster Gattung giebt, welche ebenfalls durch eine Transformation zweiten Grades ($k = 2$) auf elliptische zurückgeführt werden können. Um dies zu entscheiden, hat man nach dem Vorstehenden zu untersuchen, ob sich die Function $G(p, q, r)$ durch eine lineare Transformation in eine andere $G_1(p_1, q_1, r_1)$ von derselben Gestalt so verwandeln lässt, dass r_1 und r verschieden (und auch $\frac{r_1}{r}$ nicht constant) ist.

Wir wollen dabei wieder X_1, X_2, X_3 als Coordinaten auffassen, so dass auch $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, $r_1 = 0$ ebenso wie $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ die Gleichungen bestimmter graden Linien sind.

Angenommen nun, es bestehe die Gleichung

$$G(p, q, r) = G_1(p_1, q_1, r_1)$$

für beliebige Werthe von X_1, X_2, X_3 und in G kommen nur die graden Potenzen von r, in G_1 nur die graden Potenzen von r_1 vor. Der Durchschnittspunkt der Graden (p, q) werde mit a, der von (p_1, q_1) mit b und der von (r, r_1) mit c bezeichnet.

Es ändert G seine Form nicht, wenn man statt p, q zwei andere lineare Functionen von X_1, X_2, X_3 wählt, die so beschaffen sind, dass die ihnen entsprechenden graden Linien sich ebenfalls in a schneiden. Ebenso bleibt G_1 von derselben Form, wenn man statt p_1, q_1 zwei andere Functionen wählt, deren entsprechende Linien durch b gehen.

Ich nehme zunächst an, dass der Punkt a nicht auf der Linie r_1 liege und wähle die Functionen p, q, p_1, q_1 so, dass die Linie q mit der Linie q_1 zusammenfällt und durch die Punkte (a, b), p durch die Punkte (a, e) und p_1 durch die Punkte (b, c) geht, und daher, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ Constanten verstehend

$$p = \alpha r_1 + \beta p_1$$

$$q = \gamma q_1$$

$$r = \delta r_1 + \varepsilon p_1$$

setzen kann, oder auch da durch die angegebenen Bestimmungen nur die Verhältnisse der Coefficienten der Functionen p, q, p_1, q_1 festgesetzt werden, so dass

$$p = r_1 + \beta p_1$$

$$r = r_1 + p_1'$$

$$q = q_1.$$

Nun sei

$$G(p, q, r) = r^4 + (L_1p^2 + L_2pq + L_3q^2)r^2 + M_1p^4 + M_2p^3q + M_3p^2q^2 + M_4pq^3 + M_5q^4$$

so müssen, damit durch die angegebene Substitution sich G in eine Function verwandle, in der nur grade Potenzen von r_1 vorkommen, die folgenden Gleichungen bestehen

$$4 + 2L_1(\beta + 1) + 4M_1\beta = 0$$

$$L_2 + M_2 = 0$$

$$4 + 2L_1\beta(\beta + 1) + 4M_1\beta^3 = 0$$

$$L_2(2\beta + 1) + 3M_2\beta^2 = 0$$

$$2L_3 + 2M_3\beta = 0$$

$$M_4 = 0.$$

Diese Gleichungen können auf doppelte Weise befriedigt werden.

A) Wenn L_2, M_2, M_4 nicht alle drei gleich Null sind, so muss

$$\beta = -\frac{1}{3}, \quad L_1 = 6, \quad M_1 = 9, \quad M_2 = -L_2, \quad M_3 = L_3, \quad M_4 = 0$$

sein, also G die Gestalt

$$r^4 + (6p^2 + L_2pq + L_3q^2)r^2 + 9p^4 - L_2p^3q + L_3p^2q^2 + M_5q^4 = 0$$

haben. Dann wird

$$G_1 = 16\Big\{r_1^4 + r_1^2\Big[6\left(\frac{1}{3}p_1\right)^2 + L_2\left(\frac{1}{3}p_1\cdot\frac{1}{2}q_1\right) + L_3\left(\frac{1}{2}q_1\right)^2\Big]$$
$$+ 9\left(\frac{1}{3}p_1\right)^4 - L_2\left(\frac{1}{3}p_1\right)^3\left(\frac{1}{2}q_1\right) + L_3\left(\frac{1}{3}p_1\right)^2\left(\frac{1}{2}q_1\right)^2 + M_5\left(\frac{1}{2}q_1\right)^4\Big\}$$

woraus zu ersehen ist, dass in diesem Falle die beiden Integrale

$$\int \frac{r(X_1dX_2 - X_2dX_1)}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}, \quad \int \frac{r_1(X_1dX_2 - X_2dX_1)}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

in elliptische verwandelt werden können, in denen die Function $R(\xi)$ dieselbe ist.

Es ergiebt sich ferner, dass dies auch mit dem Integrale

$$\int \frac{(r - r_1)(X_1dX_2 - X_2dX_1)}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

der Fall ist, es aber ausser diesen dreien kein anderes Integral erster Gattung giebt, welches auf die hier betrachtete Weise in ein elliptisches transformirt werden könnte.

B) Wenn L_2 und somit auch $M_2 = 0$ ist so ergiebt sich

$$L_1 = -\frac{2}{\beta}, \qquad M_1 = \frac{1}{\beta^2}$$

$$L_2 = 0, \qquad M_2 = 0$$

$$L_3 = -\beta M_3, \quad M_4 = 0$$

und es können dann β, M_3, M_5 willkürlich angenommen werden.

Es ist also

$$G = \frac{1}{\beta^2}p^4 + M_5 q^4 + r^4 - \beta M_3 q^2 r^2 - \frac{2}{\beta} r^2 p^2 + M_3 p^2 q^2.$$

In diesem Falle giebt es also drei linear von einander unabhängige Integrale erster Gattung, die sich auf elliptische Integrale reduciren lassen.

Es ist hierbei stillschweigend angenommen, dass die Punkte a, b, c nicht in grader Linie liegen (also auch a, b nicht zusammenfallen können). Dies ist aber gerechtfertigt. Zuerst ist klar, dass weder 0 und a, noch c und b zusammenfallen können, weil sonst p, q, r im ersten und p_1, q_1, r_1 im zweiten nicht von einander unabhängig wären. Lägen nun a, b, c in einer graden Linie so könnte man die Graden q, q_1 mit dieser zusammenfallen lassen, und die Functionen r_1, q_1, p_1, p, q so bestimmen, dass man

$$q = q_1 = r - r_1 = p - p_1$$

hätte, d. h.

$$r = r_1 + q_1$$

$$q = q_1$$

$$p = p_1 + q_1.$$

Dann aber würden in G die Coefficienten von r_1^3 nicht verschwinden.

Aus den Gleichungen

$$r = r_1 + p_1, \; p = r_1 + \beta p_1, \; q = q_1$$

oder

$$p_1 = \frac{r-p}{1-\beta}, \; q_1 = q, \; r_1 = \frac{p-\beta r}{1-\beta}$$

folgt, dass in dem Punkte b, wo $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, nicht auch $r = 0$ sein kann weil sonst auch in diesem Punkte $p = 0$, $q = 0$ sein, also b mit c zusammenfallen würden. Daraus folgt sofort, wenn r, r_1 mit einander vertauscht werden, dass auch der Punkt a niemals ein Punkt von r_1 sein kann, wenn b nicht in der Linie r liegt.

Es bleibt hiernach nur noch der Fall zu betrachten, wo a in r_1 und zugleich b in r liegt.

Dann kann man

Die Linien q, q_1 durch a, b

» » p durch a, c

» » p_1 durch b, c

gehen lassen, und

$$p = r_1,\ q = q_1,\ r = p_1$$

annehmen. Dadurch geht G in

$$p_1^4 + (L_1 r_1^2 + L_2 r_1 q_1 + L_3 q_1^2) p_1^2 + M_1 r_1^4 + M_2 r_1^3 q_1 + M_3 r_1^2 q_1^2 + M_4 r_1 q_1^3 + M_5 q_1^4$$

über. Es muss also

$$L_2 = 0,\ M_2 = 0,\ M_4 = 0 \text{ sein; d. h. es muss}$$

$G(p, q, r)$ *eine ganze homogene Function zweiten Grades von* p^2, q^2, r^2 *sein.*

In diesem Falle giebt es also *drei* von einander unabhängige Integrale erster Gattung, die in elliptische Integrale transformirt werden können.

Der oben betrachtete Fall (**B**) ist unter diesem mitbegriffen; er zeichnet sich aber dadurch aus, dass wenn er statt findet, ausser den Integralen

$$\int p \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}},\quad \int q \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}},\quad \int r \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

noch ein viertes sich auf ein elliptisches zurückführen lässt. Es tritt ein, wenn $F(X_1, X_2, X_3)$ durch eine lineare Transformation in der Art auf die Form

$$r^4 + (L_1 p^2 + L_3 q^2) r^2 + M_1 p^4 + M_3 p^2 q^2 + M_5 q^4$$

gebracht werden kann, dass unter den Coefficienten die Relationen

$$L_1^2 = 4M_1,\ L_1 L_3 = 2M_3$$

statt finden; das vierte Integral ist dann dasjenige, wo an die Stelle von r

$$\frac{r-\beta p}{1-\beta} \quad \left(\beta = -\frac{2}{L_1}\right)$$

tritt.

Ich habe auch den oben ausgeschlossenen Fall untersucht. Wenn er eintritt, so lässt sich jedes Integral erster Gattung zunächst in ein *hyperelliptisches*

$$\int \frac{c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2}{\sqrt{R(\xi)}} d\xi$$

transformiren, wo $R(\xi)$ eine ganze Function 8^{ten} Grades von ξ bedeutet.

Ich begnüge mich hier die Resultate anzuführen.

1. Bezeichnet man mit $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ die 8 Werthe von ξ für welche $R(\xi)$ verschwindet, so können dieselben, in dem Falle wo eins der vorstehenden Integrale sich auf ein elliptisches reducirt, so geordnet werden, dass unter ihnen die beiden Gleichungen

$$1 = \frac{(a_0-a_1)(a_2-a_7)(a_3-a_4)(a_5-a_6)}{(a_0-a_7)(a_1-a_2)(a_3-a_6)(a_4-a_5)}$$

$$1 = \frac{(a_0-a_5)(a_1-a_6)(a_2-a_3)(a_4-a_7)}{(a_0-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_5)(a_6-a_7)}$$

statt finden.

2. Wird aber ausser diesen Gleichungen noch die folgende

$$1 = \frac{(a_0-a_4)(a_1-a_3)(a_2-a_6)(a_5-a_7)}{(a_0-a_6)(a_1-a_5)(a_2-a_4)(a_3-a_7)}$$

erfüllt, so lassen sich drei von einander unabhängige Integrale erster Gattung in der angegebenen Weise in elliptische verwandeln.

Schliesslich bemerke ich, dass der Zweck meiner Arbeit weniger die Herleitung der ermittelten Resultate — denn diese würden sich wenn es nur auf sie angekommen wäre, viel kürzer rein algebraisch ergeben haben — gewesen ist; es sollte vielmehr ein Beispiel zu der in der Einleitung auseinandergesetzten Theorien meines verehrten Lehrers, welche durchzuführen derselbe mich aufgefordert hat, gegeben und der Fall, wo $\rho = 3$, $k = 2$ ist, *vollständig* behandelt werden.