

# Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen\*).

Von

HEINRICH MASCHKE in Chicago.

Ueber die Natur der Irrationalitäten, welche — sozusagen erfahrungsgemäss — in den Substitutionscoefficienten linearer Gruppen von endlicher Ordnung auftreten, ist bisher noch wenig bekannt. Im Folgenden soll bewiesen werden, dass (mit einer einzigen Einschränkung) jede endliche lineare Substitutionsgruppe von irgend welcher Variabelenzahl stets so transformirt werden kann, dass die Coefficienten der Substitutionen der Gruppe sämmtlich *cyclotomisch*, d. h. *rationale Functionen irgend welcher Einheitswurzeln* sind.

## § 1.

Sei eine Gruppe  $G$  einer endlichen Anzahl von linearen Substitutionen in  $n$  Variabelen gegeben, und sei

$$(1) \quad A: z'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

oder einfach

$$A = (a_{ik})$$

eine der in  $G$  enthaltenen Substitutionen. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von  $A$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(2) \quad s^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) s^{n-1} + \dots = 0$$

\*) Der Inhalt dieser Abhandlung bildete den Gegenstand eines am 17. August 1897 vor der American Mathematical Society in Toronto, Canada, vom Verfasser gehaltenen Vortrages.

sind, da  $A$  von endlicher Periode ist, gewisse Einheitswurzeln \*), mithin der Coefficient von  $s^{n-1}$  in (2) ihrer Summe gleich, also cyclotomisch, d. h.

$$(3) \quad a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \omega,$$

wobei wir, auch im Folgenden, mit  $\omega, \omega_0, \omega_1, \dots$  cyclotomische Zahlen bezeichnen wollen. Nennen wir die linke Seite der Gleichung (3) kurz die *Diagonalsumme* der Substitution  $A$ , so haben wir folgenden

**Satz I.** *Die Diagonalsumme jeder Substitution einer endlichen Substitutionsgruppe ist cyclotomisch.*

Nunmehr mache ich die (in der Einleitung erwähnte) Einschränkung dahin gehend, dass die Gruppe  $G$  mindestens eine Substitution  $S$  enthalten soll, für welche die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung sämtlich von einander verschieden sind.

Ich transformire jetzt die Gruppe  $G$  so, dass diese Substitution  $S$  in ihrer kanonischen Form \*\*) erscheint, also

$$(4) \quad S: z_1' = \gamma_1 z_1, z_2' = \gamma_2 z_2, \dots z_i' = \gamma_i z_i, \dots z_n' = \gamma_n z_n,$$

wo sämtliche Grössen  $\gamma$  von einander verschiedene Einheitswurzeln sind.

Die so transformirte Gruppe nenne ich  $G'$ .

Bildet man nun die Diagonalsummen für die  $n$  Substitutionen  $A, AS, AS^2, \dots AS^{n-1}$ , so sind diese sämtlich nach Satz I cyclotomisch; also erhält man die Gleichungen \*\*\*)

$$(5) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11} + & a_{22} + \dots + & a_{nn} = \omega, \\ \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{22} + \dots + \gamma_n a_{nn} = \omega_1, \\ \gamma_1^2 a_{11} + \gamma_2^2 a_{22} + \dots + \gamma_n^2 a_{nn} = \omega_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1^{n-1} a_{11} + \gamma_2^{n-1} a_{22} + \dots + \gamma_n^{n-1} a_{nn} = \omega_{n-1}. \end{array}$$

Hier ist die Determinante der Coefficienten der  $a_{ii}$  das Differenzenproduct der Grössen  $\gamma$ , also, laut Annahme, von Null verschieden. Daher kann man die Gleichungen (5) nach den  $a_{ii}$  lösen, und hieraus folgt, da die  $\gamma$  Einheitswurzeln sind, dass jede der Grössen  $a_{ii}$  cyclotomisch sein muss. Daher haben wir

\*) Wie zuerst von Herrn Camille Jordan angegeben (Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique, Journ. für Math. Bd. 84, pag. 112).

\*\*) Vgl. H. Maschke, die Reduction linearer Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form. Math. Ann. Bd. L, pag. 220.

\*\*\*) Die Herleitungsmethode dieser Gleichungen, so wie auch später der Gleichungen (6) und (8) ist analog der Methode, vermittelt welcher Herr Valentiner (De endelige Transformations-Grupper's Theori, Kopenhagen, 1889) und Herr Fuchs (Ueber eine Classe linearer homogener Differentialgleichungen, Berliner Sitzungsberichte, XXXIV, 1896) ähnliche Gleichungen zur Erreichung anderer Resultate bilden.







einer endlichen linearen Substitutionsgruppe stets eine gewisse positive Hermite'sche Form

$$H = \sum \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k \quad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik}; \quad i, k = 1, 2, \dots, n)$$

(wo der horizontale Strich bedeutet, dass für die betreffende Grösse ihr conjugirter Werth zu nehmen ist) ungeändert lassen\*).

Sei  $H$  die bei  $G'$  invariant bleibende Hermite'sche Form. Alsdann muss  $H$  auch bei  $S$  (4) invariant bleiben. Hieraus folgt sofort, dass sämtliche Coefficienten  $\alpha_{ik}$  in denen  $i \geq k$  ist, verschwinden müssen, dass also  $H$  von folgender Form ist

$$H = \mu_1 z_1 \bar{z}_1 + \mu_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + \mu_n z_n \bar{z}_n.$$

Da nun auch die Substitution  $A$  (1)  $H$  invariant lassen muss, so erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} z_k \cdot \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_{ik} \bar{z}_k \right) = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i \bar{z}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

welche identisch für alle Werthe von  $z$  erfüllt sein muss. Hieraus ergibt sich ein System von  $n^2$  in den  $n^2$  Grössen  $\alpha_{ik}$  und  $\bar{\alpha}_{ik}$  linearen Gleichungen. Dieselben lassen sich leicht nach den  $\bar{\alpha}_{ik}$  lösen, und man erhält, wenn man die Determinante von  $A$  mit  $\Delta$ , die in  $\Delta$  zu den Elementen  $\alpha_{ik}$  gehörigen Unterdeterminanten  $n - 1^{\text{ten}}$  Grades mit  $\Delta_{ik}$  bezeichnet

$$(13) \quad \Delta \bar{\alpha}_{ik} = \mu_k A_{ik}^{**}).$$

In Folge von (11) verschwindet aber jede Determinante  $A_{ik}$ , falls gleichzeitig  $\begin{cases} i = r+1, r+2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases}$ , da für diese Werthe von  $i, k$   $A_{ik}$  eine Determinante  $n - 1^{\text{ten}}$  Grades vorstellt, welche in  $r$  Columnen  $n - r$  Zeilen Nullen enthält.

Nunmehr folgt aus (13), dass  $\bar{\alpha}_{ik}$ , also auch  $\alpha_{ik}$  verschwinden muss für  $\begin{cases} i = r+1, r+2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases}$  und zwar in jeder Substitution  $A$ , d. h. durchgehend. Es sind dies die in der Matrix (12) in dem links unten befindlichen Rechteck stehenden Elemente.

Wir erhalten somit folgenden, auch an und für sich wichtigen

**Satz VII.** *Ist eine endliche Gruppe linearer Substitutionen von  $n$  Variablen gegeben, welche mindestens eine Substitution  $S$  enthält, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, und*

\*) Vgl. E. H. Moore, A Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions. Math. Ann. Bd. 50, pag. 213.

\*\*) Zu ähnlichen Formeln gelangt auch Valentiner und Fuchs l. c.

*weiss man, dass die Gruppe, nachdem man sie so transformirt hat, dass  $S$  in der kanonischen Form erscheint, so beschaffen ist, dass in ihren sämtlichen Substitutionen mindestens ein Coefficient durchgehend Null ist, so zerfällt die Gruppe in zwei Systeme von je  $r$  und  $n - r$  Variablen, in deren jedem sich die  $r$  resp.  $n - r$  Variablen nur unter sich linear substituiren.*

## § 4.

Die aus jedem der beiden, nach Satz VII für den Fall, dass  $G'$  durchgehende Nullen enthält, existirenden Systeme gebildeten Substitutionen constituiren, jedes für sich, wiederum eine endliche Gruppe. Sind in einer solchen noch durchgehende Nullen vorhanden, so zerfällt die Gruppe wiederum in solche von geringerer Variablenzahl. Schliesslich muss man zu Gruppen gelangen, in denen keine durchgehenden Nullen mehr enthalten sind (Gruppen von einer Variablen im extremen Falle). Für diese aber ist in § 2 die Cyclotomie der Coefficienten bewiesen. Wir sind somit zu folgendem Satz gelangt, dessen Beweis der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit war:

*Enthält eine lineare Substitutionsgruppe von endlicher Ordnung mindestens eine Substitution, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, so lässt sich die Gruppe stets so transformiren, dass sämtliche Coefficienten der Substitutionen der transformirten Gruppe cyclotomisch, d. i. rational durch Einheitswurzeln ausdrückbar sind.*

University of Chicago, 20. November 1897.

---