

29.

Note sur la conversion des séries en produits composés d'un nombre infini de facteurs.

(Par Mr. Stern, doct. en phil. à Goettingue.)

Étant donnée une série

$$1. \quad S = 1 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots,$$

on peut la convertir immédiatement en un produit. En effet on a

$$2. \quad S = 1 + A_1 \cdot \frac{1+A_1+A_2}{1+A_1} \cdot \frac{1+A_1+A_2+A_3}{1+A_1+A_2} \cdot \frac{1+A_1+A_2+A_3+A_4}{1+A_1+A_2+A_3} \dots$$

Cette formule si simple, si triviale même, mène pourtant à des résultats remarquables. Considérons, par exemple, la série connue

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \dots$$

En y appliquant la formule (2.) on trouve

$$e = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{41}{40} \cdot \frac{206}{205} \dots$$

expression qu'on n'avait pas encore trouvée, je crois, jusqu'à présent, par quelque autre voie. La loi d'après laquelle se forment les divers facteurs de ce produit, est évidente. En effet le $n^{\text{ième}}$ facteur étant $= \frac{a}{b}$, le $n+1^{\text{ième}}$ sera

$$= \frac{(n+2)a+1}{(n+2)a} = 1 + \frac{1}{(n+2)a}.$$

De la même manière on déduit de la série

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots,$$

le produit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1.3} \cdot \frac{14}{4.5} \cdot \frac{94}{5.14} \cdot \frac{444}{6.94} \dots$$

Ici, le $n^{\text{ième}}$ facteur étant $= \frac{a}{b}$, le $n+1^{\text{ième}}$ sera $= \frac{(n+1)b+a}{(n+2)a}$.

J'ai déjà trouvé ailleurs des produits semblables *), et il ne serait pas difficile d'en indiquer encore beaucoup d'autres.

*) T. 10. cah. 3. pg. 272. de ce Journ.

Il y a à remarquer que les expressions (1.) et (2.) sont identiques, c'est-à-dire, que si l'on ajoute un certain nombre de premiers termes de la série donnée, on obtient la même valeur, qu'on obtiendrait en calculant la valeur du produit correspondant par le même nombre de facteurs, de manière qu'une série convergente mène toujours à un produit convergent. Par les considérations précédentes il est encore facile de changer un produit composé d'un nombre infini de facteurs en une série. Car étant donné le produit

$$3. \quad \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \dots \frac{a_n}{b_n},$$

qui on le compare avec la formule (2.), et l'on trouvera

$$\frac{a_1}{b_1} = 1 + A_1, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{1 + A_1 + A_2}{1 + A_1} \text{ etc.}$$

ou

$$A_1 = \frac{a_1 - b_1}{b_1}, \quad A_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 - b_2}{b_2} \dots$$

et l'on se convaincra aisément qu'on aura généralement

$$A_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1}}{b_1 \cdot b_2 \dots b_{n-1}} \cdot \frac{a_n - b_n}{b_n},$$

de manière que le produit (3.) se transforme dans la série suivante:

$$4. \quad 1 + \frac{a_1 - b_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 - b_2}{b_2} \dots + \frac{a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1}}{b_1 \cdot b_2 \dots b_{n-1}} \cdot \frac{a_n - b_n}{b_n}.$$

Cette formule a été déjà donnée par Mr. *Schweins* *).

*) Voy. son Analyse pg. 237.