Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte.

Von

Karl Rohn in Leipzig.

(Mit 2 lithograph. Tafeln).

Einleitung.

Die Flächen dritter Ordnung haben bereits eine vielfache Behandlung erfahren und sind unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet worden, sei es, dass man von der geometrischen Erzeugungsweise ausging, sei es, dass man ihre Gleichung in eine Normalform — eine Summe von fünf Cuben gleich Null — brachte, oder sei es, dass man die Specialisirungen betrachtete, welchen man die allgemeine Flächengleichung unterwerfen kann. In dem letzteren Sinne ist als erste umfassende Arbeit die von Schläfli*) in den *Philosophical Transactions* zu nennen, worin er alle bei einer Fläche dritter Ordnung überhaupt möglichen Singularitäten bestimmt, und die verschiedenen Flächen, welche so entstehen, aufzählt. In demselben Sinne sind auch schon bei Flächen 4. Ordnung einige Untersuchungen angestellt worden, jedoch beschränken sich dieselben auf Flächen mit Doppelcurven und auf Flächen mit *zehn* oder *mehr* Knotenpunkten; aber auch hier sind die Untersuchungen noch ganz mangelhaft, so dass man nicht einmal die Gleichungen der verschiedenen Flächen mit 13, 12, 11 oder 10 gewöhnlichen Knotenpunkten kennt. Nur die Gleichungen und verschiedene Eigenschaften der Flächen 4. Ord. mit 16, 15 oder 14 gewöhnlichen Knotenpunkten sind bekannt. Man findet solche Untersuchungen bei Kummer**) und Cayley,***) sowie was die Flächen mit 16 Knotenpunkten betrifft bei mir.†)

In dieser Abhandlung soll nun dasselbe Ziel für die Flächen 4. Ord. mit dreifachem Punkte erstrebt werden, welches sich Schläfli bei

*) Schläfli, Phil. Trans. of the R. Soc. of London, 1863, v. CLIII, p. 193.

**) Kummer, Ueber die algebraischen Strahlensysteme, Berl. Abhandl. 1866, p. 1; ferner: Flächen 4. Ord., welche von einer Schaar von Flächen 2. Gr. eingehüllt werden, Berl. Monatsber. 1872, p. 474.

***) Cayley, First, second and third memoir on quartics, Proc. of the Lond. Math. Soc. III 19. 198, 234.

†) Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche, Math. Annal. Bd. XVIII, p. 99. Andere Citate finden sich weiterhin im Texte.

den *Flächen 3. Ord.* a. a. O. gesteckt hat. Es handelt sich also einestheils um die Specialisirungen des dreifachen Punktes, andertheils um die Singularitäten, welche noch ausserdem auftreten können. Zugleich mit der Erledigung dieser Fragen werden auch die *gestaltlichen* Verhältnisse*) der auftretenden Flächen ins Auge gefasst; besonders wird immer auf die Projection der singulären Punkte und ihrer Umgebung aus einem beliebigen Raumpunkte Rücksicht genommen. Ausserdem sind noch einige Untersuchungen über hierher gehörige Flächen eingestreut, welche ein besonderes Interesse bieten; ich erwähne z. B. die Specialfälle des *Symmetroids*. Es mag hier nebenbei darauf aufmerksam gemacht werden, dass ein Theil der nachfolgenden Betrachtungen sich direct auf *Flächen n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte übertragen* lassen. Insbesondere kann man die ganzen Resultate, welche Schläfli für die speciellen Flächen 3. Ord. (Flächen, welche irgend welche Singularitäten aufweisen) gegeben hat, äusserst einfach mit der hier angewendeten Methode gewinnen, wenn man von der Fläche 3. Ord. mit *einem* Knotenpunkte ausgeht.

Die Abhandlung beginnt mit einigen allgemeinen Betrachtungen über unsere Flächen. Dann werden die Singularitäten der Fläche, welche ausserhalb des dreifachen Punktes auftreten können, untersucht unter der Voraussetzung, dass der dreifache Punkt ein allgemeiner ist. Hieran schliesst sich eine Beleuchtung der Realitäts- und der gestaltlichen Verhältnisse dieser Flächen an. Weiterhin werden die Flächen behandelt, deren dreifacher Punkt ein specieller ist, worauf die Untersuchung zu Flächen übergeht, deren dreifacher Punkt von einer *singulären* Geraden durchsetzt wird, um mit den Flächen mit einer dreifachen Geraden zu schliessen. Ueberall sind die entsprechenden gestaltlichen Untersuchungen beigefügt. Das letzte Capitel endlich beschäftigt sich mit den Realitätsverhältnissen und den Specialisirungen der Steiner'schen Fläche.

Einiges über die Curven auf der Fläche, deren Ordnung die Zahl 5 nicht übersteigt.

1) Man hat ganz allgemein für Flächen n. Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkt die Bezeichnung Monoide eingeführt, und so werden wir auch unsere Flächen kurz als *Monoide* 4. *Ord.* bezeichnen. Ihre Gleichung lässt sich in der Form schreiben:

$$f = (xyz)_3 + \sigma(xyz)_4 = u_3 + \sigma u_4 = 0,$$

wo $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ zwei Kegel von der dritten resp. vierten Ord-

*) Vergl. meine Note in den Berichten der königl. Sächs. Gesell. der Wissenschaften vom 28. Januar 1884, welche über die gestaltlichen Verhältnisse einer Fläche in der Umgebung eines $\varkappa$-fachen Punktes handelt.

nung mit dem gemeinsamen Scheitel $x = y = z = 0$ bezeichnen; die Zahl der Constanten in dieser Gleichung ist 24. Der Kegel $u_3 = 0$ stellt den Tangentialkegel im dreifachen Punkt der Fläche dar; der Kegel $u_4 = 0$ schneidet den letzteren in 12 *Geraden, welche der Fläche ganz angehören*, wir nennen sie die 12 *Hauptgeraden* unserer Fläche. Von diesen 12 Geraden können 9 beliebig angenommen werden, die 3 übrigen liegen alsdann auf dem durch die ersteren bestimmten Kegel 3. Ord. Zwei von diesen 3 Geraden kann man noch beliebig auf dem Kegel 3. Ord. wählen, während die letzte Gerade dadurch eindeutig bestimmt ist, da nach einem bekannten Satze von den 12 Schnittpunkten einer Curve 3. Ord. mit einer Curve 4. Ord. *einer* durch die andern eilf mitbestimmt ist. Die Wahl der 12 Hauptgeraden unserer Fläche absorbirt demnach von den 24 Constanten 20. Nimmt man nun noch 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte an, durch welche unser Monoid hindurchgehen soll, so ist dasselbe vollkommen bestimmt; denn man kann sofort die Schnittcurven in den Ebenen durch je drei der vier Punkte angeben.

2) Die 12 Hauptgeraden des Monoids bezeichnen wir mit $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$; sie bestimmen zu je zwei 66 Ebenen, deren jede die Fläche noch in einem Kegelschnitte schneidet, sie seien $K_{1,2}, K_{1,3}, \ldots, K_{11,12}$. Diese Kegelschnitte schneiden sich alle in dem dreifachen Punkte der Fläche; ferner schneiden sich je zwei derselben, die keinen Index gemein haben noch in einem weiteren Punkte.

3) Legt man durch 5 Hauptgeraden einen Kegel 2. Grades, so schneidet derselbe noch eine Curve 3. Ord. C_3 aus, welche einfach durch den dreifachen Punkt verläuft. Es giebt $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$ solcher C_3, welche man durch 5 Indices zu bezeichnen hat. Nimmt man irgend zwei C_3 mit völlig verschiedenen Indices, so schneiden sie sich in 5 Punkten; man kann desshalb durch sie eine Fläche 2. Grades legen, welche noch denjenigen $K_{h,i}$ aus dem Monoid ausschneidet, der mit ihnen keinen Index gemein hat.

4) Je 4 Hauptgeraden bestimmen ein Büschel von Kegeln 2. Ord., welche aus dem Monoide ein System von *Curven* 4. *Ord. mit Doppelpunkt* ausschneiden. Die Doppelpunkte derselben liegen in dem dreifachen Punkte des Monoids, und es schneiden sich diese Curven ausserdem nirgends mehr, so dass sie das ganze Monoid einfach und lückenlos überdecken. Solcher Curvensysteme giebt es 495; sie sind durch 4 Indices zu bezeichnen. Ebenso findet man 495 Systeme von *Curven* 4. *Ord. ohne Doppelpunkt*, wenn man durch 8 Hauptgeraden ein Büschel von Kegeln 3. Ord. legt; sie sind charakterisirt durch 8 Indices. Alle Curven irgend eines der letzteren Systeme berühren sich im dreifachen Punkt, sonst aber treffen sie sich nirgends. Zu jedem

System von Curven 4. Ord. *mit* Doppelpunkt gesellt sich ein System von Curven 4. Ord. *ohne* Doppelpunkt, und zwar gehören immer zwei solche Systeme zusammen, welche alle 12 Indices erschöpfen.

Jede Curve des einen Systems liegt mit jeder Curve des zugehörigen Systems auf einer Fläche 2. Grades, sie schneiden sich ausser im dreifachen Punkt noch in 6 beweglichen Punkten; durch jeden Punkt unserer Fläche geht so eine einzige Curve aus jedem System. Die beiden Erzeugenden einer solchen Fläche 2. Grades durch den dreifachen Punkt liegen auf dem zugehörigen Kegel 3. Ord.

5) Nimmt man 6 von den Hauptgeraden der Fläche zu einfachen und eine siebente zur Doppelkante eines Kegels 3. Ord., so schneidet derselbe eine *Curve 4. Ord. zweiter Species* aus, deren es 5544 giebt. Durch diese Curve kann man *eine* Fläche 2. Gr. legen, welche natürlich die Doppelkante enthält und noch eine der obigen Curven 3. Ord. ausschneidet; beide Curven treffen sich im dreifachen Punkte und noch in 6 weiteren Punkten. Man erhält ferner eine Curve 5. Ord., wenn man 5 Hauptgeraden als einfache und 3 weitere als Doppelkanten eines Kegels 4. Ord. wählt, und deren giebt es 27 720; eine solche Curve hat die drei Doppelkanten zu dreifachen Secanten. Endlich findet man doppelt unendlich viele Systeme von Curven 5. Ord., wenn man durch die oben gefundenen Raumcurven 3. Ordnung Flächen 2. Grades legt; diese Curven haben einen Doppelpunkt.

6) Ein Monoid 4. Ord. kann auch gerade Linien besitzen, welche den dreifachen Punkt nicht enthalten; dann muss die Ebene durch diesen Punkt und die Gerade noch drei Hauptgeraden ausschneiden. Das Monoid besitzt also so viele weitere Geraden, als es Ebenen giebt, welche drei von den Hauptgeraden enthalten. Die Frage nach der Maximalzahl dieser Geraden ist also äquivalent mit der Frage: Wie oft können die 12 Hauptgeraden, d. h. die 12 Schnittgeraden eines Kegels 3. Ord. und eines Kegels 4. Ord. zu drei in einer Ebene liegen? An Stelle der Kegel kann man auch zwei Curven 3. und 4. Ordnung nehmen und untersuchen, wie oft die 12 Schnittpunkte zu drei auf einer Geraden liegen können. Zu einer Curve 3. Ord. gehört aber ein ganz bestimmtes elliptisches Integral u, welches eindeutig auf der Curve ausgebreitet werden kann.*) Bezeichnen wir die Perioden dieses Integrals mit ω und $i\omega'$ und die Parameter der 12 Schnittpunkte mit $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$, so besteht die Relation $\sum_1^{12} a_i \equiv 0 \pmod{\omega + i\omega'}$.

Sollen nun drei Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, so muss die

*) Harnack. Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven 3. Gr., Math. Annal. Bd. IX, p. 1.

Summe ihrer Parameter congruent Null sein mod. Perioden. Wählen wir also die 12 Punkte:

$$a_1 = 0,\quad a_2 = \frac{\varpi}{2},\quad a_3 = \frac{i\omega'}{2},\quad a_4 = \frac{\omega + i\omega'}{2},$$

$$a_5 = \frac{\omega}{3},\quad a_6 = -\frac{\omega}{6},\quad a_7 = \frac{\omega}{3} + \frac{i\omega'}{2},\quad a_8 = -\frac{\omega}{6} + \frac{i\omega'}{2},$$

$$a_9 = -\frac{\omega}{3},\quad a_{10} = \frac{\omega}{6},\quad a_{11} = -\frac{\omega}{3} + \frac{i\omega'}{2},\quad a_{12} = \frac{\omega}{6} + \frac{i\omega'}{2},$$

so liegen 19 Mal drei auf einer Geraden, und das ist ersichtlich das Maximum. Wir haben so das Resultat gewonnen: *Schneidet die Curve 4. Ord.* $u_4 = (xyz)_4 = 0$ *die Curve 3. Ord.* $u_3 = (xyz)_3 = 0$ *in ihren drei reellen Wendepunkten sowie in den Berührungspunkten der Tangenten aus diesen Wendepunkten, so besitzt das Monoid* $u_3 + \sigma u_4 = 0$ *noch* 19 *reelle Geraden, welche nicht durch den dreifachen Punkt gehen.*

7. Die Gruppirung dieser Geraden, die wir durch drei Zahlen bezeichnen müssen, ist die folgende. Durch die Gerade 1, 5, 9 gehen drei sechstactische*) Ebenen; *eine* dieser drei Ebenen enthält die Geraden 2, 3, 4; 6, 7, 8; 10, 11, 12, durch welche keine weitere sechstactische Ebene geht. Die beiden *andern* Ebenen durch die Gerade 1, 5, 9 schneiden die Geradentripel 2, 7, 12; 3, 8, 10; 4, 6, 11 resp. 2, 8, 11; 3, 6, 12; 4, 7, 10 aus, und durch jede Gerade eines Tripels geht noch je eine weitere sechstactische Ebene hindurch. Jede der drei sechstactischen Ebenen des ersten Tripels schneidet jede Ebene des zweiten Tripels in einer Geraden, welche ebenfalls auf der Fläche liegt: es sind dies die 9 Geraden: 1, 6, 10; 1, 7, 11; 1, 8, 12; 5, 2, 10; 5, 3, 11; 5, 4, 12; 9, 2, 6; 9, 3, 7; 9, 4, 10. *Es giebt also im Ganzen 9 sechstactische Ebenen. Ausserdem giebt es 9 fünftactische Ebenen, welche aus der Fläche je einen Kegelschnitt und zwei Geraden ausschneiden.* Durch jede der zuletzt erwähnten 9 Geraden geht *eine* solche Ebene und durch jede Gerade des Tripels: 2, 3, 4; 6, 7, 8; 10, 11, 12 gehen *drei*. Bekanntlich schneiden sich bei der Curve 3. Ord. die drei Geraden 2, 3, 4; 6, 7, 8; 10, 11, 12 in einem und demselben Punkte, folglich muss dieses auch mit den bezüglichen Geraden auf der Fläche geschehen; und es schneiden sich also *die 9 fünftactischen Ebenen in demselben Punkte der Fläche.* Die Gleichung dieser Fläche kann, wie man leicht zeigt, auf die Form gebracht werden:

$$(x+y+z)^3 + \varrho xyz + \sigma(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) = 0.$$

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass die Zahlen der zu Anfang angegebenen Curven sich ändern, wenn das Monoid Geraden

*) Ebenen, welche eine Fläche sechs Mal berühren; bei der Fläche 4. Ord. sind das Ebenen, welche 4 Geraden ausschneiden.

oder Kegelschnitte oder Raumcurven 3. Ord. besitzt, welche nicht durch den dreifachen Punkt gehen; jedoch unterlasse ich es hier diese Aenderungen, die sehr einfacher Natur sind, anzugeben.

Die Singularitäten des Monoids, welche ausserhalb des dreifachen Punktes liegen.

8. Die Betrachtungen, welche in diesem Capitel angestellt werden, werde ich in einer solchen Form geben, dass sie sich zum grössten Theil direct auf Monoide n. Ordnung übertragen lassen. Zuvörderst ist es klar, dass die Verbindungslinie eines Knotenpunktes der Fläche mit dem dreifachen Punkte auf der Fläche selbst liegen, d. h. eine der 12 Hauptgeraden sein muss. Aber weiter ergiebt sich sofort, dass auf einer solchen Geraden *nur dann* ein Knotenpunkt liegen kann, aber auch liegen muss, wenn eine der übrigen 11 Geraden mit ihr zusammenfällt. Zur bequemen analytischen Behandlung machen wir den dreifachen Punkt zum Eckpunkt $x = y = 0$ und eine der 12 Hauptgeraden zur Kante $x=0$, $y=0$ des Coordinatentetraeders. Die Gleichung der Fläche erhält dann die Gestalt:

$$f = wu_3 + u_4 = w(xyz)_3 + (xyz)_4 = 0$$

wobei $(xyz)_3 = 0$ und $(xyz)_4 = 0$ für den Werth $x = y = 0$.

Sollen nun *zwei* der 12 Hauptgeraden mit der Kante $x=0$, $y=0$ zusammenfallen, so müssen sich die beiden Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ daselbst berühren, was durch die Gleichung:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} : \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{\partial u_4}{\partial x} : \frac{\partial u_4}{\partial y},$$

gebildet mit den Werthen

$$x = 0,\ y = 0,\ z = z,$$

ausgedrückt wird. Die Coordinaten eines Knotenpunktes müssen aber den vier Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = w\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = w\frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial u_4}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = w\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = u_3 = 0.$$

Ein Punkt $x = 0$, $y = 0$, $w = \varrho z$ befriedigt zunächst nur die beiden letzten Gleichungen; da jedoch für $x = 0$, $y = 0$ die beiden ersten Gleichungen identisch werden und sich abgesehen von dem Factor z^2, auf eine lineare Gleichung zwischen w und z reduciren, so wird ϱ dadurch eindeutig bestimmt. Man erkennt also aus diesen Gleichungen, dass das Monoid einen Knotenpunkt besitzt, sobald sich die Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ berühren; man erkennt aus denselben aber auch das

Umgekehrte, dass sich die Kegel berühren, wenn das Monoid einen Knotenpunkt besitzt.

9. Es soll nun bewiesen werden, dass *das Monoid einen biplanaren Knotenpunkt* $B_\varkappa$ *von der Ordnung* $\varkappa$*) *besitzt, wenn die Kegel* $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ *eine Berührung von der Ordnung* $(\varkappa - 1)$ *eingehen*, d. h. wenn sie $\varkappa$ consecutive Kanten gemein haben. Wir benutzen zu diesem Beweise wieder die obige Gleichungsform, und müssen zeigen, dass von den 36 Tangentialebenen durch eine beliebige Gerade l an unsere Fläche $\varkappa$ mit der Ebene durch l und $B_\varkappa$ zusammenfallen. Nehmen wir also als Gerade l die Gerade $y = 0$, $w = 0$, so ist zu zeigen, dass $\varkappa$ von den 36 Schnittpunkten:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

in den Knotenpunkt $B_\varkappa$ hineinfallen.

Die Curve:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = w\,\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = u_3 = 0,$$

lässt sich durch die beiden Potenzreihen darstellen:

$$x = ay + by^2 + cy^3 + \cdots, \quad w = \varrho + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \cdots,$$

indem wir bei diesen Entwicklungen dem z den constanten Werth 1 beilegen. Die erste dieser beiden Reihen ergiebt sich unmittelbar aus $u_3 = 0$, die letzte folgt dann aus: $w = -\frac{\partial u_4}{\partial y} : \frac{\partial u_3}{\partial y}$, wenn man hierin für x jene Potenzreihe substituirt und $z = 1$ annimmt; das constante Glied erhält dann den schon oben bestimmten Werth ϱ. Setzen wir nun in die linke Seite der Gleichung des Monoids für x und w ihre Potenzreihen ein, so verschwindet u_3 identisch und es bleibt nur u_4, gebildet mit $x = ay + by^2 + \cdots$, übrig, so dass man erhält: $u_4 = Ay + By^2 + \cdots + Ky^\varkappa + Ly^{\varkappa+1} + \cdots$. Wenn aber der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Kante $x = 0$, $y = 0$ von der Ordnung k berührt, so müssen in dem Ausdruck für u_4 die $k - 1$ ersten Glieder wegfallen, so dass $u_4 = Ky^\varkappa + Ly^{\varkappa+1} + \cdots$ wird. Somit ist gezeigt, dass durch Einführung der Potenzreihen von x und w in f dieses übergeht in: $f = Ky^\varkappa + Lu^{\varkappa+1} + \cdots$, wodurch der verlangte Beweis geführt ist.

10. Es erübrigt uns nur noch das singuläre Ebenenpaar des Knotenpunktes anzugeben. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass die gemeinschaftliche Tangentialebene der beiden Kegel längs der Kante $x = 0$, $y = 0$ mit der Ebene $x = 0$ zusammenfällt. Dann

---

*) Es ist dieses ein Knotenpunkt, der die Classe der Fläche um $\varkappa$ Einheiten erniedrigt. Vergl. wegen des Folgenden meine Arbeit über biplanare Knotenpunkte, Math. Ann. Bd. XXII, p. 124.

kommen zu den Bedingungsgleichungen $(0\,0\,z)_3 \equiv 0$ und $(0\,0\,z)_4 \equiv 0$ noch die neuen $\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \equiv 0$ und $\left(\frac{\partial u_4}{\partial y}\right) \equiv 0$, wo die Klammern ausdrücken sollen, dass auch hierin $x = 0$, $y = 0$ zu setzen ist. Die Gleichung des Tangentialskegels im Knotenpunkte: $x = 0$, $y = 0$, $w = \varrho z$ wird alsdann:

$$x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) + 2xz\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right) + 2xw\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0;$$

er berührt die Ebene $x = 0$ längs der Kante $x = 0$, $y = 0$. Ein Osculiren der beiden Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ längs der Kante $x = 0$, $y = 0$ drückt sich durch die Gleichung aus:

$$\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u_4}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0.$$

Es ist aber $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \varrho\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}\right)$ und $\varrho = -\left(\frac{\partial u_4}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)$; es verschwindet also vermöge der neuen Bedingungsgleichung der Coefficient von y^2 und der Tangentialkegel zerfällt in das Ebenenpaar:

$$x = 0, \quad x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) + 2z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right) + 2w\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) = 0.$$

Die Ebene $x = 0$ berührt das Monoid längs der Geraden $x = 0$, $y = 0$ und schneidet aus demselben noch einen Kegelschnitt aus, der durch den dreifachen und den Knotenpunkt hindurchgeht; die andere singuläre Ebene schneidet eine Curve 4. Ord. mit dreifachem Punkte aus. Geht der biplanare Knotenpunkt in einen B_4 über, so berührt der Kegelschnitt in der Ebene $x = 0$, und ebenso ein Ast der Curve mit dreifachem Punkt, die singuläre Gerade. Diese Verhältnisse bleiben im Allgemeinen auch noch für einen B_5, B_6, ..., B_{12} bestehen.

11. Im Anschluss an das Vorhergehende ist noch zweierlei zu erwähnen. Erstens erkennt man, dass die beiden singulären Ebenen nicht zusammenfallen können, wenn nicht das Monoid eine Doppelgerade durch den dreifachen Punkt erhalten soll, ein Fall der erst in einem späteren Capitel seine Erledigung findet. *Das Monoid kann also keinen uniplanaren Knotenpunkt besitzen, der nicht auf einer Doppelgeraden liegt.* Zweitens ist einer Specialisirung der biplanaren Knotenpunkte zu gedenken, welche entsteht, wenn sich die Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ längs einer Wendekante osculiren. Die singuläre Ebene $x = 0$ schneidet dann die dreifach gezählte Gerade $x = 0$, $y = 0$ und eine weitere Gerade aus, welche den Knotenpunkt nicht passirt. Geht der B_3 in einen B_4 über, indem sich die Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ hyperosculiren, so schneidet die Ebene $x = 0$ in der dreifachen Geraden $x = 0$, $y = 0$ und einer Geraden, welche den Knotenpunkt passirt. Geht man endlich zu einem B_5 über, so schneidet die Ebene $x = 0$

das Monoid wiederum in der dreifachen Geraden und ausserdem in der singulären Geraden, d. h. der Schnittlinie der beiden singulären Ebenen. Dieselbe bildet auch einen Theil der Schnittcurve in der andern singulären Ebene, welche noch aus einer Curve 3. Ordnung mit Doppelpunkt besteht.

12. Es dürfte nicht überflüssig sein noch einen einfachen geometrischen Beweis für den Satz zu erbringen, dass das Monoid einen $B_\varkappa$ besitzt, sobald von den 12 Hauptgeraden desselben $\varkappa$ zusammenrücken. Rücken zunächst zwei von den 12 Hauptgeraden zusammen, so besitzt das Monoid nur noch 11 von einander getrennt liegende Geraden und längs *einer* dieser Geraden eine *constante Tangentialebene*. Legt man durch diese Gerade eine beliebige Ebene, so schneidet diese noch eine Curve 3. Ord. aus, welche einen Knotenpunkt im dreifachen Punkt der Fläche besitzt und folglich jene Gerade noch *einmal* schneidet. Dieser Schnittpunkt muss ersichtlich ein Knotenpunkt unserer Fläche sein, da es in ihm zwei Tangentialebenen giebt, nämlich die constante Tangentialebene längs der Geraden und die soeben gezogene Ebene. Nehmen wir für den Augenblick ein Monoid mit 12 getrennt liegenden Hauptgeraden $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$ an, so giebt es durch jede Gerade G, welche den dreifachen Punkt enthält, noch 12 Tangentialebenen an das Monoid, nämlich die Ebenen durch die Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_{12}$. Lassen wir nun $\varkappa$ Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ einander immer näher rücken, bis sie schliesslich zusammenfallen und alsdann $\varkappa$ consecutive Kanten des Berührungskegels im dreifachen Punkte bilden, so fallen auch $\varkappa$ von jenen 12 Tangentialebenen zusammen in eine einzige Ebene durch G und den hierbei entstehenden Knotenpunkt. Derselbe absorbirt demgemäss $\varkappa$ Tangentialebenen durch G und ist somit ein biplanarer Knotenpunkt $B_\varkappa$, der die Classe des Monoids um $\varkappa$ Einheiten erniedrigt.

13. Nachdem wir nun gezeigt haben, von welcher Art die Singularitäten sind, die ein Monoid mit einem allgemeinen dreifachen Punkt noch besitzen kann, ist es leicht anzugeben in welcher Combination diese Singularitäten auftreten können. Da die 12 Schnittgeraden eines Kegels 3. Ord. mit einem Kegel 4. Ord. von gleichem Scheitel, oder, was dasselbe ist, die 12 Schnittpunkte einer Curve 3. Ord. mit einer Curve 4. Ord. in beliebiger Weise zusammenrücken können, wenn man nur die beiden Kegel resp. Curven geeignet wählt, so erhält man sofort folgendes Resultat. *Theilt man die Zahl 12 ganz beliebig in Summanden, so giebt es dieser Eintheilung gemäss immer Monoide 4. Ord., welche jedem Summanden 2 entsprechend einen gewöhnlichen Knotenpunkt und jedem Summanden 3, 4, 5, ... entsprechend einen biplanaren Knotenpunkt B_3, B_4, B_5, ... besitzen.* So ergiebt z. B. die Zerlegung $12 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1$ Monoide, welche noch einen

gewöhnlichen und zwei biplanare Knotenpunkte B_3 und B_5 besitzen. Hiermit beschliessen wir dieses Capitel und wollen zunächst einige hierher gehörige Monoide wirklich aufstellen.

Das Monoid mit 6 gewöhnlichen Knotenpunkten. Zwei Arten desselben.

14. Berührt eine Curve 4. Ord. $u_4=0$ eine Curve 3. Ord. $u_3=0$ in sechs Punkten, und bezeichnen wir die Werthe des auf der Curve 3. Ord. ausgebreiteten elliptischen Integrals in diesen 6 Stellen mit $a_1, a_2, \ldots, a_6$ so besteht zwischen den Parametern dieser 6 Punkte die Relation

$$2\sum_1^6{}^i a_i \equiv 0 \;(\text{mod. } \omega \text{ u. } i\omega')\,.$$

In diesen Punkten berühren die dreifach unendlich vielen Curven $u_4 + lu_3 = 0$, wo l ein in x, y, z linearer Ausdruck ist. Aus jener Relation folgt aber weiter:

$$\sum_1^6{}^i a_i \equiv \frac{P}{2} \;(\text{mod. } \omega \text{ u. } i\omega'),$$

wenn man mit $\frac{P}{2}$ einen der vier Werthe $\frac{\omega}{2}$, $\frac{i\omega'}{2}$, $\frac{\omega + i\omega'}{2}$, 0 bezeichnet. Tritt der letzte Fall ein, d. h. ist

$$\sum_1^6{}^i a_i \equiv 0 \;(\text{mod. } \omega \text{ u. } i\omega'),$$

so liegen die 6 Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_6$ auf einem Kegelschnitt; derselbe gehört, doppelt gezählt, mit zu den dreifach unendlich vielen, sechs Mal berührenden Curven 4. Ord. Dieses Resultat auf das Monoid übertragen lässt sich so aussprechen. Unter den dreifach unendlich vielen Ebenen des Raumes giebt es im letztgenannten Falle eine einzige, welche das Monoid längs eines Kegelschnitts berührt; auf diesem Kegelschnitt liegen die 6 Knotenpunkte des Monoids.

Wir haben also zwei wesentlich verschiedene Arten von Monoiden mit 6 *Knoten zu unterscheiden, nämlich eine, deren Knotenpunkte beliebig im Raume gelegen sind, und eine andere, deren Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen.* Die Mannichfaltigkeiten beider Arten sind gleich gross.

Erste Art; Monoide mit 6 beliebig gelegenen Knotenpunkten.

15. Diese Flächen sind offenbar völlig bestimmt, wenn der dreifache Punkt und die 6 Knotenpunkte vorgegebene Punkte sein sollen; denn ersterer liefert 10 und die letzteren je 4 Bedingungsgleichungen,

wodurch sich die 24 Constanten der Flächengleichung geradezu bestimmen. Es wäre nun allerdings möglich, dass die so definirte Fläche keine wirkliche Fläche 4. Ord. wäre, sondern in Flächen niederer Ordnung zerfiele, wie das z. B. in der That bei Flächen 4. Ord. mit 8 vorgegebenen Knotenpunkten (wenn diese keine specielle Lage besitzen) der Fall ist. Man überzeugt sich jedoch im vorliegenden Falle leicht, dass es im Allgemeinen keine zerfallene Fläche giebt, welche die vorgeschriebenen Singularitäten besitzt, und dass in Folge dessen eine wirkliche Fläche 4. Ord. existirt, welche 6 beliebig gewählte Punkte als Doppelpunkte und einen weiteren beliebigen Punkt als dreifachen Punkt aufweist.

16. Um die Gleichung einer solchen Fläche wirklich aufzustellen, bezeichnen wir den dreifachen Punkt mit $*$ und die Doppelpunkte der Reihe nach mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sei ferner $K = 0$ der Kegel durch $1, 2, 3, 4, 5$ mit dem Scheitel $*$; $F = 0$ irgend eine Fläche 2. Grades durch die 7 Punkte $*, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $E = 0$ die Ebene durch die drei Punkte $*, 4, 5$; sei endlich $\nabla = 0$ die Fläche 3. Ord. mit den 4 Knotenpunkten $*, 1, 2, 3$, welche durch die drei Punkte $4, 5, 6$ einfach hindurchgeht. Dann ist:

$$K \cdot F - \varrho E \cdot \nabla = 0$$

eine Fläche 4. Ord. mit einem dreifachen Punkt in $*$, welche in den Punkten $1, 2, 3, 4, 5$ Knoten besitzt und durch den Punkt 6 einfach hindurchgeht. Diese Gleichung besitzt noch 3 willkürliche Constanten, von denen die eine die Constante ϱ ist, während die beiden andern noch in F enthalten sind; sie stellt somit die allgemeinste Fläche dar, welche die angeführten Eigenschaften besitzt. Soll nun der Punkt 6 ebenfalls ein Knotenpunkt dieser Fläche werden, so müssen die Ableitungen der obigen Gleichung, genommen nach x, y, z und w, verschwinden, wenn man darin die Coordinaten des Punktes 6 einsetzt. Da aber F und ∇ alsdann verschwinden, so reduciren sich diese Ableitungen auf:

$$K \cdot \frac{\partial F}{\partial x} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial x} = 0, \quad K \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial z} = 0,$$
$$K \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial y} = 0, \quad K \cdot \frac{\partial F}{\partial w} - \varrho E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial w} = 0,$$

und zwar gebildet mit den Coordinaten des Punktes 6. Hierfür können wir schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \nabla}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial \nabla}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial \nabla}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial w} : \frac{\partial \nabla}{\partial w} = \varrho \cdot \frac{E}{K},$$

wo sich diese Ausdrücke immer auf den Punkt 6 beziehen. Diese Gleichungen sagen aber aus, dass $F = 0$ im Punkte 6 dieselbe Tangentialebene besitzen soll, wie die Fläche $\nabla = 0$, dadurch ist aber

F gerade bestimmt; zugleich ergiebt sich durch die letzte Gleichung eine Bestimmung von ϱ. Wir erhalten somit die Gleichung der gesuchten Fläche, sie hängt nur noch von den Coordinaten ihrer singulären Punkte ab.

17. Nehmen wir nun als singuläre Punkte die 7 Punkte:

$$* = (0, 0, 0, 1), \quad 1 = (1, 0, 0, 0), \quad 2 = (0, 1, 0, 0), \quad 3 = (0, 0, 1, 0),$$

$$4 = \left(\tfrac{1}{\alpha}, \tfrac{1}{\beta}, \tfrac{1}{\gamma}, \tfrac{1}{\delta}\right), \; 5 = \left(\tfrac{1}{\alpha'}, \tfrac{1}{\beta'}, \tfrac{1}{\gamma'}, \tfrac{1}{\delta'}\right), \; 6 = (1, 1, 1, 1),$$

so finden wir:

$$K = \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}; \qquad E = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \beta'\gamma' & \gamma'\alpha' & \alpha'\beta' \end{vmatrix};$$

$$\nabla = \begin{vmatrix} yzw & zwx & wxy & xyz \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}.$$

Die Tangentialebene der Fläche $\nabla = 0$ im Punkte $6 = (1, 1, 1, 1)$ wird ersichtlich:

$$-\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Fläche 2. Grades $F = 0$ ist aber dadurch bestimmt, dass sie durch die 7 singulären Punkte geht und im Punkte $6 = (1, 1, 1, 1)$ die voranstehende Tangentialebene besitzt. Es ergiebt sich demgemäss als Werth von F die sechsgliedrige Determinante:

$$F = \begin{vmatrix} xy & zw & xz & yw & xw & yz \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma\delta & \alpha\beta & \beta\delta & \alpha\gamma & \beta\gamma & \alpha\delta \\ \gamma'\delta' & \alpha'\beta' & \beta'\delta' & \alpha'\gamma' & \beta'\gamma' & \alpha'\delta' \\ \gamma+\delta & \alpha+\beta & \beta+\delta & \alpha+\gamma & \beta+\gamma & \alpha+\delta \\ \gamma'+\delta' & \alpha'+\beta' & \gamma'+\delta' & \alpha'+\gamma' & \beta'+\gamma' & \alpha'+\delta' \end{vmatrix}.$$

In der That geht die Fläche $F = 0$ durch alle singulären Punkte hindurch, und es bleibt nur noch zu beweisen, dass sie im Punkte 6 die vorgeschriebene Tangentialebene besitzt, oder dass:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial w} = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{matrix}\right\|$$

ist, wenn man in diesen Ableitungen $x = y = z = w = 1$ setzt. Nun findet man durch eine einfache Rechnung, dass die Ableitungen von F im Punkte $(1, 1, 1, 1)$ identisch werden der Reihe nach mit den dreigliedrigen Determinanten dieser Matrix, abgesehen von einem constanten Factor $\varkappa$, wo:

$$\varkappa = \begin{vmatrix} (\alpha - \delta)(\beta - \gamma), & (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \\ (\alpha' - \delta')(\beta' - \gamma'), & (\alpha' - \gamma')(\beta' - \delta') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' & \beta\beta' & \gamma\gamma' & \delta\delta' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}.$$

Hiermit ist der geforderte Beweis erbracht, und es erübrigt in der Gleichung des Monoids nur noch die Bestimmung von ϱ. Nach den obigen Untersuchungen ist aber:

$$\varrho = K \cdot \frac{\partial F}{\partial x} : E \cdot \frac{\partial \nabla}{\partial x},$$

wenn man hierin $x = y = z = w = 1$ setzt; also kommt für ϱ der Werth:

$$\varrho = \varkappa \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \beta'\gamma' & \gamma'\alpha' & \alpha'\beta' \end{vmatrix}}.$$

Verstehen wir also unter K, F, E, ∇ und ϱ die soeben aufgestellten Ausdrücke, so stellt die Gleichung:

$$K \cdot F - \varrho E \cdot \nabla = 0$$

eine Fläche 4. Ord. mit dem dreifachen Punkt $(0, 0, 0, 1)$ und den 6 Doppelpunkten $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$, $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}\right)$, $\left(\frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\beta'}, \frac{1}{\gamma'}, \frac{1}{\delta'}\right)$ dar.

18. Diese Fläche hat einige interessante Eigenschaften. Sie enthält offenbar 6 Raumcurven 3. Ord., die durch den dreifachen Punkt und je 5 Knotenpunkte verlaufen; ferner besitzt sie nach Früherem 6 Geraden durch den dreifachen Punkt und je einen Knotenpunkt und längs dieser Geraden constante Tangentialebenen. Jede solche Ebene schneidet noch einen Kegelschnitt aus, der von *einer* jener Raumcurven 3. Ord. in drei Punkten getroffen wird, und zwar von derjenigen Curve, welche den in der Ebene gelegenen Knotenpunkt nicht enthält. Durch die Raumcurve 3. Ord. und den sie drei Mal schneidenden Kegelschnitt kann man aber eine Fläche 2. Grades legen, die das Monoid noch in einer weiteren Curve 3. Ord. schneidet. Diese Curve ist jedoch mit der ersteren Raumcurve 3. Ord. identisch, da sie durch

den dreifachen Punkt und dieselben 5 Knotenpunkte hindurchgehen muss. Es berührt also die Fläche 2. Grades unsere Fläche 4. Ord. längs einer Raumcurve 3. Ord. und schneidet noch einen Kegelschnitt aus. Nun treffen die Geraden der *einen* Erzeugung die Raumcurve 3. Ord. zwei Mal und den Kegelschnitt ein Mal, d. h. sie berühren das Monoid zwei Mal und schneiden es ausserdem noch in einem Punkte. Das ist aber unmöglich, und es folgt daraus, dass die genannte Fläche 2. Grades ein Kegel sein muss. Wir gewinnen also den Satz: *Ein Monoid mit* 6 *beliebig gelegenen Knoten enthält* 6 *Raumcurven* 3. *Ord., die Tangentialebenen in den Punkten einer solchen Curve schneiden sich alle in einem festen Punkte der Curve, umhüllen also einen Kegel* 2. *Ordnung.* Diese Eigenschaft findet sich schon beim Monoid mit nur 5 gewöhnlichen Knotenpunkten, jedoch hier nur *ein* Mal.

19) *Das Monoid mit* 6 *Knotenpunkten besitzt noch die weitere bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die Tangentenkegel* 6. *Ord. aus den Knotenpunkten zerfallen in zwei Kegel* 4. *Ord. mit je einer Doppelkante durch den dreifachen Punkt des Monoids.* Bekanntlich geht die erste Polarfläche, gebildet für einen beliebigen Punkt, durch jeden Doppelpunkt der zu Grunde gelegten Fläche einfach hindurch und besitzt in jedem dreifachen Punkt einen Doppelpunkt. Jeder Tangentenkegel 12. Ord. an unser Monoid besitzt demnach 6 Doppelkanten durch die Doppelpunkte und eine sechsfache Kante durch den dreifachen Punkt desselben. Der Tangentenkegel 6 Ord. aus einem Knotenpunkt besitzt in Folge dessen nur noch *fünf Doppelkanten* und *eine vierfache Kante.* Die zuletzt genannte Reduction tritt ein, weil ein solcher Tangentenkegel das gegebene Monoid längs einer der sechs Geraden durch den dreifachen Punkt berührt. Legt man durch die 5 Doppelkanten und eine beliebige weitere Kante des Tangentenkegels 6. Ord. einen Kegel 3. Ord., welcher die vierfache Kante zur Doppelkante hat, so hat derselbe mit jenem Kegel 6. Ord. $4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 = 19$ Kanten gemein, d. h. der Kegel 3. Ord. bildet einen Theil des Kegels 6. Ord., womit der obige Satz bewiesen ist.

20) Es giebt aber noch eine andere Fläche 4. Ord., welche ebenfalls die Eigenschaft besitzt, dass ihre Tangentenkegel aus den Knotenpunkten in zwei Kegel 3. Ord. zerfallen, nämlich *das Symmetroid**). Es soll nun gezeigt werden, dass *das Monoid* 4. *Ord. mit* 6 *beliebig gelegenen Knotenpunkten nichts Anderes ist, als ein specieller Fall des Symmetroids.* Zu diesem Zwecke werde ich kurz Einiges über das Symmetroid, wie es sich bei Cayley an den citirten Stellen findet, vorausschicken.

*) Cayley, A Memoir on Quartic Surfaces, Proc. of the Lond. Math. Soc. III, p. 19—69; Second Memoir on Quartic Surfaces, ebendaselbst p. 200.

Sind vier Flächen 2. Grades gegeben:

$$\sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_\varkappa a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0, \quad \sum b_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0,$$
$$\sum c_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0, \quad \sum d_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0,$$

so bestimmen dieselben ein Flächengebüsch:

$$\sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_\varkappa (\alpha a_{i\varkappa} + \beta b_{i\varkappa} + \gamma c_{i\varkappa} + \delta d_{i\varkappa}) x_i x_\varkappa = 0,$$

in welchem α, β, γ, δ beliebige Parameter bedeuten. In diesem Flächengebüsch giebt es doppelt unendlich viele Kegel; der Ort ihrer Scheitel wird von der *Jacobi'schen oder Kernfläche 4. Grades* der 4 Flächen 2. Grades gebildet. Die Bedingungsgleichung für die Kegel des Gebüsches ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} + \cdots, & \alpha a_{21} + \beta b_{21} + \cdots, & \alpha a_{31} + \beta b_{31} + \cdots, & \alpha a_{41} + \beta b_{41} + \cdots, \\ \alpha a_{12} + \beta b_{12} + \cdots, & \alpha a_{22} + \beta b_{22} + \cdots, & \alpha a_{32} + \beta b_{32} + \cdots, & \alpha a_{42} + \beta b_{42} + \cdots, \\ \alpha a_{13} + \beta b_{13} + \cdots, & \alpha a_{23} + \beta b_{23} + \cdots, & \alpha a_{33} + \beta b_{33} + \cdots, & \alpha a_{43} + \beta b_{43} + \cdots, \\ \alpha a_{14} + \beta b_{14} + \cdots, & \alpha a_{24} + \beta b_{24} + \cdots, & \alpha a_{34} + \beta b_{34} + \cdots, & \alpha a_{44} + \beta b_{44} + \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Fasst man hierin α, β, γ, δ als Coordinaten eines Raumpunktes auf, so stellt diese symmetrische Determinante eine Fläche 4. Ord. mit 10 Knotenpunkten*) dar, welche eindeutig auf die Kernfläche bezogen ist, und welche **Cayley** als Symmetroid bezeichnet. Ein solches Symmetroid hat die Eigenschaft, dass die *Tangentenkegel* 6. Ord. aus den Knotenpunkten in zwei Kegel 3. Ord.**) zerfallen.

21) Aus dem Symmetroid lassen sich aber eine Reihe anderer *Flächen ableiten, und wir* werden in dieser Abhandlung noch verschiedene dieser Flächen anzuführen Gelegenheit haben. Zunächst erkennt man, dass das Symmetroid in eine Fläche mit dreifachem Punkt und 6 Knotenpunkten übergeht, sobald man eine der zu Grund gelegten Flächen 2. Grades, etwa die erste, durch eine doppelt zählende Ebene ersetzt, d. h. sobald man in der Determinante Δ die $a_{i\varkappa}$ durch $a_i a_\varkappa$ ersetzt. Die so entstehende Fläche:

---

*) **Cayley**, a. a. O. p. 23.

) **Cayley, a. a. O. p. 200.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1^2 + \beta b_{11} + \cdots, & \alpha a_2 a_1 + \beta b_{21} + \cdots, & \alpha a_3 a_1 + \beta b_{31} + \cdots, & \alpha a_4 a_1 + \beta b_{41} + \cdots, \\ \alpha a_1 a_2 + \beta b_{12} + \cdots, & \alpha a_2^2 + \beta b_{22} + \cdots, & \alpha a_3 a_2 + \beta b_{32} + \cdots, & \alpha a_4 a_2 + \beta b_{42} + \cdots, \\ \alpha a_1 a_3 + \beta b_{13} + \cdots, & \alpha a_2 a_3 + \beta b_{23} + \cdots, & \alpha a_3^2 + \beta b_{33} + \cdots, & \alpha a_4 a_3 + \beta b_{43} + \cdots, \\ \alpha a_1 a_4 + \beta b_{14} + \cdots, & \alpha a_2 a_4 + \beta b_{24} + \cdots, & \alpha a_3 a_4 + \beta b_{34} + \cdots, & \alpha a_4^2 + \beta b_{44} + \cdots, \end{vmatrix} = 0$$

besitzt in der That den dreifachen Punkt: $\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 0 : 0 : 0$, da für dieses Werthsystem nicht nur die Determinante selbst, sondern auch alle ihre zweigliedrigen Unterdeterminanten verschwinden. Einen gewöhnlichen Knotenpunkt besitzt die Fläche in denjenigen Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für welche alle dreigliedrigen Unterdeterminanten verschwinden, d. h. für welche:

$$\sum \sum (\alpha a_i a_\varkappa + \beta b_{i\varkappa} + \gamma c_{i\varkappa} + \delta d_{i\varkappa})\, x_i x_\varkappa = 0$$

ein Ebenenpaar darstellt. Dann muss aber

$$\sum \sum (\beta b_{i\varkappa} + \gamma c_{i\varkappa} + \delta d_{i\varkappa})\, x_i x_\varkappa = 0$$

einen Kegel darstellen, dessen Scheitel in der Ebene $\Sigma a_i x_i = 0$ liegt. Solcher Kegel giebt es sechs, da die Scheitel aller Kegel, welche durch 8 feste Punkte gehen, auf einer Raumcurve 6. Ord. liegen.

Es ist noch zu zeigen, dass die obige Determinante auch das allgemeinste Monoid mit 6 Knotenpunkten darstellt. Dasselbe besitzt bei vorgegebenem dreifachen Punkte noch $34 - 10 - 6 = 18$ Constanten. In jener Determinante treten zwar noch 34 Constanten auf, sie lassen sich jedoch ebenfalls auf 18 reduciren, wenn wir die Determinante mit einer viergliedrigen Determinante von constanten Elementen multipliciren, wodurch wir 16 Constanten beseitigen können. Die Zahl der Constanten des Monoids stimmt also mit der Zahl der unabhängigen Constanten jener Determinante überein.

22) Bevor ich mich zu der zweiten Art von Monoiden mit 6 Knotenpunkten wende, will ich noch kurz einige specielle Fälle der vorliegenden Fläche erwähnen. Es können die Verbindungslinien des dreifachen Punktes mit den 6 Knotenpunkten auf einem Kegel 2. Grades liegen, dann zerfällt das Monoid in diesen Kegel und eine beliebige Fläche 2. Ord. durch die 7 singulären Punkte.

23) Eine andere Specialisirung tritt ein, wenn 4 von den 6 Knotenpunkten in einer Ebene liegen. Diese Ebene schneidet alsdann das Monoid in zwei Kegelschnitten; die Tangentialebenen in den Punkten dieser Kegelschnitte schneiden sich in je einem Punkt; diese beiden

Punkte liegen auf den Verbindungslinien des dreifachen Punktes mit dem fünften resp. sechsten Knotenpunkt.

24) Liegen von den 6 Knoten drei in einer Geraden, so liegt diese Gerade auf dem Monoid und besitzt eine constante Tangentialebene. Durch den dreifachen Punkt und je zwei der drei Knotenpunkte, die nicht auf der Geraden liegen, geht ein Kegelschnitt des Monoids; die Tangentialebenen in den Punkten desselben gehen durch einen festen Punkt auf der Geraden. Der Tangentialkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt auf der Geraden besteht hier aus zwei Kegeln 3. Ord. mit je einer Doppelkante durch den dreifachen Punkt, welche sich längs jener Geraden berühren. Bei vorgegebenen Singularitäten giebt es noch einfach unendlich viele solcher Flächen.

25) Liegen von den 6 Knotenpunkten 5 in einer Ebene, so müssen sie die Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes und zweier Geraden bilden. Diese beiden Geraden besitzen constante Tangentialebenen; die Tangentialebenen in den Punkten des Kegelschnitts umhüllen wie vorher einen Kegel 2. Ord. Der Tangentenkegel 6. Ord. aus demjenigen Knotenpunkte, durch welchen beide Geraden gehen, zerfällt in zwei Kegel 3. Ord. mit je einer Doppelkante durch den dreifachen Punkt, welche sich längs der beiden Geraden berühren. Die Berührungscurve eines solchen Kegels 3. Ord. ist eine ebene Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt. Für die Tangentenkegel aus den übrigen Knotenpunkten gilt Aehnliches wie im vorhergehenden Falle. Bei vorgegebenen Singularitäten giebt es noch doppelt unendlich viele solcher Flächen.

26) Liegen endlich alle 6 Knotenpunkte in einer Ebene, so dass sie die Schnittpunkte von 4 geraden Linien bilden, so sind alle 6 Knotenpunkte von gleicher Beschaffenheit. Die vier Geraden haben wiederum constante Tangentialebenen. Durch jeden Knotenpunkt als Scheitel gehen zwei Tangentenkegel 3. Ord., deren jeder in einer ebenen Curve 3. Ord. berührt; dieselben besitzen je einen Doppelpunkt im dreifachen Punkt der Fläche und gehen noch durch denjenigen Knotenpunkt hindurch, der mit dem Scheitel des zugehörigen Kegels nicht auf einer Geraden der Fläche liegt. Es giebt bei vorgegebenen Singularitäten noch vierfach unendlich viele solcher Flächen, so dass man die constanten Tangentialebenen in jenen vier Geraden noch beliebig fixiren kann. Die Gleichung einer solchen Fläche ist:

$$xyz(x+y+z)+w[\alpha yz(y+z)+\beta zx(z+x)+\gamma xy(x+y)+\delta xyz]=0.$$

Zweite Art. Monoide mit 6 Knotenpunkten auf einem Kegelschnitt.

27) Sie werden durch die Gleichung:

$$K^2-\varrho E\cdot F=0$$

dargestellt, wobei $K = 0$ einen Kegel 2. Ord., $F = 0$ einen Kegel 3. Ord. von gleichem Scheitel und $E = 0$ die Ebene der Knotenpunkte bedeutet. Der Tangentenkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt zerfällt hier in eine Ebene und einen Kegel 5. Ord., der die 5 übrigen Knotenpunkte enthält und eine vierfache Kante durch den dreifachen Punkt des Monoids schickt. Sind die singulären Punkte vorgegeben, so existiren ersichtlich *noch* vierfach unendlich viele solche Flächen.

Es giebt im Ganzen 21-fach unendlich viele Monoide mit 6 Knotenpunkten. Sie bestehen aus zwei ganz verschiedenen Arten, nämlich aus solchen Monoiden, welche als specieller Fall des Symmetroids anzusehen sind, und aus solchen, deren 6 Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen. Beide Arten enthalten je 21-fach unendlich viele Monoide; der Uebergang von Monoiden der *einen* Art zu solchen der *andern* Art kann nur durch einen doppelt zu zählenden Kegel 2. Ord. geschehen.

Als Specialfall ist das Monoid zu erwähnen, dessen Berührungskegelschnitt mit den 6 Knotenpunkten in ein Geradenpaar mit je drei Knoten zerfällt. Eine solche Fläche kann noch 6 gerade Linien besitzen, durch jeden Knotenpunkt eine, wie das überhaupt bei allen Monoiden mit 6 Knoten eintreten kann.

Einige Monoide mit biplanaren Knotenpunkten.

28) Wir haben bereits im ersten Capitel erwähnt, dass die 12 Hauptgeraden des Monoids als Schnittgeraden zweier Kegel $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ gewisse Bedingungen erfüllen müssen; besonders ist die zwölfte Gerade durch die elf übrigen mitbestimmt, und zwar durch eine lineare Gleichung. Genau dasselbe findet statt, wenn die Kegel sich berühren, osculiren, u. s. w., so dass von den Hauptgeraden 2, 3, u. s. w. gelegentlich zusammenrücken; nur muss alsdann die gegenseitige Lage der consecutiven Geraden bekannt sein; mit anderen Worten: man muss nicht nur die Lage der Geraden, sondern auch die Werthe der ersten, zweiten, u. s. w. gemeinsamen Differentialquotienten von u_3 und u_4 für diese Gerade kennen. Mit Hilfe der elliptischen Functionen kann man die diesbezüglichen Fragen auch noch lösen, wenn es überhaupt keine einfache Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ mehr giebt, d. h. wenn sich die Kegel, wo sie sich treffen, mindestens berühren. Allerdings ist die Gleichung zwischen den Coordinaten dieser Geraden nicht mehr so beschaffen, dass sie eine eindeutige Bestimmung *einer* Geraden durch die übrigen vermittelt, vielmehr wird diese Bestimmung vieldeutig. Aus dem Gesagten erhellt, dass es eine ziemlich verwickelte Aufgabe sein wird, die allgemeine Gleichung eines Monoids mit vorgegebenen singulären Punkten (gewöhnliche Knotenpunkte, Punkte B_3, B_4, ...) aufzustellen. Wir werden desshalb hier nicht

auf diese allgemeine Frage eingehen, sondern nur einige ganz specielle hierher gehörige Flächen anführen.

29) Das Monoid $wu_3 + g^4 = 0$, wo g einen linearen Ausdruck in x, y, z bezeichnet, besitzt drei biplanare Knotenpunkte B_4 in gerader Linie und längs dieser Geraden die constante Tangentialebene $w = 0$, welche die Fläche hyperosculirt längs der ganzen Geraden. Ist $g = 0$ speciell die Ebene, welche die 3 reellen Wendekanten des Kegels $u_3 = 0$ enthält, so giebt es durch jeden Knotenpunkt noch eine reelle Gerade und diese 3 Geraden liegen in einer Ebene. Der Tangentenkegel aus einem der Knotenpunkte zerfällt hier in die beiden singulären Ebenen und einen Kegel 4. Ord. mit dreifacher Kante.

Ein Monoid mit zwei biplanaren Knotenpunkten B_8 erhält man z. B. aus $wu_3 + g_1{}^2 g_2{}^2 = 0$, wenn man für $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ zwei Wendetangentialebenen des Kegels $u_3 = 0$ einsetzt.

30) Monoide mit einem biplanaren Knotenpunkte B_{12} giebt es drei verschiedene Arten. Die Gleichung $wu_3 + \varrho u_4 = 0$ stellt eine solche Fläche dar, wenn die beiden Kegel $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ zwölf *consecutive* Kanten gemein haben. Es liegen aber auf einem Kegel 3. Ord. $u_3 = 0$ noch 12 reelle Kanten, in denen ein Kegel 4. Ord. eine derartige Berührung eingehen kann, so dass der Kegel 3. Ord. noch ganz beliebig gewählt werden kann. Ebenso stellt $wu_3 + \varrho u_2{}^2 = 0$ ein Monoid mit einem B_{12} dar, wenn $u_2 = 0$ einen Kegel 2. Ord. bedeutet, der mit $u_3 = 0$ sechs *consecutive* Kanten gemeinsam hat; es giebt auf $u_3 = 0$ noch 7 reelle Kanten, in denen eine solche Berührung stattfinden kann. Endlich ist auch $wu_3 + g^4 = 0$ ein Monoid mit einem B_{12}, wenn $g = 0$ eine der drei reellen Wendetangentialebenen bedeutet. Das *erstgenannte* Monoid mit einem B_{12} erhält man als einen Specialfall des Monoids *erster* Art mit 6 conischen Knoten, indem man diese Knotenpunkte continuirlich verschiebt, bis sie einander unendlich nahe gerückt sind; diese Fläche besitzt demnach die daselbst angegebenen Eigenschaften, sie ist also insbesondere ein specielles Symmetroid. Das Monoid $wu_3 + \varrho u_2{}^2 = 0$ mit einem B_{12} ist ein specieller Fall des Monoids mit 6 conischen Knoten auf einem Kegelschnitte.

Die Gestalten der Monoide mit einem allgemeinen dreifachen Punkte.

31) In den beiden nächsten Capiteln soll eine vollständige Scheidung aller Monoide 4. Ord. mit einem allgemeinen dreifachen Punkt, soweit dieselben gestaltlich verschieden sind, durchgeführt werden, und wir wollen deshalb in diesem Capitel das zu einer solchen Scheidung nothwendige Material zu gewinnen suchen. Vorher ist es jedoch erforderlich, eine Definition für *gestaltlich gleiche Flächen* zu geben.

Diese Definition kann noch in verschiedener Weise aufgestellt werden. In der Functionentheorie betrachtet man zwei Flächen als gestaltlich gleich, wenn sie durch stetige Deformationen in einander übergeführt werden können, ganz einerlei ob die Uebergangsflächen sich durch algebraische Gleichungen darstellen lassen oder nicht. Eine solche Definition könnte man auch hier beibehalten, jedoch scheint dieselbe bei der Frage nach den Gestalten der durch eine algebraische Gleichung dargestellten Flächen nicht zweckmässig zu sein. Wir werden aus diesem Grunde die folgende Festsetzung*) treffen. *Zwei Flächen sind gestaltlich gleich, wenn sie durch stetige Aenderung der Constanten ihrer Gleichungen in einander übergeführt werden können, sodass während der ganzen Ueberführung niemals eine Singularität der Fläche verschwindet oder eine neue entsteht; wir wollen diese Aenderung kurz als stetige algebraische Aenderung bezeichnen.*

32) Betrachten wir nun die vierfach unendlich vielen Monoide, welche die nämlichen Hauptgeraden besitzen. Wir greifen irgend zwei aus diesen Monoiden heraus, sie schneiden sich ausser in den 12 Geraden noch in einer ebenen Curve 4. Ord. Jeder Strahl durch den dreifachen Punkt weist einem reellen Punkt der einen Fläche einen reellen Punkt der andern Fläche zu, einer ebenen Curve der einen Fläche entspricht eine ebene Curve der andern Fläche. Die beiden Monoide sind demnach perspectivisch auf einander bezogen; der gemeinsame dreifache Punkt ist das Centrum und die Ebene der gemeinsamen Curve 4. Ord. die Ebene der Perspective. Die Perspective ist völlig bestimmt, wenn ein Paar entsprechende Punkte gegeben sind; dadurch wird das der Perspective eigenthümliche Doppelverhältniss bestimmt. Ist das Doppelverhältniss gleich $+1$, so sind die beiden auf einander bezogenen Monoide identisch, ist es dagegen gleich -1, so sind die Monoide perspectivische Spiegelbilder von einander. Jede Perspective mit positivem Doppelverhältniss kann stetig in eine solche mit dem Doppelverhältniss $+1$, jede Perspective mit negativem Doppelverhältniss aber in eine solche mit dem Doppelverhältniss -1 übergeführt werden (die Grenzen 0 und ∞ darf das Doppelverhältniss nicht überschreiten, da dann die Perspective keine Bedeutung mehr hat). Bei positivem Doppelverhältniss der Perspective können also die Monoide stetig in einander übergeführt werden; bei negativem Doppelverhältniss lässt sich jedes Monoid in das perspectivische Spiegelbild des andern überführen. Die perspectivische Spiegelung lässt sich aber folgendermassen in eine gewöhnliche Spiegelung verwandeln. Man nimmt als Ebene der Perspective die unendlich ferne Ebene, dann liegen je zwei entsprechende Punkte gleich weit

*) Vergl. Klein, Math. Annalen: Flächen dritter Ordnung, Bd. VI, p. 560.

vom Centrum der Perspective ab; die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier sich entsprechender Monoide werden alle in dem gemeinsamen dreifachen Punkte halbirt. Dreht man eines dieser beiden Monoide um 180 Grad um irgend eine Axe durch den dreifachen Punkt, so wird dasselbe ein Spiegelbild des andern im gewöhnlichen Sinne; die spiegelnde Ebene geht durch den dreifachen Punkt und steht auf der Drehaxe senkrecht. Das Resultat fassen wir in den Satz zusammen: *Alle Monoide 4. Ord., welche die gleichen Hauptgeraden besitzen, zerfallen in zwei Gruppen. Die Monoide jeder Gruppe können durch stetige algebraische Aenderung in einander übergeführt werden, sie sind gestaltlich gleich; die eine Gruppe besteht aus den Spiegelbildern der andern Gruppe.*

33) Bei der gestaltlichen Discussion der Monoide kommt es also lediglich auf die Lage der 12 Hauptgeraden an, da alle Monoide mit gemeinsamen Hauptgeraden entweder direct oder nach vorgenommener Spiegelung gestaltlich gleich sind. Ist nun irgend eine Gruppirung der Hauptgeraden gegeben, wobei auch mehrere Geraden zusammenfallen können, so ändere man die Lage derselben stetig auf dem Kegel 3. Ord. so, dass sie immer durch einen Kegel 4. Ord. ausgeschnitten werden können. Wird bei dieser stetigen Lagenänderung darauf gesehen, dass Geraden, welche ursprünglich zusammenfielen, dieses auch auf ihrer ganzen Wanderung thun, und dass niemals zwei Geraden zusammenrücken, welche ursprünglich getrennt lagen, so sind die zugehörigen Monoide von *gleicher Gestalt*, abgesehen von einer etwaigen Spiegelung. Denn der stetigen Aenderung der 12 Hauptgeraden entspricht eine stetige Aenderung der Monoide; dabei bleiben die vorhandenen Singularitäten (Doppelpunkte, B_3, B_4, ...) erhalten, und es treten weder neue Singularitäten auf, noch tritt eine Erhöhung der bereits vorhandenen ein, da getrennte Geraden immer getrennt bleiben. Nach der Definition sind alsdann alle so aus einander abgeleiteten Monoide *gleich* hinsichtlich ihrer Gestalt.

34) Nach dem Vorstehenden sind wir im Stande zu erkennen, wann zwei Monoide mit gleichem Tangentialkegel im dreifachen Punkt von gleicher und wann sie von verschiedener Gestalt sind. Es erübrigt uns noch solche Monoide hinsichtlich ihrer Gestalt zu vergleichen, welche im dreifachen Punkte verschiedene Tangentialkegel besitzen. Dazu sei bemerkt, dass ein Kegel 3. Ord. nur eine einzige absolute Invariante besitzt, und dass alle Kegel von gleicher Invariante durch eine reelle lineare Transformation mit positiver Determinante in einander übergeführt werden können. Ein Kegel 3. Ord. kann nun *eintheilig* oder *zweitheilig* sein; alle *eintheiligen* Kegel können durch stetige algebraische Aenderung in einander übergeführt werden; Gleiches gilt für die *zweitheiligen* Kegel 3. Ord. Nun nehmen wir einen Kegel

3. Ord. mit 12 Geraden an, welche durch einen Kegel 4. Ord. ausgeschnitten werden und theilweise zusammenfallen können. Verwandelt man diesen Kegel durch stetige Aenderung in einen neuen Kegel 3. Ord., so können zugleich die 12 Geraden stetig in 12 Geraden des neuen Kegels von gleicher Gruppirung übergeführt werden. Und zwar kann man dies immer erreichen, ohne dass inzwischen einmal zwei getrennte Geraden zusammenfallen oder zwei sich ursprünglich deckende Geraden auseinander rücken; denn von den 12 Geraden wird nur verlangt, dass sie sich stetig ändern, im Uebrigen sind diese Aenderungen beliebig, nur die zwölfte Gerade ist durch die andern elf mitbestimmt.

Für die weiteren Betrachtungen genügt es also, Monoide 4. Ord. mit *eintheiligem* und solche mit *zweitheiligem* Tangentialkegel im dreifachen Punkt zu unterscheiden; dagegen sind weitere Unterscheidungen überflüssig. Wir wollen sie dementsprechend kurz als *eintheilige und zweitheilige Monoide* bezeichnen. Um alle von einander verschiedenen Gestalten zu erhalten, genügt es, wie wir soeben gesehen haben, für die eintheiligen sowie für die zweitheiligen Monoide einen ganz bestimmten Tangentialkegel im dreifachen Punkte anzunehmen.

35) Die Frage nach allen gestaltlich verschiedenen zweitheiligen Monoiden deckt sich mit der Frage nach allen Gruppen von 12 Hauptgeraden auf einem zweitheiligen Kegel 3. Ord., welche nicht in der oben angegebenen Weise stetig ineinander übergeführt werden können; ganz analog ist es bei den eintheiligen Monoiden. Zur bequemeren Beantwortung dieser letzteren Frage mag hier noch Folgendes stehen. Wir gehen von einem ganz bestimmten zweitheiligen Kegel 3. Ord. aus, das zugehörige elliptische Integral bezeichnen wir mit u und seine Perioden mit ω und $i\omega'$. Dann können wir auf dem paaren sowie auf dem unpaaren Kegelmantel eine positive und eine negative Bewegungsrichtung unterscheiden, je nachdem die Parameter der erzeugenden Geraden bei der Bewegung zu- oder abnimmt. Sind nun auf dem paaren Mantel λ Geraden gelegen, von denen auch mehrere zusammenfallen können, und ist die Summe ihrer Parameter congruent Null modulo Perioden, so kann man es durch eine stetige Verschiebung der Geraden, bei welcher die Parametersumme beständig congruent Null bleibt und die Reihenfolge der Geraden nicht geändert wird, erreichen, dass die λ Geraden einander beliebig nahe rücken und dass eine beliebige unter ihnen zur ersten Geraden wird, d. h. den kleinsten Parameter erhält. Zu diesem Ende bewegt man diejenige Gerade, welche zur ersten werden soll, auf dem Kegelmantel in positiver Richtung bis in die unmittelbare Nähe der zweiten, dann bewegt sich gleichzeitig eine Gerade, etwa die letzte, in negativer Richtung, also gegen die vorletzte hin, da die Summe der Parameter constant

bleiben soll. Jetzt bewegt man die erste Gerade sammt der zweiten bis in die Nähe der dritten, hierauf die drei Geraden bis in die Nähe der vierten u. s. w.; indessen bewegt sich die letzte Gerade bis in die Nähe der vorletzten, beide bis in die Nähe der drittletzten u. s. w., bis schliesslich alle λ Geraden sich an einer und derselben Stelle des paaren Kegelmantels zusammendrängen. Die Stelle, wo ein solches Zusammendrängen der λ Geraden stattfindet, muss ersichtlich eine der Kanten $m\frac{\omega}{\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$ sein, wenn m eine der Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda$ bedeutet. Ein ganz analoges Resultat lässt sich für den unpaaren Mantel eines Kegels 3. Ord. gewinnen, ganz abgesehen davon, ob derselbe einem *eintheiligen* oder *zweitheiligen* Kegel angehört.

Monoide ohne Knotenpunkte; $u_3 = 0$ ein allgemeiner Kegel 3. Ordnung.

36. Wir haben bereits im vorigen Capitel die Monoide in *eintheilige* und *zweitheilige**) geschieden, je nachdem der Tangentialkegel im dreifachen Punkt ein- oder zweitheilig ist. Zunächst werden wir nun die zweitheiligen Monoide einer gestaltlichen Untersuchung unterwerfen, auf die eintheiligen Monoide wird sich dieselbe alsdann leicht übertragen lassen. Liegen von den 12 Hauptgeraden des Monoids 2λ auf dem paaren Mantel 2μ auf dem unpaaren Mantel und sind 2ν conjugirt imaginär, wobei auch eine oder zwei Zahlen gleich Null sein können, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass die Summe der Parameter der 2λ Geraden des paaren Mantels für sich und ebenso der 2μ Geraden des unpaaren Mantels für sich congruent Null ist. Denn man kann den allgemeinen Fall durch stetige Verschiebung der Geraden immer auf jenen Fall zurückführen, so dass bei dieser Verschiebung getrennte Geraden stets getrennt bleiben und die Summe aller 12 Parameter beständig congruent Null ist; eine derartige Operation hat aber, wie wir in Nr. 33 gesehen haben, keinen Einfluss auf die Gestalt des Monoids.

37) Hier handelt es sich um Monoide ohne Knotenpunkte, d. h. um Monoide, deren Hauptgeraden sämmtlich von einander getrennt liegen. Nach Nr. 36 und Nr. 35 kann man aber jedes Monoid in ein gestaltlich gleiches verwandeln, dessen reelle Hauptgeraden sich theilweise an einer Kante des paaren und theilweise an einer Kante des unpaaren Mantels zusammendrängen; und zwar ist es auf dem paaren Mantel eine der Kanten: $m\frac{\omega}{2\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$ und auf dem unpaaren eine der Kanten: $n\frac{\omega}{2\mu}$ $(m = 1, 2, \ldots, 2\lambda;\ n = 1, 2, \ldots, 2\mu)$. Da

*) Es soll hiermit durchaus nicht gesagt sein, dass ein solches Monoid aus zwei getrennten Theilen besteht.

aber im vorliegenden Falle die 2λ Geraden des paaren Mantels alle von einander getrennt sind, so kann man dieselben, je nachdem man die eine oder die andere von ihnen zur ersten Geraden macht, an jeder der 2λ Stellen $m\frac{\omega}{2\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$ anhäufen, also etwa an der Stelle $\frac{i\omega'}{2}$. Ebenso lassen sich die Geraden des unpaaren Mantels immer an der Stelle 0 anhäufen. Daraus folgt aber unmittelbar, dass alle zweitheiligen Monoide ohne Knotenpunkte gestaltlich gleich sind, wenn sie in den Zahlen 2λ, 2μ und 2ν übereinstimmen, dass sie aber gestaltlich verschieden sind, wenn dieses nicht der Fall ist. Denn im ersteren Falle kann man zunächst die imaginären Geraden der Monoide zur Deckung bringen und dann auch die reellen Geraden.

Nur wenn alle Geraden imaginär sind, lässt sich dieses nicht mehr erreichen, vielmehr giebt es in diesem Falle noch zwei verschiedene Arten von Monoiden. Die Parameter von conjugirt imaginären Geraden sind nämlich selbst conjugirt imaginär; bezeichnen wir sie mit $a_\varkappa + ib_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, 6$, so ist $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \pmod{\omega}$. Je nachdem nun $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \pmod{2\omega}$ oder $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv \omega \pmod{2\omega}$, erhält man gestaltlich verschiedene Monoide: denn der eine Fall kann nicht stetig in den andern übergeführt werden, da dieses eine Aenderung *einer* der Grössen $a_\varkappa$ um $\frac{\omega}{2}$ erfordert.

38) Ueber diese Monoide mit 12 imaginären Hauptgeraden soll sofort noch Einiges gesagt werden. Lässt man die 12 imaginären Geraden paarweise zusammenrücken, so erhält man ein Monoid mit 6 imaginären Knotenpunkten; und zwar liegen die Knotenpunkte im Falle $\sum 2a_\varkappa \equiv \omega \pmod{2\omega}$ beliebig und das Monoid ist *erster Art*, im entgegengesetzten Falle liegen sie auf einem Kegelschnitt und das Monoid ist *zweiter Art*.

Bei den Monoiden mit drei Paar conjugirt imaginären Knotenpunkten, welche auf einem Kegelschnitte liegen, berührt die Ebene des Kegelschnitts das Monoid längs desselben. Zieht man also in dieser Ebene eine Gerade, welche den Kegelschnitt nicht trifft, und legt durch diese Gerade zwei Ebenen, welche jener benachbart sind aber zu verschiedenen Seiten liegen, so wird die *eine* Ebene das Monoid in zwei in einander liegenden Ovalen (Gürtelcurve), die *andere* aber dasselbe gar nicht schneiden. Es giebt also bei dieser Art von Monoiden Ebenen, welche dasselbe überhaupt nicht treffen. Mit Hilfe der Gesetze der Continuität lässt sich dann zeigen, dass die Monoide ohne Knotenpunkte mit 12 imaginären Geraden in 2 Classen mit folgenden Eigenschaften zerfallen. Die Monoide der einen Classe, für welche $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv \omega \pmod{2\omega}$ ist, werden von jeder Ebene in einer reellen Curve geschnitten, während bei den Monoiden der andern Classe, für welche $\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \pmod{2\omega}$ ist, Ebenen existiren, welche dasselbe nicht in reellen Curven schneiden. Wir werden alsbald noch einmal darauf zurückkommen.

39) Nachdem so das nöthige Material zur gestaltlichen Discussion der *zweitheiligen* Monoide gewonnen ist, ist es ein Leichtes auch die *eintheiligen* Monoide in dieser Richtung zu behandeln. Das elliptische Integral eines eintheiligen Kegels 3. Ord. besitzt die Perioden*) ω und $\frac{\omega + \omega' i}{2}$; die reellen Integralwerthe bilden die Parameter der Erzeugenden des reellen Mantels; conjugirt imaginäre Integralwerthe gehören conjugirt imaginären Geraden zu. Die Fälle, wo die 12 Hauptgeraden des Monoids alle reell sind, oder wo sie theilweise reell und theilweise imaginär sind, erledigen sich genau wie beim zweitheiligen Monoid, nur dass hier bloss *ein* reeller Mantel des Tangentialkegels existirt. Der Fall, wo die 12 Hauptgeraden paarweise conjugirt imaginär sind, liefert bei den eintheiligen Monoiden nur noch eine einzige Flächenart, da die Bedingungen

$$\sum_1^6 2a_\varkappa \equiv 0 \pmod{2\omega} \quad \text{und} \quad \sum_1^6 2a_\varkappa \equiv \omega \pmod{2\omega}$$

nicht mehr von einander verschieden sind. Denn ändert man $a_1 + ib_1$ um die Periode $\frac{\omega + i\omega'}{2}$ und $a_1 - ib_1$ und die Periode $\frac{\omega - i\omega'}{2}$, was man ja immer darf, so sind die so gebildeten neuen Werthe wieder conjugirt imaginär, aber ihre Summe hat sich nur um ω geändert, so dass jene Bedingungsgleichungen in einander übergehen.

40) Wir haben in Nr. 32 gesehen, dass alle Monoide, welche die 12 Hauptgeraden gemeinsam haben, in zwei Gruppen zerfallen; die Monoide jeder Gruppe sind unter sich gestaltlich gleich, die eine Gruppe besteht aus den Spiegelbildern der andern Gruppe. Es soll nun bewiesen werden, dass die Monoide ohne Knotenpunkte mit ihren Spiegelbildern von gleicher Gestalt sind. Geht man nämlich von einem beliebigen Monoid ohne Knotenpunkte aus, so kann man dasselbe stetig so ändern, dass der Tangentialkegel im dreifachen Punkt durch passende Spiegelung in sich selbst übergeht. Ferner kann man es durch weitere stetige Aenderung im früheren Sinne

*) Harnack, Math. Annalen Bd. IX, p. 18.

offenbar dahin bringen, dass die 12 Hauptgeraden symmetrisch zur spiegelnden Ebene liegen, und endlich kann man es erreichen, dass das Monoid selbst symmetrisch zu dieser Ebene liegt. Wenn aber ein Monoid in sich selbst gespiegelt werden kann, so ist jedes daraus durch Continuität abgeleitete Monoid mit seinem Spiegelbild von gleicher Gestalt und somit unsere Behauptung erwiesen. Daraus folgt denn weiter, *dass alle Monoide ohne Knotenpunkte, welche in ihren Hauptgeraden übereinstimmen, von gleicher Gestalt sind;* und allgemeiner, *dass alle Monoide ohne Knotenpunkte, welche in der Zahl ihrer reellen Geraden und deren Vertheilung auf den paaren und unpaaren Mantel des Kegels 3. Ord. übereinstimmen, von gleicher Gestalt sind.*

41) Man erhält gemäss diesen Auseinandersetzungen 36 verschiedene Monoide mit allgemeinem dreifachen Punkt und ohne Knotenpunkte; davon sind 29 *zweitheilig* und 7 *eintheilig*. Die sieben eintheiligen Monoide sind dadurch charakterisirt, dass von den 12 Hauptgeraden resp. 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0 Geraden reell sind. Bei den zweitheiligen Monoiden kommt es noch darauf an, wie viele von den reellen Geraden auf dem paaren und wie viele auf dem unpaaren Mantel des Kegels 3. Ord. liegen. Je nachdem 12, 10, 8, 6, 4 oder 2 Geraden reell sind und jenachdem sie sich auf den paaren und den unpaaren Kegelmantel vertheilen, erhält man 27 verschieden gestaltete Monoide. Dazu kommen noch zwei verschiedene zweitheilige Monoide ohne reelle Geraden, und hiermit sind alle Möglichkeiten erschöpft.

42) *Versuchen wir es jetzt, uns ein klares Bild von den einzelnen hier aufgezählten Monoiden zu entwerfen.* Wir beginnen mit den beiden *zweitheiligen* Monoiden ohne reelle Geraden, ein einfacher Process wird uns dann aus diesen Flächen alle übrigen abzuleiten gestatten.

Die Osculationsebenen des Tangentialkegels im dreifachen Punkt bilden ein Dreiflach oder eine körperliche Ecke, die durch eine reelle lineare Transformation mit positiver Determinante in eine gleichwinklige Ecke verwandelt werden kann. Die Gerade, in der sich die Winkel halbirenden Ebenen dieser Ecke schneiden, wollen wir dann als die Axe der Ecke bezeichnen, sie kann zugleich als die Axe des Kegels 3. Ord. aufgefasst werden; jede Ebene senkrecht zur Axe schneidet den Kegel in einer Curve 3. Ord. von der in Figur 1 verzeichneten Gestalt. Denken wir uns die Axe vertical gestellt und legen wir durch dieselbe verschiedene Ebenen. Jede solche Ebene schneidet ein zu dem Tangentialkegel 3. Ord. gehöriges Monoid in einer Curve 4. Ord. mit dreifachem Punkte, deren drei Tangenten in diesem Punkte jenem Kegel angehören. Die Curven 4. Ord. können aber hier zwei wesentlich verschiedene Gestalten besitzen, sowie sie in Figur 2 und 3 angegeben sind. Es wird nicht überflüssig sein zu bemerken, dass die einzelnen Curventheile auch durch's Unendliche gehen können, wie in den Figuren 5α und 6α; jedoch ist das unendlich Ferne, da es durch Projection in's Endliche gerückt werden kann, hierbei nicht von Belang. Das Charakteristische der beiden Curven besteht ersichtlich darin, dass die Curve 3 von jeder Geraden in reellen Punkten getroffen wird, während dieses bei den Curven 2 und 5α oder 6α nicht der Fall ist. Die Curve 3 verläuft desshalb stets durch's Unendliche, die Curve 2 oder 5α oder 6α kann dagegen stets in's Endliche gebracht werden; wir bezeichnen in Folge dessen *jene Curven 4. Ord. kurz als unendliche und diese als endliche Curven.*

Lassen wir nun eine Ebene um die verticale Axe sich drehen, so wird die Schnittcurve in dieser Ebene sich stetig ändern, indem die Tangenten a, b und c auf dem Tangentialkegel fortrücken. Die Tangenten a und b liegen auf dem *paaren*, die Tangente c auf dem *unpaaren* Kegelmantel, so dass nach einer Drehung der Ebene um 180 Grad die Tangente a in b und b in a, die Tangente c aber in sich übergeht.

43) Wir haben es hier mit Monoiden ohne reelle Geraden zu thun, ist also die Schnittcurve einer Ebene durch die Axe eine *endliche* Curve 4. Ord., so bleibt sie bei der Drehung der Ebene um die Axe stets eine endliche Curve. Denn die endliche und unendliche Curve 4 Ord. mit dreifachem Punkt können nur dadurch in einander übergehen, dass sie in eine Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt und eine Gerade durch diesen degeneriren. Ebenso wird die Schnittcurve in jeder Ebene durch die Axe eine *unendliche* sein, wenn sie es in irgend *einer* solchen Ebene ist. Auf diese Weise ergeben sich zwei wesentlich verschiedene Monoide ohne reelle Geraden; das eine wird von jeder Ebene durch die verticale Axe in einer *endlichen*, das andere in einer *unendlichen* Curve 4. Ord. geschnitten. Zur Unterscheidung sprechen wir von *einem endlichen und einem unendlichen**) *Monoid ohne reelle Geraden;* es deckt sich diese Unterscheidung offenbar mit derjenigen in Nr. 38.

Bedenkt man, dass das *endliche* Monoid von jeder Ebene durch die Axe in einer Curve, wie sie Figur 2 zeigt, geschnitten wird, so erkennt man, dass dasselbe aus zwei getrennten Flächentheilen besteht, welche nur in dem dreifachen Punkt aneinander stossen. *Der eine Theil hat eine tropfenförmige Gestalt, der andere eine trichterförmige;* beide Theile können natürlich noch Ausbuchtungen besitzen.

*) In der Topologie der Flächen spricht man von unpaaren und paaren Flächen; die letzteren theilt man weiter in Flächen ein, auf denen sich unpaare Curven ziehen lassen, und in solche, bei denen dies nicht der Fall ist, was ich hier durch *endlich* und *unendlich* bezeichnet habe. Vergl. Klein, Math. Annal. Bd. VI, p. 577 f.

Aus Figur 3 erkennt man, dass auch das *unendliche* Monoid aus zwei Theilen besteht, nämlich aus *einem endlichen tropfenförmigen und aus einem unendlichen Flächentheil*, dessen ungefähre Form man durch Rotation der Curve in Figur 3 um die Axe erhält.

Aus dem *endlichen zweitheiligen* Monoid erhält man das *eintheilige* Monoid ohne reelle Geraden, wenn man den tropfenförmigen Theil sich völlig zusammenziehen und dann die trichterförmige Vertiefung nach dem dreifachen Punkt der Fläche etwas von diesem zurückweichen lässt; jede Ebene durch die Axe schneidet eine Curve aus, wie sie Figur 4 zeigt. Durch eine analoge Operation kann man dieses eintheilige Monoid auch aus dem *unendlichen zweitheiligen* Monoid erhalten. *Das eintheilige Monoid ohne reelle Geraden ist demnach stets endlich und besteht aus einem einzigen Flächentheil.*

44) Wir verlassen jetzt die Monoide ohne reelle Geraden und wenden uns den *Monoiden mit reellen Geraden* zu und zwar zunächst den *zweitheiligen* Flächen dieser Art. Wiederum lassen wir eine Ebene sich um die schon oben definirte Axe drehen und untersuchen die Schnittcurve dieser Ebene mit der Fläche. So oft die Ebene bei ihrer Drehung eine Gerade des Monoids passirt, zerfällt die Schnittcurve 4. Ord. in diese Gerade und eine Curve 3. Ord., welche als Uebergangsstadium der *endlichen* Curve in die *unendliche* — und umgekehrt — aufzufassen ist. Die Gerade, welche sich von der Schnittcurve abtrennt, fällt mit einer der drei Tangenten a, b oder c zusammen, und der diese Tangente berührende Ast der Curve 4. Ord. kehrt beim Durchgang durch die Uebergangscurve seine Krümmungsrichtung um. Man kann desshalb eine Ebene durch die Axe immer so legen, dass die beiden Aeste, welche die Tangente a resp. b berühren, der Axe ihre concave Seite zukehren. Geht man von einer solchen Ebene aus, so hat die Schnittcurve die in Figur 2 resp. 3 verzeichnete Gestalt. Wir wollen nun die Aenderungen untersuchen, die diese Curve erfährt, wenn man die Ebene der Curve um die verticale Axe dreht, so dass sie die Geraden des Monoids der Reihe nach passirt. Die Geraden des Monoids können nun auf dem paaren oder auf dem unpaaren Mantel des Tangentialkegels liegen, und wir müssen dementsprechend zwei verschiedene Fälle unterscheiden.

45) Angenommen es liegen *zwei* Geraden auf dem *paaren* Mantel; wir gehen alsdann von der Figur 2 aus oder der Bequemlichkeit halber von der Figur 5α, in welcher die Schleife bereits durch's Unendliche gezogen ist. Das Monoid, dem diese Curve angehört, mag aus irgend einem Material, etwa Gyps, hergestellt sein; desshalb ist der Schnitt, soweit er durch den Gyps geht, schraffirt, um so die Vorstellung zu erleichtern. Dreht man die Ebene um die verticale Axe, so geht die Schnittcurve 5α continuirlich in 5β, und dann in 5γ über, um bei

weiterer Drehung abermals die Phase 5β und dann 5α zu durchlaufen. Hiermit ist der Cyklus aller Phasen, welche sich bei einer continuirlichen Drehung um 180 Grad ergeben, geschlossen. Das Ergebniss lässt sich kurz zusammenfassen. Der trichterförmige Theil B und der tropfenartige Theil A, welche bei dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden existiren, hängen hier an der Stelle C zusammen, während sie vorher getrennt waren. *Aus dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden erhält man das Monoid mit zwei reellen Hauptgeraden auf dem paaren Kegelmantel, wenn man den trichterförmigen und den tropfenförmigen Flächentheil an einer Stelle durchs Unendliche hindurch zusammenwachsen lässt.* Zu ganz derselben Fläche muss man gelangen und gelangt man, wenn man bei dem *unendlichen* Monoid ohne reelle Geraden die beiden Flächentheile an einer Stelle zusammenwachsen lässt. Denn alle Monoide mit nur zwei reellen Geraden auf dem paaren Kegelmantel sind gestaltlich gleich.

46. Angenommen, es liegen *zwei* Geraden auf dem *unpaaren* Mantel, und gehen wir auch hier von der Figur 2 aus, die wir bequemer in der Gestalt 6α voraussetzen. Eine Drehung der Ebene um die verticale Axe liefert hier der Reihe nach die Phasen 6α, 6β, 6γ, 6β, 6α, womit hier der Cyklus geschlossen ist. Es hängt hier der trichterförmige Theil B — der allerdings hier kaum mehr seinen Namen verdient — mit sich selbst zusammen. Mit anderen Worten: *Aus dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden entsteht das Monoid mit zwei reellen Hauptgeraden auf dem unpaaren Kegelmantel, wenn man den trichterförmigen Theil durchs Unendliche hindurch mit sich selbst an einer Stelle C zusammenwachsen lässt.* Dieselbe Fläche würde man auch erhalten, wenn man von dem *unendlichen* Monoid ohne reelle Geraden ausginge und den unendlichen Flächentheil an einer Stelle mit sich selbst zusammenwachsen liesse.

47. Angenommen endlich es liegen $2\varkappa$ Geraden auf dem *paaren* und 2λ Geraden auf dem *unpaaren* Mantel des Kegels 3. Ord., so erhält man die Gestalt eines zugehörigen Monoids auf folgende Weise: *Man gehe von dem endlichen Monoid ohne reelle Geraden aus, lasse den tropfenförmigen Theil an $\varkappa$ Stellen mit dem ringförmigen Theil und diesen letzteren an λ Stellen mit sich selbst durchs Unendliche zusammenwachsen, so erhält man ein Bild von der Gestalt unserer Fläche.* Dass das Gesagte seine Richtigkeit hat, überlegt sich der Leser leicht selbst, ich unterlasse es hier diese so einfachen Betrachtungen auszuführen.

Das Gesagte bezog sich immer auf zweitheilige Monoide und kann mit ganz geringen Modificationen auf eintheilige Monoide übertragen werden; es ist überflüssig hier darauf einzugehen.

Monoide mit Knotenpunkten; $u_3 = 0$ ist ein allgemeiner Kegel 3. Ordnung.

48. Im weiteren Verlauf dieser Abhandlung wird sich zeigen, *dass man alle Monoide mit beliebigen Singularitäten*, sei es, dass dieselben vom dreifachen Punkt getrennt auftreten, sei es, dass dieser sich selbst complicirt, *aus den Monoiden ohne Knotenpunkte durch gewisse einfache Operationen ableiten kann*. Um diese Operationen leicht ausführen zu können, ist es nöthig näher auf die *Topologie der Monoide ohne Knotenpunkte* einzugehen; dieselbe wird zugleich dazu dienen, die Gestalt dieser Monoide noch deutlicher hervortreten zu lassen. Ich knüpfe meine Betrachtungen an die Topologie der Ringflächen an, wie sie in der Lehre vom Zusammenhang der Flächen benutzt werden. Eine solche Ringfläche mit mehreren Oeffnungen stellt Figur 7 dar, sie besitzt die vier äusseren Oeffnungen A, B, C, D. Auf derselben ziehen wir die Curven 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, welche ein geschlossenes System bilden und die Eigenschaft haben, dass jede Curve ihre beiden Nachbarcurven in nur *einem* Punkte schneidet; ein derartiges Curvensystem wollen wir als eine *Kette von Curven* bezeichnen. Jeder dieser Curven entspricht eine Oeffnung der Ringfläche, und zwar entsprechen den Curven 1, 3, 5, 7 die vier äusseren Oeffnungen und den Curven 2, 4, 6, 8 vier innere Oeffnungen der Ringfläche; ein solches zusammenhängendes System von Oeffnungen bezeichnen wir analog als eine *Kette von Oeffnungen*. Zieht man eine der Curven und somit eine der Oeffnungen zusammen, so entsteht ein Knotenpunkt.

Betrachten wir jetzt irgend eines unserer Monoide, um ein bestimmtes Bild vor Augen zu haben etwa das Monoid mit 8 Hauptgeraden auf dem paaren Mantel und 4 Hauptgeraden auf dem unpaaren Mantel des Tangentialkegels 3. Ord., so finden wir da ganz analoge Verhältnisse. Eine beliebige Ebene schneidet den Tangentialkegel in einer Curve 3. Ord., vergl. Figur 8, und die 12 Hauptgeraden des Monoids in den 12 Punkten $A, B, C, \ldots, M$. Zieht man in dieser Ebene die Curven 1, 2, 3,..., 12, welche sich in den Punkten $A, B, C, \ldots$ berühren, und macht man dieselben zu Leitcurven von 12 Kegeln, deren gemeinschaftlicher Scheitel im dreifachen Punkt des Monoids liegt, so schneiden diese Kegel das Monoid in zwölf Curven von folgenden Eigenschaften: Jede Curve ist für sich geschlossen und passirt den dreifachen Punkt des Monoids nicht; zwei benachbarte Curven schneiden sich nur in einem einzigen Punkt, derselbe liegt auf einer Hauptgeraden und bestimmt sich durch die gemeinsame Tangente der bezüglichen Leitcurven. Wir erhalten also hier *Ketten* aneinanderhängender Curven ganz ebenso wie oben bei der Ringfläche; so bilden die Curven 1, 2, ..., 8 eine Kette und ebenso die Curven

9, 10, 11, 12. Jeder Curve entspricht eine Durchbrechung oder Oeffnung des Monoids, wir erhalten also auch *zwei Ketten von Oeffnungen*. Durch Zusammenziehen solcher Oeffnungen entstehen aus den Monoiden ohne Knotenpunkte die Monoide mit Knotenpunkten.

49. In einem früheren Capitel hatten wir gefunden, dass ein Monoid einen Knotenpunkt bekommt, sobald zwei von seinen 12 Hauptgeraden zusammenrücken. Dasselbe folgern wir aus den Betrachtungen der vorigen Nummer, da durch das Zusammenrücken zweier Geraden eine der dort construirten geschlossenen Curven sich zusammenzieht und so ein Knotenpunkt entsteht ganz analog dem Vorgang bei der Ringfläche. Wir haben an der citirten Stelle weiter gesehen, dass durch Zusammenrücken von 3, 4, 5, ..., 12 Geraden ein biplanarer Knotenpunkt von der Ordnung 3, 4, 5, ..., 12 entsteht. Wie ein solcher Knotenpunkt sich gestaltlich wirklich entwickelt, können wir jetzt leicht verfolgen. In voriger Nummer haben wir eine Reihe von Curven auf dem Monoid construirt, die aneinander hängen und von denen jede zwei auf einanderfolgende Hauptgeraden der Fläche ein Mal schneidet. Rücken also $\varkappa$ Geraden zusammen, so ziehen sich $(\varkappa - 1)$ Curven der Kette zusammen und es ziehen sich demgemäss $(\varkappa - 1)$ kettenartig aneinanderhängende Oeffnungen des Monoids zusammen; auf diese Weise entsteht der biplanare Knotenpunkt $\varkappa$. Die gleiche Entstehungsweise hat bei allen biplanaren Knotenpunkten von der Ordnung $\varkappa$ auf einer ganz beliebigen Fläche*) statt, wie man ohne Weiteres daraus schliessen kann, dass die Projection der Umgebung eines biplanaren Knotenpunktes durch eine Curve mit Spitze oder Selbstberührungspunkt von der Ordnung $\varkappa$ dargestellt wird. Da uns nun die Gestalten der Monoide ohne Knotenpunkte alle bekannt sind, so können wir unmittelbar die Gestalten aller Monoide mit Knotenpunkten erschliessen, indem wir nur die geeigneten Oeffnungen zusammenziehen; eine Beschreibung dieser Gestalten kann desshalb unterbleiben.

50. Dagegen bleibt auch hier noch die Frage zu erledigen, welche Monoide sind gestaltlich gleich, d. h. welche Monoide können *algebraisch stetig* in einander übergeführt werden. Sicherlich erfordern zwei gestaltlich gleiche Monoide die Uebereinstimmung sowohl der Anzahl der Hauptgeraden auf dem paaren als auch der der Hauptgeraden auf dem unpaaren Mantel des Kegels 3. Ord. Wir bezeichnen erstere Zahl wie früher mit 2λ letztere mit 2μ, wo $2\lambda + 2\mu \leqq 12$ ist, und zerlegen diese Zahlen in beliebiger Weise in Summanden. Jedem Summanden $\varkappa$ entspricht ein Knotenpunkt von der Ordnung $\varkappa$;

*) Dieser Gedanke ist nicht neu, er findet sich bereits bei Rodenberg in der Beschreibung seiner Modelle von Flächen 3. Ordn. vor. (Verlag von L. Brill, Darmstadt).

die Reihenfolge der Summanden soll dabei genau nach der Reihenfolge der bezüglichen Geraden auf dem paaren resp. unpaaren Kegelmantel *geordnet* werden. Bei zwei gestaltlich gleichen Monoiden müssen dann offenbar auch die Summanden sowie ihre Reihenfolge übereinstimmen, da dieselbe durch stetige Aenderung des Monoids nicht geändert werden kann.

Sind die soeben genannten Bedingungen nothwendig, so sind sie doch nicht hinreichend und es bleibt uns noch zu untersuchen, inwiefern zwei Monoide, welche in den genannten Stücken übereinstimmen, sich gestaltlich unterscheiden können. Gehen wir von zwei bestimmten Zahlen 2λ und 2μ aus, und nehmen wir auch ihre Summanden und deren cyklische Reihenfolge als gegeben an; machen wir endlich in jedem Cyklus einen bestimmten Summanden zum ersten. Dann kann man jedes hierzu gehörige Monoid nach den Auseinandersetzungen der Nr. 36 *und* Nr. 35 durch stetige algebraische Aenderung in ein neues verwandeln, dessen Hauptgeraden, soweit sie auf dem paaren Mantel liegen, alle in der Nähe der Kante $m\frac{\omega}{2\lambda}+\frac{i\omega'}{2}$, und soweit sie auf dem unpaaren Mantel liegen, alle in der Nähe der Kante $n\frac{\omega}{2\mu}$ sich befinden, während die dem ersten Summanden entsprechende Gerade den kleinsten Parameter erhält. Dabei bedeutet m eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2\lambda-1$ und n eine Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2\mu-1$.

Stimmen für zwei Monoide auch noch die Zahlen m und n überein, so sind sie sicher gestaltlich gleich, stimmen sie nicht überein und können sie auch nicht in Uebereinstimmung gebracht werden, so sind sie gestaltlich verschieden.

51. Aus einem Monoide mit den Zahlen m und n kann, wie man leicht erkennt, durch stetige Aenderung ein Monoid mit den Zahlen $m\pm p$ und $n\mp p$ abgeleitet werden, worin p irgend eine ganze Zahl bedeutet. Ferner kann aus einem Monoid mit reellen und imaginären *Hauptgeraden mit den Zahlen m und n ein Monoid* mit den Zahlen $m+2p$ und $n+2q$ abgeleitet werden, wobei p und q beliebige ganze Zahlen sind. Daraus folgt:

Monoide mit Knotenpunkten, welche in den Zahlen 2λ und 2μ, deren Summanden und der Reihenfolge dieser Summanden übereinstimmen, lassen sich auf zwei Gestalten reduciren, falls nicht alle Hauptgeraden reell sind. Es sind nämlich alle Monoide gestaltlich gleich, für welche m und n gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sind, ebenso alle Monoide, für welche dieses nicht der Fall ist.

Besitzt das Monoid nur reelle Geraden, so sind noch folgende Fälle zu unterscheiden. Ist: $2\lambda=12$, $2\mu=0$, so giebt es noch vier verschiedene Monoide, nämlich: $m=1, 5, 9$, resp. $2, 6, 10$, resp. $3, 7,$

11, resp. 4, 8, 12; in gleicher Weise erledigt sich der Fall $2\lambda = 0$, $2\mu = 12$. Ist $2\lambda = 10$, $2\mu = 2$, so giebt es nur zwei verschiedene Monoide, nämlich: $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ und $n = 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2$ resp. $m = 1, 2, \ldots, 10$ und $n = 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1$. Gleiches gilt für $2\lambda = 2$, $2\mu = 10$. Ist $2\lambda = 8$, $2\mu = 4$, so giebt es wiederum vier verschiedene Monoide, nämlich: $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und $n = 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2$ resp. $n = 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1$, resp. $n = 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4$, resp. $n = 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3$; ebenso für $2\lambda = 4$, $2\mu = 8$. Ist endlich $2\lambda = 6$, $2\mu = 6$, so giebt es nur zwei verschiedene Monoide, nämlich m und n beide gerade oder beide ungerade, resp. m gerade, n ungerade oder umgekehrt.

Der Beweis ergiebt sich sofort, sobald man bedenkt, dass ein Kegel 3. Ord. dreifach symmetrisch gemacht werden kann. Es könnte nun eine vollständige Aufzählung aller Monoide mit Knotenpunkten erfolgen; jedoch ist die Zahl derselben zu gross und es wird durch eine solche Aufzählung nichts weiter erreicht.

Monoide, für welche $u_3 = 0$ singuläre Kanten besitzt; $u_4 = 0$ enthält die singulären Kanten nicht.

52. Es sollen in diesem Capitel einige Specialisirungen des dreifachen Punktes, die Classenerniedrigung eines solchen dreifachen Punktes, sowie das gestaltliche Aussehen derselben betrachtet werden. Und zwar werden die folgenden Fälle hier ihre Erledigung finden: Der Tangentialkegel im dreifachen Punkte besitzt *eine*, *zwei*, *drei Doppelkanten*, oder *eine dreifache Kante*, oder er besitzt *eine Rückkehrkante* oder *eine Selbstberührungskante*. Dabei wird angenommen, dass der Kegel $u_4 = 0$ durch keine der singulären Kanten hindurchgeht; die übrigen Fälle werden im nächsten Capitel näher betrachtet werden.

Wir erörtern hier zunächst die Frage nach der Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt in den aufgezählten Fällen. Besitzt der Kegel eine Doppelkante, so schreiben wir ihn in der Form:

$$u_3 = xyz + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0.$$

Bilden wir nun die erste Polarfläche eines Punktes P und ebenso eines Punktes Q in Bezug auf das Monoid, und schneidet die Schnittcurve beider Polarflächen dasselbe in $\varkappa$ Punkten, welche mit dem dreifachen Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ zusammenfallen, so ist die genannte Classenerniedrigung gleich $\varkappa$. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir die beiden Polarflächen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = w\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = w\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_4}{\partial y} = 0$$

wählen, welche sich in einer Curve mit vierfachem Punkte schneiden. Die Tangenten der vier Aeste in diesem Punkte sind $\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u_3}{\partial y} = 0$, von denen drei eine ganz allgemeine Lage zum Kegel $u_3 = 0$ haben, und nur die vierte fällt mit der Richtung der Doppelkante zusammen. Jeder der ersten drei Aeste schneidet unsere Fläche in 3, der vierte aber in 4 zusammenfallenden Punkten; das erstere ist selbstverständlich und das letztere erkennt man, wenn man die Potenzreihen des vierten Astes: $x = az^2 + bz^3 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \beta z^3 + \cdots$ aufstellt und in $f(x, y, z)$ substituirt, wo dann z^4 als niedrigste Potenz von z erscheint. Die Reduction der Classe beträgt demnach:

$$3 + 3 + 3 + 4 = 13.$$

Ganz analog gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Kegel $u_2 = 0$, zwei oder drei getrennte Doppelkanten besitzt. Dann werden von den vier Aesten $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ zwei resp. drei mit den Doppelkanten zusammenfallen und die Classenerniedrigung 14 resp. 15 sein.

53. Eine besondere Behandlung erfordern die übrigen Fälle. Besitzt der Tangentialkegel eine Rückkehrkante, so hat er die Gleichung:

$$u_3 = zx^2 + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

zugleich wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2zx + 3Ax^2 + 6Bxy + 3Cy^2 + \frac{\partial u_4}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \qquad 3Bx^2 + 6Cxy + 3Dy^2 + \frac{\partial u_4}{\partial y}.$$

Von den vier Aesten der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ haben zwei eine allgemeine Lage gegen den Kegel $u_3 = 0$, während die beiden übrigen die Rückkehrkante tangiren. Die Reihenentwicklungen der letzteren beiden werden $x = bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + \cdots$, $y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta z^2 \pm \cdots$, dieselben sind also mit einander verzweigt. Diese Reihen in $f(xyz)$ eingesetzt ergeben als niedrigste Potenz von z die vierte, so dass die gesammte Classenerniedrigung sich auf $3 + 3 + 4 + 4 = 14$ beläuft.

54. Zerfällt der Kegel 3. Ord. in eine Ebene und einen sie berührenden Kegel 2. Ord., so wird seine Gleichung:

$$u_3 = x(x^2 + Ay^2 + 2Bxy + 2Cxz)$$

also:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4Cxz + 3x^2 + 4Bxy + Ay^2 + \frac{\partial u_4}{\partial x},$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2Axy + 2Bx^2 + \frac{\partial u_4}{\partial y}.$$

Daraus folgt, dass drei Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ die Berührungskante $x=0$, $y=0$ tangiren; ihre Reihenentwicklungen werden $x=\varepsilon b z^{\frac{5}{3}}+c z^2+\cdots$, $y=\varepsilon\alpha z^{\frac{4}{3}}+\varepsilon^2\beta z^{\frac{5}{3}}+\cdots$, sie sind also mit einander verzweigt. Diese Entwicklungen in $f(x, y, z)$ eingesetzt liefern z^4 als niedrigste Potenz, so dass die Gesammterniedrigung der Classe des Monoids $3+4+4+4=15$ beträgt.

55. Zerfällt der Tangentialkegel *in drei sich in einer Geraden* schneidende Ebenen, so wird seine Gleichung:

$$u_3=xy(x+\varrho y)$$

und also:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+\varrho y^2+\frac{\partial u_4}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2\varrho xy+\frac{\partial u_4}{\partial y}\cdots$$

Alle vier Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ berühren die Gerade $x=0$, $y=0$, und ihre Entwicklungen sind von der Form:

$$x=\pm a_1 z^{\frac{3}{2}}+b_1 z^2+\cdots,\quad y=\pm\alpha_1 z^{\frac{3}{2}}+\beta_1 z^2+\cdots,$$

resp.

$$x=\pm a_2 z^{\frac{3}{2}}+b_2 z^2+\cdots,\quad y=\pm\alpha_2 z^{\frac{3}{2}}+\beta_2 z^2+\cdots,$$

d. h. sie sind zwei Mal zu zwei miteinander verzweigt. Diese Reihen in die Gleichung des Monoids eingesetzt ergeben z^4 als niedrigste Potenz, und folglich wird die Classenreduction gleich 16.

56. Worin bestehen nun die gestaltlichen Aenderungen der Monoide, welche durch die aufgezählten Specialisirungen des Tangentialkegels im dreifachen Punkt hervorgerufen werden? Beachten wir zuerst die Einwirkungen einer Doppelkante des Tangentialkegels und zwar einer *isolirten Doppelkante*. Diese Flächen bilden den Uebergang von den zweitheiligen zu den eintheiligen Monoiden; man erhält sie aus den zweitheiligen Monoiden, mit einem tropfenförmigen Flächentheil, indem man diesen immer kleiner werden und schliesslich völlig verschwinden lässt, ein Vorgang den man sich leicht vorstellt.

Auch bei den Monoiden, deren Tangentialkegel 3. Ord. eine *Doppelkante mit reellen Tangentialebenen* besitzt, ist der Vorgang ein äusserst einfacher. Als Ausgangsfläche wählen wir das zweitheilige endliche Monoid, welches natürlich keine reellen Geraden besitzen kann. Dasselbe besteht aus einem tropfenförmigen und einem trichterförmigen Flächentheil, siehe Nr. 43; jeder Querschnitt durch die dort construirte Axe*) hat die Gestalt der Figur 2. Erhält der Tangentialkegel eine

*) Man kann an Stelle der construirten Axe jede Gerade im Innern des paaren Kegelmantels nehmen, das Gesagte behält auch dann seine Gültigkeit.

reelle Doppelkante, so giebt es einen einzigen Querschnitt von der Form 9, während alle übrigen die Form 2 beibehalten. Der Effect, den das Auftreten einer Doppelkante beim Tangentialkegel 3. Ord. an der Gestalt des Monoides hervorbringt, ist also eine vollständige Einschnürung des trichterförmigen Theiles an der der Doppelkante entsprechenden Stelle, indem sich daselbst *eine* Schleife des bez. Querschnitts zusammenzieht. Dadurch wird zugleich ein Aneinanderdrängen des tropfenförmigen und des trichterförmigen *Flächentheiles* an jener Stelle bedingt, wie dieses die Figur 9 erkennen lässt. Aus dem endlichen zweitheiligen Monoid kann man ganz ebenso Monoide ableiten, deren Tangentialkegel 3. Ord. *zwei* oder *drei Doppelkanten besitzt*, indem man den trichterförmigen Theil an zwei resp. drei Stellen in der angegebenen Weise zusammenschnürt. Lässt man zwei solche Einschränkungen zusammenrücken, so erhält man das endliche Monoid, dessen Tangentialkegel 3. Ord. eine *Selbstberührungskante* aufweist.

Die Uebergänge, welche wir bei den endlichen zweitheiligen Monoid geschildert haben, lassen sich mit Leichtigkeit auf ein beliebiges zweitheiliges Monoid übertragen. Auch hier sind solche Einschnürungen vorzunehmen, indem man jedes Mal eine Schleife des bez. Querschnitts zusammenzieht. Sind zwei oder drei Einschnürungen zu machen, so können sie auf demselben Theil oder auf verschiedenen Theilen des paaren Kegelmantels liegen, je nachdem man von einer Einschnürung zur andern eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Geraden des Monoids zu passiren hat.

Das Monoid, dessen Tangentialkegel eine *Rückkehrkante* besitzt, leitet man am bequemsten aus dem Monoid ab, dessen Tangentialkegel eine isolirte Doppelkante besitzt. Man braucht dann nur in irgend einem Querschnitt durch die Doppelkante die eine Schleife zusammenzuziehen, eine Operation, die mit der vorher geschilderten Einschnürung völlig übereinstimmt.

57. Zuletzt bleiben uns noch die Monoide zu beschreiben, deren Tangentialkegel aus *drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen* besteht. Wir gehen auch hier von dem endlichen zweitheiligen Monoid aus, und leiten daraus ein Monoid ab, dessen Tangentialkegel 3. Ord. *drei* Doppelkanten besitzt, indem wir drei Einschnürungen machen. Lassen wir dann den tropfenförmigen Theil sich immer mehr zusammenziehen bis er schliesslich verschwindet, so erhalten wir die gesuchte Gestalt. Jeder ebene Schnitt durch die dreifache Gerade des Tangentialkegels 3. Ord. hat die Gestalt von Figur 10a, der Punkt O ist ein dreifacher Punkt der Curve; nur die drei singulären Ebenen schneiden in einem isolirten (vierfachen) Punkt, durch welchen vier imaginäre Geraden verlaufen. Die Fläche besteht demnach aus drei getrennten Theilen, welche sich auf die sechs von den singulären Ebenen erzeugten

Winkelräume so vertheilen, dass abwechselnd ein Raum von einem Flächentheil besetzt und einer leer ist. Sind von den 3 singulären Ebenen zwei conjugirt imaginär, so giebt es um die dreifache Gerade nur noch zwei Winkelräume, von denen der eine leer, der andere aber von dem einzigen noch vorhandenen Flächentheil occupirt ist.

Gehen wir nicht von dem endlichen zweitheiligen Monoid, sondern von einem zweitheiligen Monoid mit reellen Geraden aus und führen an diesem die angegebenen Operationen aus, so erhalten wir ein Monoid mit reellen Hauptgeraden, dessen Tangentialkegel 3. Ord. eine dreifache Kante besitzt. Man kann diese Flächen auch aus den soeben erhaltenen Monoiden ohne reelle Geraden aber mit dreifacher Kante des Tangentialkegels ableiten, indem man die Flächentheile durchs Unendliche zusammenwachsen lässt. Halbiren wir nämlich zwei benachbarte Winkelräume und nehmen wir an, dass der neu gebildete räumliche Winkel eine singuläre Ebene mit vier reellen Hauptgeraden des Monoids einschliesst; lassen wir alsdann eine Ebene diesen Winkelraum durchlaufen, so hat die Schnittcurve in der Ausgangsebene die Form 10a, geht dann allmählig in 10b über und weiter in 10c, um dann durch die an a gespiegelten Bilder von 10b und 10a zurückzukehren. Mit andern Worten, die beiden Flächentheile, welche an die nämliche singuläre Ebene angrenzen, sind jetzt zwei Mal durchs Unendliche hindurch mit einander verwachsen, während sie vorher, so lange die Hauptgeraden imaginär waren, getrennt waren. Hiermit ist aber unsere Behauptung erwiesen, und es ist eine Kleinigkeit in jedem vorliegenden Falle die nöthigen Aenderungen anzubringen.

58. *Wir wollen in diesem Capitel noch kurz einige Flächen behandeln, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkte in drei Ebenen zerfällt, und welche ausserdem noch 6 Knotenpunkte aufweisen.* Nun zerfallen aber alle Monoide mit 6 Knotenpunkten in zwei Arten, nämlich in Monoide, deren Knotenpunkte in einer Ebene liegen, und in Monoide, welche als Specialfall des Symmetroids erscheinen, siehe Nr. 14ff. Wir müssen also auch hier beide Fälle unterscheiden und betrachten zuerst das Monoid, dessen 6 Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte liegen und dessen Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus drei sich nicht in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht. Seine Gleichung ist: $wxyz + (a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy)^2 = 0.$ Der Tangentenkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt zerfällt in zwei Ebenen, nämlich die Ebene des Kegelschnitts und eine der drei singulären Ebenen, und in einen Kegel 4. Ord. mit dreifacher Kante. Der eine Mantel dieses Kegels berührt die bezügliche singuläre Ebene, die beiden andern Mäntel sind mit einander verzweigt und die Tangentialebene in ihrer Rückkehrkante enthält die Schnittgerade der beiden noch übrigen singulären Ebenen.

Um das Monoid zu erhalten, dessen 6 Knotenpunkte nicht in einer Ebene liegen, dessen Tangentialkegel im dreifachen Punkt aber ebenfalls von drei sich nicht in einer Geraden schneidenden Ebenen gebildet wird, benutzt man seine Eigenschaft Symmetroid zu sein, vergl. Nr. 21. An der citirten Stelle ist das Symmetroid mit 10 Knotenpunkten eindeutig auf die Kernfläche 4. Ordnung eines Gebüsches von Flächen 2. Grades bezogen. Ferner findet sich dort auseinandergesetzt, dass das Symmetroid einen dreifachen Punkt erhält und dass die Kernfläche in eine Fläche 3. Ord. übergeht, wenn eine der vier Grundflächen des Gebüsches durch eine doppelt gezählte Ebene ersetzt wird. Die Berührungspunkte aller Flächen des Gebüsches, welche diese Ebene berühren, bilden eine der Kernfläche angehörige Curve 3. Ord., und dieser Curve entspricht bei der eindeutigen Beziehung zwischen der Kernfläche und dem Symmetroid der dreifache Punkt dieser Fläche. Soll also der Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus 3 Ebenen bestehen, so muss jene Curve 3. Ord. in 3 Geraden zerfallen; dann kann man aber zur Grundflächen des Gebüsches drei Flächen 2. Grades wählen, welche je zwei dieser drei Geraden enthalten. Wir nehmen desshalb als Grundflächen 2. Grades die vier Flächen:

$$w^2 = 0, \qquad \begin{aligned} xy + b_1 xw + b_2 yw + b_3 zw &= 0, \\ yz + c_1 xw + c_2 yw + c_3 zw &= 0, \\ zx + d_1 xw + d_2 yw + d_3 zw &= 0, \end{aligned}$$

so dass die gesuchte Fläche durch die Determinante dargestellt wird:

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \delta & \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1 \\ \beta & 0 & \gamma & \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta d_2 \\ \delta & \gamma & 0 & \beta b_3 + \gamma c_3 + \delta d_3 \\ \beta b_1 + \gamma c_1 + \delta d_1, & \beta b_2 + \gamma c_2 + \delta d_2, & \beta b_3 + \gamma c_3 + \delta d_3, & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Der dreifache Punkt dieser Fläche ist ersichtlich $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ und die drei singulären Ebenen in diesem Punkte sind: $\beta \cdot \gamma \cdot \delta = 0$. Die Knotenpunkte in der Ebene $\beta = 0$ liegen auf den beiden Geraden:

$$\gamma^2 c_1 + \gamma\delta(d_1 - c_2) - \delta^2 d_2 = 0,$$

und ganz analog in den beiden andern singulären Ebenen.

Die früher bei dem gewöhnlichen Monoid mit 6 Knotenpunkten gefundenen Eigenschaften erleiden hier einige Abänderungen. Der Tangentenkegel 6. Ord. aus einem Knotenpunkt zerfällt nämlich hier in drei Theile; den ersten Theil bildet die singuläre Ebene, in welcher der Knotenpunkt liegt; den zweiten Theil bildet ein Kegel 2. Ord. durch den dreifachen Punkt und die vier nicht in jener singulären Ebene gelegenen Knotenpunkte, derselbe berührt die singuläre Ebene längs der Geraden durch den dreifachen Punkt; den letzten Theil macht ein Kegel 3. Ord. mit Rückkehrkante aus, der durch die 5 noch übrigen Knotenpunkte einfach hindurchgeht, und dessen Rückkehrkante den dreifachen Punkt passirt. Der Kegel 2. Ord. berührt die Fläche ersichtlich längs einer Geraden und längs einer Raumcurve 3. Ord., welche 5 Knotenpunkte und den dreifachen Punkt passirt.

Die Monoide mit 6 Knotenpunkten, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, haben alle die Eigenschaft, dass ihre Knotenpunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Ihre Gleichung lässt sich desshalb schreiben:

$$wx(x-\alpha y)(x-\beta y)+\varrho(x^2+y^2+z^2)^2=0.$$

Monoide, für welche $u_3=0$ singuläre Kanten besitzt; $u_4=0$ geht durch diese Kanten hindurch.

59. Unterwirft man den Kegel $u_3=0$ des Monoids $\varrho u_3+u_4=0$ denselben Specialisirungen, wie im vorhergehenden Capitel, lässt man jedoch die daselbst stipulirte Bedingung fallen, indem man den Kegel $u_4=0$ durch die singulären Kanten des Tangentialkegels hindurchlegt, so erhält man eine Reihe neuer Singularitäten, und ihre Untersuchung ist es, welche uns in diesem Capitel beschäftigen soll.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, in welchem der Kegel $u_3=0$ eine Doppelkante hat; dann kann der Kegel $u_4=0$ entweder einfach durch die Doppelkante hindurchgehen, oder längs derselben einen der beiden Mäntel von $u_3=0$ berühren, und zwar kann die Berührung von der ersten, zweiten, ..., zehnten Ordnung sein. Wir nehmen als Gleichung des Kegels 3. Ordnung:

$$u_3=xyz+Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3=0$$

und als Gleichung des Kegels 4. Ordnung:

$$u_4=z^3(Gx+Hy)+z^2(Ix^2+2Kxy+Ly^2)+z(Mx^3+\cdots)+(Qx^4+\cdots)=0.$$

Es sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yz+3Ax^2+6Bxy+3Cy^2+Gz^3+2Ixz^2+2Kyz^2+\cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xz+3Bx^2+6Cxy+3Dy^2+Hz^3+2Kxz^2+2Lyz^2+\cdots;$$

hieraus ergeben sich vier verschiedene Reihenentwicklungen für die vier Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Drei von den Aesten dieser Curve sind dargestellt durch die Reihen:

$$x=a_iz+b_iz^2+\cdots,\quad y=\alpha_iz+\beta_iz^2+\cdots,\quad i=1,2,3;$$

sie schneiden ersichtlich das Monoid $f(xyz)=u_3+u_4=0$ in *je drei* zusammenfallenden Punkten $x=y=z=0$. Der vierte Curvenast erhält die Reihen:

$$x = bz^2 + cz^3 + \cdots, \quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo $b = -H$, $\beta = -G$ ist.

Diese Reihen in $f(xyz)$ eingesetzt liefern als niedrigste Potenz z^5 und als Coefficienten dieser Potenz: $-GH$; der durch sie dargestellte Curvenast schneidet demnach das Monoid in fünf consecutiven Punkten $x = y = z = 0$. Die Gesammtreduction der Classenzahl durch den dreifachen Punkt beträgt $3 \cdot 3 + 5 = 14$.

Soll der Kegel $u_4 = 0$ den einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante berühren, so muss G oder H verschwinden. Sei etwa $H = 0$, so werden die Entwicklungen des vierten Curvenastes:

$$x = cz^3 + dz^4 + \cdots, \quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo $\beta = -G$ und $c = 2LG - 3DG^2$. Die niedrigste Potenz in $f(xyz)$ nach Einsetzung dieser Reihen für x und y wird nun z^6 und der Coefficient dieser Potenz wird: $G^2(L - GD)$; die Erniedrigung der Classe wird also $3 \cdot 3 + 6 = 15$.

Geht der Kegel $u_4 = 0$ mit dem einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante eine Berührung zweiter Ordnung ein, so wird $L - GD = 0$. Die Reihen des vierten Astes werden wieder:

$$x = cz^3 + dz^4 + \cdots, \quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo $\beta = -G$ und $c = -LG$; die niedrigste Potenz in f wird dann z^7, und die Classenreduction wird $3 \cdot 3 + 7 = 16$.

Es lässt sich nun allgemein beweisen: *Hat der Kegel $u_3 = 0$ eine Doppelkante, und geht der Kegel $u_4 = 0$ mit dem einen Mantel jenes Kegels längs derselben eine Berührung $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung ein, so reducirt der dreifache Punkt des Monoids $\varrho u_3 + u_4 = 0$ seine Classe um $3 \cdot 3 + \varkappa + 5 = 14 + \varkappa$ Einheiten;* dabei kann $\varkappa$ die Werthe $1, 2, \ldots, 10$ annehmen. Um diese Behauptung zu beweisen, gehen wir von dem Monoid aus, bei welchem der Kegel $u_4 = 0$ die Doppelkante von $u_3 = 0$ einfach passirt. Diese Doppelkante gehört dem Monoid einfach als Gerade an, und längs der Geraden besitzt dasselbe eine constante Tangentialebene. Eine beliebige Ebene durch diese Gerade schneidet das Monoid in der Geraden und in einer Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt, deren einer Ast die Gerade berührt. Die zwei Ebenen durch die Gerade, welche den Kegel $u_3 = 0$ berühren, schneiden ausser der Geraden noch eine Curve 3. Ord. mit Spitze aus, deren Tangente mit der Geraden zusammenfällt. Die Ebene, welche den Kegel $u_4 = 0$ berührt, berührt das Monoid längs der Geraden und schneidet noch einen Kegelschnitt aus, der die Gerade in zwei getrennten Punkten schneidet. Legt man durch den dreifachen Punkt des Monoids eine beliebige Gerade g, so giebt es durch diese Gerade noch 10 Tangentialebenen an die Fläche, deren Berührungspunkte nicht in den dreifachen Punkt fallen; es sind dieses die Ebenen durch die 10 Hauptgeraden der Fläche, welche nicht mit der Doppelkante von $u_3 = 0$ zusammenfallen. Lässt man also $\varkappa$ von diesen 10 Geraden des Monoids in die Doppelkante hineinrücken, so giebt es nur noch $(10 - \varkappa)$ Tangentialebenen durch die Gerade g, mithin hat die Classe um weitere $\varkappa$ Einheiten abgenommen. Diese Reduction wird aber durch den dreifachen Punkt bewirkt, da die Ebene durch g und die Doppelkante aus dem Monoid eine Curve ausschneidet, welche ausserhalb des dreifachen Punktes keinen Doppelpunkt mehr besitzt; hiermit ist aber die obige Behauptung erwiesen.

Ganz dieselben Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn der Tangentialkegel 3. Ord. zwei oder drei Doppelkanten aufweist, nur kann die Berührung dieses Kegels mit einem Kegel 4. Ord. längs seiner singulären Kanten nicht mehr von so hoher Ordnung wie vorher sein.

60. Wir gehen jetzt weiter zu den Monoiden über, bei welchen der Kegel $u_3 = 0$ ein *Rückkehrkante* besitzt und der Kegel $u_4 = 0$ dieselbe in beliebiger Richtung durchsetzt. Die Gleichung des Tangentialkegels ist dann:

$$u_3 = zx^2 + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0,$$

die des Kegels 4. Ord. ist wieder:

$$u_4 = z^3(Gx + Hy) + z^2(Ix^2 + 2Kxy + Ly^2) + z(Mx^3 + \cdots) + (Qx^4 + \cdots) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz + 3Ax^2 + 6Bxy + 3Cy^2 + Gx^3 + 2Ixz^2 + 2Kyz^2 + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \qquad 3Bx^2 + 6Cxy + 3Dy^2 + Hz^3 + 2Kxz^2 + 2Lyz^2 + \cdots.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder aus vier Aesten, von denen zwei durch die Reihen $x = a_i z + b_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$ dargestellt werden, das Monoid also in drei consecutiven Punkten $x = y = z = 0$ schneiden. Die beiden übrigen Aeste sind mit einander verzweigt und ihre Reihen sind:

$$x = bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta z^2 \pm \cdots,$$

wobei

$$b = \frac{HC - GD}{2D}, \quad \alpha^2 = -\frac{H}{3D}.$$

In $f(xyz)$ eingesetzt liefern sie als niedrigste Potenz $z^{\frac{9}{2}}$ mit dem Coefficienten: $\frac{2\alpha}{3}H$; die Classenerniedrigung wird also $3 + 3 + 9 = 15$.

Berührt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Rückkehrkante, so wird $H = 0$. Während die beiden zuerst genannten Aeste ungeändert bleiben, erhalten die beiden letzteren die neuen Entwicklungen:

$$x = bz^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y = \beta_i z^2 + \gamma_i z^3 + \cdots, \qquad i = 1, 2,$$

wo $b = -\frac{G}{2}$ und $3D\beta^2 + \beta(2L - 3CG) - KG + \frac{3}{4}BG^2 = 0$. Die niedrigste Potenz in f nach Substitution der Werthe von x und y wird jetzt z^5 und ihr Coefficient $-\frac{G^2}{4}$, so dass sich die Verminderung der Classe auf $3 + 3 + 5 + 5 = 16$ beläuft.

61. Bei den Monoiden, deren Tangentialkegel 3. Ord. eine Selbstberührungskante besitzt, kann man ganz analoge Betrachtungen anstellen. Durchsetzt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs dieser Kante in beliebiger Richtung, so kann man setzen:

$$u_3 = x(x^2 + Ay^2 + 2Bxy + 2Cxz),$$

während $u_4 = 0$ seine frühere Gleichungsform beibehält. Alsdann wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4Cxz + 3x^2 + 4Bxy + Ay^2 + Gz^3 + 2Ixz^2 + 2Kyz^2 + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \qquad 2Bx^2 + 2Axy + Hz^3 + 2Kxz^2 + 2Lyz^2 + \cdots.$$

Ein Ast der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird

$$x = az + bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \beta z^2 + \cdots;$$

die drei übrigen Aeste sind mit einander verzweigt; ihre Reihen werden

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \beta z^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

wobei ε eine dritte Einheitswurzel und $\alpha^3 = \frac{2CH}{A^2}$, $b = -\frac{A\alpha^2}{4C}$. Durch Einsetzung der Werthe von x und y in f ergiebt sich als niedrigstes Glied: $\frac{3}{4}\alpha H z^{4\frac{1}{3}}$, so dass die Gesammtreduction der Classe $3 + 13 = 16$ wird.

Tangirt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, wird also $H = 0$, so ändern sich die drei letzten Reihenentwicklungen und an ihre Stelle treten die folgenden:

$$x = bz^2 + cz^3 + \cdots, \quad y = \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots,$$

wo

$$b = -\frac{G}{4C} \text{ und } \beta = -\frac{bK + b^2 B}{L + bA};$$

und

$$x = bz^2 \pm cz^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta z^2 + \cdots,$$

wo

$$b = -\frac{L}{A} \text{ und } \alpha^2 = -\frac{GA - 4CL}{A^2}.$$

Der durch die ersten beiden Reihen dargestellte Curvenast schneidet das Monoid ersichtlich in 5 consecutiven Punkten $x = y = z = 0$; die beiden letzten Reihenpaare stellen zwei verzweigte Aeste dar, welche mit dem Monoid 10 consecutive Punkte $x = y = z = 0$ gemein haben. Die Classenreduction wird demnach in diesem Falle 18.

Geht der Kegel $u_4 = 0$ mit dem zerfallenen Kegel $u_3 = 0$ längs der Selbstberührungskante eine Berührung von höherer als der ersten Ordnung ein, etwa eine Berührung von der Ordnung $\varkappa$, (wo $\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$), so ist die Classenreduction $(17 + \varkappa)$. Der Beweis kann ganz ebenso geführt werden wie vorher beim Tangentialkegel mit Doppelkante, wenn der Kegel $u_4 = 0$ eine höhere Berührung mit demselben eingeht.

62. Es handelt sich nun noch um Monoide, deren Tangentialkegel aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, dessen Gleichung also die Form hat: $u_3 = xy(x + \varrho y) = 0$. Durchsetzt der Kegel $u_4 = 0$ die dreifache Kante von $u_3 = 0$ in beliebiger Richtung, so können wir seine frühere Gleichungsform benutzen, und es wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \varrho y^2 + Gz^3 + 2Iz^2x + 2Kz^2y + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2\varrho xy + Hz^3 + 2Kz^2x + 2Lz^2y + \cdots.$$

Die vier Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ erhalten die Reihen:

$$x = \pm a_1 z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha_1 z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots, \qquad i = 1, 2$$

und

$$x = \pm a_3 z^{\frac{3}{2}} + b_k z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha_3 z^{\frac{3}{2}} + \beta_k z^2 + \cdots, \qquad k + 3, 4;$$

wobei $2a\alpha + \varrho\alpha^2 + G = 0$ und $a^2 + 2\varrho a\alpha + H = 0$. In $f(xyz)$ eingesetzt liefern sie als niedrigste Potenz $(a^2\alpha + \varrho a\alpha^2 + Ga + H\alpha)z^{\frac{9}{2}}$, so dass die Classenerniedrigung 18 beträgt.

Berührt $u_4 = 0$ eine der drei singulären Ebenen etwa $x = 0$, d. h. wird $H = 0$, so bekommen wir die neuen Entwicklungen:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

wo
$$\alpha^2 = \frac{G}{3\varrho} \quad \text{und} \quad a = -2\varrho\alpha,$$

$$x = \quad b z^2 \pm c z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta_k z^2 + \cdots, \quad k = 3, 4,$$

wo
$$\alpha^2 = -\frac{G}{\varrho} \quad \text{und} \quad b = -\frac{L}{\varrho} \quad \text{ist.}$$

Daraus erschliessen wir als Gesammtreduction der Classe die Zahl $9 + 10 = 19$.

Auch hier lässt sich, wie in den vorhergehenden Fällen zeigen, dass sich die Classe um 20 resp. 21 erniedrigt, wenn die Berührung des Kegels $u_4 = 0$ mit der singulären Ebene $x = 0$ von der zweiten resp. dritten Ordnung ist.

63. Wir wollen es nun versuchen die geometrische Gestalt der in diesem Capitel aufgestellten Monoide mit dreifachem Punkte aus den Monoiden des vorigen Capitels abzuleiten, und werden finden, dass auch die neuen Gestalten aus der früheren durch Zusammenziehen geeigneter Oeffnungen der Fläche abgeleitet werden können.

Den Anfang machen wir mit den Monoiden, deren Tangentialkegel 3. Ord. eine *reelle Doppelkante* besitzt. Geht der Kegel $u_4 = 0$ nicht durch diese Doppelkante hindurch, so hat das zugehörige Monoid die in Nr. 56 augegebene Gestalt. Um die Gestalt dieser Fläche genauer zu verfolgen, denken wir uns dieselbe aus dem dreifachen Punkt auf eine Ebene projicirt, genau so wie in Nr. 48. Dem dreifachen Punkt entspricht dabei die Curve 3. Ord. mit Doppelpunkt, vergl. Fig. 11a und 11b, den 12 Geraden die Punkte $A, B, C, D, \ldots$; den punktirten Curven entsprechen geschlossene Curven des Monoids, die kettenförmig an einander hängen und folglich eben so viele Oeffnungen des Monoids bedingen. Geht $u_4 = 0$ einfach durch die Doppelkante hindurch, so erhält man noch zwei verschiedenartige dreifache Punkte, je nachdem man in 11a die Oeffnung 1 oder in 11b die Oeffnung 1 zusammenzieht. Soll der Kegel $u_4 = 0$ einen Mantel des Tangentialkegels 3. Ord. längs der Doppelkante berühren, so kann dieses ebenfalls noch auf zwei verschiedene Arten erreicht werden, je nachdem man die Oeffnung 2 in 11a oder in 11b zusammenzieht; es giebt also wiederum zwei hinsichtlich der Gestalt ihres dreifachen Punktes verschiedene Monoide. Ganz gleiche Resultate findet man, wenn man die Oeffnung 3, etc. in 11a resp. in 11b zusammenzieht.

Besitzt der Kegel $u_3 = 0$ mehrere Doppelkanten, so kann man an jeder die vorher geschilderten Operationen ausführen, und erhält dadurch die verschiedenen Monoide, deren Tangentialkegel 3. Ord. in einen Kegel 2. Ord. und eine Ebene oder in drei Ebenen zerfällt. Wie viele aneinanderhängende Oeffnungen des Monoids man in jede Doppelkante zusammenziehen kann, ergiebt sich daraus, dass auf dem Kegel 2. Ord. resp. der Ebene, welche Theile des Kegels $u_3 = 0$ bilden, nur 8 resp. 4 Hauptgeraden des Monoids liegen können.

Besitzt der Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine *isolirte Doppelkante*, so geht man am bequemsten von dem gewöhnlichen endlichen Monoide aus. Lässt man den trichterförmigen Flächentheil an einer Stelle mit dem tropfenförmigen Theile zusammenstossen, so erhält man ein

Monoid mit einem Knotenpunkte. Lässt man ferner den tropfenförmigen Theil sich völlig zusammenziehen, so rückt der Knotenpunkt in den dreifachen Punkt herein und es entsteht das gesuchte Monoid. Jeder Schnitt durch die singuläre Kante hat die Form 12a; nur die Ebene, welche das Monoid längs der singulären Kante berührt, schneidet in der Curve 12b.

64. Im vorigen Capitel sind zu Ende der Nr. 56 die Monoide beschrieben, deren Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine *Rückkehrkante* besitzt. Dort war die Bedingung zu Grunde gelegt, dass $u_4 = 0$ die Rückkehrkante nicht passirt; aus diesen Monoiden lassen sich aber diejenigen, bei welchen $u_4 = 0$ die Rückkehrkante passirt, sofort ableiten. Wir denken uns wieder das Monoid auf eine Ebene abgebildet wie in der vorigen Nummer; dem dreifachen Punkt entspricht dann eine Curve 3. Ord. mit Spitze, Figur 13, den Hauptgeraden des Monoids entsprechen die Punkte $A, B, C, \ldots$. Durch Zusammenziehen der Curve 1, d. h. durch Zusammenziehen der dieser Curve entsprechenden Oeffnung des Monoids, entsteht ein Monoid, bei welchem $u_4 = 0$ die Rückkehrkante von $u_3 = 0$ einfach passirt. Zieht man auch noch die Curve 2, d. h. die entsprechende Oeffnung der Fläche, zusammen, so ergiebt sich das Monoid, bei welchem $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Rückkehrkante berührt.

65. Besitzt der Kegel $u_3 = 0$ eine Selbstberührungskante und geht $u_4 = 0$ nicht durch diese Kante hindurch, so haben die zugehörigen Monoide die in Nr. 56 beschriebene Gestalt. Ihre Abbildung auf eine Ebene mag wieder in der früheren Weise ausgeführt werden; dem dreifachen Punkt entspricht der Kegelschnitt und die ihn berührende Gerade in Figur 13, der unendlich fernen Curve des Monoids die Curve 4. Ord. $u_4 = 0$. Die schraffirten Theile (und ebenso die unschraffirten) bilden einen zusammenhängenden Theil des Monoids ab, so dass man von jedem Punkt zu jedem andern gelangen kann, ohne den dreifachen Punkt oder das unendlich Ferne zu passiren. Von dem schraffirten Gebiet zum unschraffirten kann man unter dieser Bedingung nicht gelangen. Der punktirten Curve 1 entspricht eine geschlossene Curve des Monoids; durch Zusammenziehen derselben, d. h. durch Zusammenziehen der entsprechenden Oeffnung des Monoids entsteht eine neue Fläche, für welche $u_4 = 0$ die Selbstberührungskante von $u_3 = 0$ einfach passirt. Die Abbildung dieser Fläche zeigt uns Figur 14a; die Gestalt des dreifachen Punktes bei allen diesen Monoiden ist nicht wesentlich verschieden.

Aus diesen Monoiden kann man durch weiteres Zusammenziehen zweier Oeffnungen zu den Monoiden gelangen, für welche $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Selbstberührungskante berührt. Diese Monoide bilden hinsichtlich der Gestalt ihres dreifachen Punktes noch drei verschiedene Classen; man erhält sie, indem man in den Monoiden mit den Abbildungen 14a, 14b, 14c die Oeffnungen 1 und 2 zusammenzieht, wodurch Monoide entstehen, deren Abbildung uns die Figuren 14α, 14β, 14γ liefern. Wie man hieraus die Monoide ableitet, für welche $u_4 = 0$ den einen Mantel des Kegels $u_3 = 0$ längs der Selbstberührungskante osculirt, hyperosculirt, etc., ist ohne Weiteres klar und braucht hier nicht auseinander gesetzt zu werden.

66. Auch die Monoide, deren Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine dreifache Kante besitzt, lassen sich aus den in Nr. 57 beschriebenen Monoiden äusserst einfach ableiten. Dort ist vorausgesetzt, dass $u_4 = 0$ die dreifache Kante von $u_3 = 0$ nicht passirt; die Abbildung dieser Monoide zeigt uns Figur 15a. Den Curven 1 und 2 entsprechen zwei Curven des Monoids, durch deren Zusammenziehen zwei Oeffnungen des Monoids verschwinden; auf diese Weise entsteht ein neues Monoid, dessen Abbildung durch Figur 15b repräsentirt wird. Wie man von diesem Monoide zu den Monoiden gelangt, bei welchen $u_4 = 0$ eine der singulären Ebene längs der dreifachen Kante berührt, osculirt oder hyperosculirt, ist wiederum ohne Weiteres klar.

67. Fassen wir die in den letzten beiden Capiteln gewonnenen Resultate nochmals ins Auge, so können wir dieselben folgendermassen zusammenfassen. Die aufgezählten Specialisirungen des dreifachen Punktes werden alle erhalten, indem man gewisse Oeffnungen der Fläche, welche an den dreifachen Punkt angrenzen, zusammenzieht. Jeder Erhöhung der Ordnung*) des dreifachen Punktes um *eine Einheit* entspricht das Zusammenziehen *einer* an den dreifachen Punkt angrenzenden *Oeffnung*. Man kann auf diese Weise eine ganze Kette von Oeffnungen in den dreifachen Punkt zusammenziehen, sobald nur die erste Oeffnung der Kette an denselben angrenzt. An Stelle des Zusammenziehens einer Oeffnung kann auch das Zusammenziehen eines tropfenförmigen Flächentheils treten.

Welchen Einfluss dieses Zusammenziehen von Oeffnungen auf die Gestalt irgend einer Projection der Umgebung des dreifachen Punktes in jedem Falle ausübt, ist leicht zu verfolgen; ich unterlasse es darauf einzugehen.

Monoide, für welche $u_3 = 0$ in eine einfache und in eine Doppelebene, oder in eine dreifache Ebene zerfällt.

68. Die analytische Behandlung dieser Flächen mag wiederum den Anfang machen, und zwar beginnen wir mit den Monoiden, deren

*) Unter der Ordnung eines n-fachen Punktes versteht man die Zahl, welche angiebt, um wie viel derselbe die Classe einer Fläche erniedrigt.

Tangentialkegel in eine Doppel- und eine einfache Ebene zerfällt, also $u_3 = x^2 y$. Dagegen nehmen wir für $u_4 = 0$ die frühere Form:

$$u_4 = Fz^4 + z^3(Gx + Hy) + z^2(Ix^2 + 2Kxy + Ly^2) + \cdots.$$

Die Polarfläche eines beliebigen Punktes in Bezug auf unser Monoid schneidet jetzt eine Curve 12. Ord. mit *siebenfachem* Punkte aus. Es genügt dieses für die Polarfläche des Punktes $x_0, y_0, 0, 0$ zu beweisen, da man die Z-Ebene und die W-Ebene noch durch einen beliebigen Punkt hindurchlegen kann. Nun ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + Gz^3 + 2Iz^2 x + 2Kz^2 y + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + Hz^3 + 2Kz^2 x + 2Lz^2 y + \cdots.$$

Für die Schnittcurve der Polarfläche: $x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mit dem Monoid ergeben sich demnach folgende Reihenentwicklungen:

$$x = \varepsilon a z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \beta z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon = \sqrt[3]{1},$$

wobei $a^2\alpha + F = 0$ und $2x_0 a\alpha + y_0 a^2 = 0$ ist; sie liefern einen superlinearen Zweig dritter Ord., welcher die Gerade $x = 0$, $y = 0$ in seinem singulären Punkt berührt. Ferner ergeben sich noch vier weitere Entwicklungen: $x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2, 3, 4$ wobei: $F + H\alpha + L\alpha^2 + P\alpha^3 + U\alpha^4 = 0$ und

$$x_0(2b\alpha + G + 2K\alpha + 3O\alpha^2 + 4T\alpha^3) + y_0(H + 2L\alpha + 3P\alpha^2 + 4U\alpha^3) = 0$$

ist. Diese Reihen stellen vier einfache Curvenzweige dar, welche die Doppelebene in der Richtung der vier Hauptgeraden $x = 0$, $u_4 = 0$ berühren; die Tangentenrichtung dieser Curvenzweige ist also von der Wahl der Polarfläche unabhängig. Es ist dieses Verhalten ganz analog dem Verhalten der Polarfläche in einem uniplanaren Knotenpunkt*).

69. Um die Reduction der Classenzahl des Monoids durch einen derartigen dreifachen Punkt zu bestimmen, müssen wir wiederum die Anzahl der Schnittpunkte der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mit dem Monoide $f = 0$ aufsuchen, welche in den Punkt $x = y = z = 0$ hereinfallen. Die Curve besitzt erstens zwei mit einander verzweigte Aeste:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \beta_i z^2 + \cdots,$$

wobei $2a\alpha + G = 0$ und $a^2 + H = 0$ ist; sie ergeben als niedrigste Potenz von z in $f(xyz)$ die vierte. Die Curve besitzt zweitens drei lineare Aeste: $x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2, 3$,

*) Vergleiche meine Arbeit über biplanare und uniplanare Punkte, Math. Ann. Bd. XXII, pag. 136 u. 137.

wobei: $2b\alpha + G + 2K\alpha + 3O\alpha^2 + 4T\alpha^3 = 0$ und $H + 2L\alpha + 3P\alpha^2 + 4U\alpha^3 = 0$ ist; sie liefern als niedrigste Potenz von z ebenfalls die vierte. Die Gesammtreduction der Classe des Monoids wird also $5 . 4 = 20$.

70. Nehmen wir an, dass der Kegel $u_4 = 0$ eine besondere Lage zur Doppelebene hat, indem er dieselbe tangirt, so tritt eine weitere Specialisirung des dreifachen Punktes ein. Bezeichnen wir den Kegel $u_4 = 0$ symbolisch durch $(xyz)_4 = 0$, so werden seine Schnittgeraden mit der Ebene $x = 0$ durch $(0yz)_4 = 0$ dargestellt sein. Wir haben dann folgende Fälle zu unterscheiden: $(0yz)_4 = 0$ hat *eine Doppelwurzel*, oder *zwei Doppelwurzeln*, oder *eine dreifache*, oder endlich *eine vierfache Wurzel*. Die zugehörigen Monoide werden wie vorher durch einen Kegel 12. Ord. mit *siebenfacher* Kante projicirt. Drei der Mäntel durch die siebenfache Kante sind, wie früher in Nr. 68, mit einander verzweigt, ihre Reihenentwicklungen haben sich nicht wesentlich geändert. Die vier übrigen Mäntel, welche vorher linear waren und die vier Geraden $(0yz)_4 = 0$ resp. berührten, werden jetzt theilweise verzweigt sein; einer Doppelwurzel von $(0yz)_4 = 0$ entspricht eine Verzweigung zweier Mäntel, einer dreifachen oder vierfachen Wurzel eine Verzweigung von drei resp. vier Mänteln. Schon aus diesem Verhalten des projicirenden Kegels können wir schliessen, dass die Classenerniedrigung des Monoids durch den dreifachen Punkt in den aufgezählten vier Fällen: 21, 22, 22, 23 respective beträgt.

Ein strenger Beweis dieser Behauptung erfordert wieder eine Untersuchung der Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Man erkennt sofort, dass die beiden vorher verzweigten Aeste keine wesentliche Aenderung erfahren, sie schneiden demnach das Monoid nach wie vor in je vier consecutiven Punkten. Dagegen tritt bei den drei linearen Aesten der Curve eine Aenderung ein. Besitzt $(0yz)_4 = 0$ eine *Doppelwurzel* $y : z = \alpha : 1$, so wird von den drei linearen Aesten

$$x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots$$

einer die Gerade $y = \alpha z$ berühren, da die Tangenten dieser Aeste sich durch $x = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(0yz)_4 = 0$ bestimmen. Der *eine* lineare Ast schneidet desshalb das Monoid in fünf, die beiden übrigen schneiden in je vier consecutiven Punkten. Analoges gilt für eine zweite Doppelwurzel.

Besitzt $(0yz)_4 = 0$ eine *dreifache Wurzel* $y : z = \alpha : 1$, so besitzt $\frac{\partial}{\partial y}(0yz)_4 = 0$ noch eine Doppelwurzel $y : z = \alpha : 1$; es fallen also zwei Tangenten zusammen, von den drei linearen Zweigen des vorigen Falles sind jetzt zwei verzweigt. Die Reihen dieser Zweige sind:

$$x = b_1 z^2 + c_1 z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_1 z + \beta_1 z^2 + \cdots,$$

resp.

$$x = b z^2 \pm d z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z \pm \beta z^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Der erste Zweig schneidet wieder in vier, die letzteren beiden dagegen schneiden in je fünf consecutiven Punkten; denn es verschwindet nach Einsetzen der Reihen von x und y in f nicht nur der Coefficient $(0\alpha 1)_4$ von z^4, sondern auch noch der Coefficient $\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4$ von $z^{4\frac{1}{2}}$,

Hat $(0yz)_4 = 0$ *vier gleiche Wurzeln* $y:z = \alpha:1$, also $\frac{\partial}{\partial y}(0yz) = 0$ drei gleiche Wurzeln, so sind die drei (vorher linearen) Zweige von $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mit einander verzweigt und ihre Reihen werden:

$$x = dz^2 + \varepsilon e z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2 \gamma z^{\frac{5}{3}} + \cdots,$$

wo $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$ ist. Jedes dieser drei Reihenpaare für x und y eingesetzt liefert als niedrigste nicht verschwindende Potenz von z die fünfte, da die Coefficienten von z^4, nämlich $(0\alpha 1)_4$, von $z^{4\frac{1}{3}}$, nämlich $\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4$, von $z^{4\frac{2}{3}}$, nämlich $\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 + \frac{\beta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(0\alpha 1)_4$ sämmtlich verschwinden. Somit ist die obige Behauptung erwiesen.

71. Der Kegel $u_4 = 0$ kann noch eine Reihe anderer specieller Lagen in Bezug auf den Kegel $u_3 = x^2 y = 0$ einnehmen, indem er die singuläre Gerade $x = 0$, $y = 0$ passirt und längs dieser Geraden die eine oder andere singuläre Ebene tangirt, osculirt oder hyperosculirt. Geht $u_4 = 0$ einfach durch die singuläre Gerade hindurch, so wird $F = 0$. Der projicirende Kegel 12. Ord. hat wieder eine siebenfache Kante; zwei Mal zwei Mäntel durch diese Kante sind verzweigt, sie berühren die Gerade $x = 0$, $y = 0$; drei Mäntel sind linear, sie berühren je eine der drei Geraden $\frac{1}{y}\cdot(0yz)_4 = 0$. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besitzt genau dieselben fünf Zweige wie in Nr. 69, aber die beiden Reihen $x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots$, $y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots$ ergeben, in $f(xyz)$ eingesetzt, jetzt als niedrigste Potenz $z^{4\frac{1}{2}}$, so dass die Erniedrigung der Classe des Monoids durch den dreifachen Punkt 21 beträgt.

Berührt der Kegel $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $y = 0$ längs der singulären Kante $x = 0$, $y = 0$, so wird auch noch $G = 0$. Die linearen Mäntel in der siebenfachen Kante des projicirenden Kegels 12. Ord. bleiben dabei ungeändert; die vier übrigen Mäntel, welche die Kante $x = 0$, $y = 0$ berühren, bilden einen einzigen superlinearen Zweig mit den Reihen*) $x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^3 b z^{\frac{7}{4}} + \cdots$, $y = \varepsilon^3 \beta z^{\frac{7}{4}} + \cdots$, $\varepsilon^4 = 1$, wobei $a^2 + H = 0$ und $x_0 \beta + y_0 \gamma = 0$, $2 b \beta + I a = 0$.

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder wie in Nr. 69 aus drei linearen Zweigen, welche sich von den dortigen nicht besonders unterscheiden, und aus zwei verzweigten Aesten, deren Reihen hier die Form annehmen:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b z^2 + \cdots, \qquad y = \beta z^2 \pm \gamma z^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

wo $H + a^2 = 0$, $\beta + I = 0$, $b + K = 0$. Die linearen Zweige schneiden das Monoid in je vier Punkten, die beiden verzweigten Aeste in je fünf Punkten; die Gesammterniedrigung der Classe wird also 22.

Osculirt der Kegel $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$ längs der singulären Kante, so wird ferner noch $I = 0$. Die linearen Mäntel des projicirenden Kegels bleiben im Wesentlichen ungeändert; die vier übrigen Mäntel, welche die Kante $x = 0$, $y = 0$ berühren, sind zwei Mal zu zwei verzweigt; ihre Reihen sind:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b_i z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^2 \pm \gamma_i z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

wobei $a^2 + H = 0$, und $y_0 (b + K) + x_0 \beta = 0$, $\beta (b + K) - \frac{1}{2} M H = 0$.

Die drei linearen Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ bleiben wieder ungeändert, die beiden verzweigten Aeste dieser Curve sind:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \gamma z^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

wo $a^2 + H = 0$ und $2 \gamma + 3 M a = 0$. Die drei linearen Aeste schneiden das Monoid wieder in je vier Punkten, die beiden verzweigten Aeste zusammen in 11 Punkten, so dass sich die Gesammtreduction der Classe auf 23 beläuft.

Wird die singuläre Ebene $y = 0$ längs der singulären Kante hyperosculirt, so verschwindet noch M. Die linearen Mäntel des projicirenden Kegels ändern sich auch hier nicht; die vier übrigen, die Kante $x = 0$, $y = 0$ berührenden Mäntel sind mit einander verzweigt und werden durch die Reihen

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + c z^2 + \varepsilon d z^{\frac{9}{4}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \delta z^{\frac{9}{4}} + \varepsilon^3 \zeta z^{\frac{11}{4}} + \cdots,$$

$\varepsilon^4 = 1$ dargestellt, wobei $a^2 + H = 0$, $c + K = 0$ und $y_0 d + x_0 \delta = 0$,

*) Hier wie im Folgenden spreche ich von den Reihen des projicirenden Kegels, obgleich die Reihen seiner Berührungscurve gemeint sind.

$2ad\delta + Q = 0$. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder aus den drei linearen Zweigen und aus zwei verzweigten Aesten mit den Reihen:

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + b z^2 \cdots, \quad y = \pm \delta z^3 \pm \varepsilon z^{\frac{7}{2}} + \cdots,$$

wo $a^2 + H = 0$, $b + K = 0$, und $2a\delta + Q = 0$, $2a\varepsilon + 12QHK = 0$. Die linearen Aeste haben mit dem Monoide je vier, die beiden verzweigten Aeste je sechs consecutive Punkte gemein. Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt beträgt 24.

72. Wenn der Kegel $u_4 = 0$ die Doppelebene $x = 0$ längs der singulären Kante $x = 0$, $y = 0$ berührt, so wird $H = 0$. Der projicirende Kegel 12. Ord. aus dem Punkte $x_0, y_0, 0, 0$ besitzt wieder eine siebenfache Kante, durch welche jetzt folgende Mäntel gehen. Erstens existiren zwei lineare Mäntel

$$x = b_i z^2 + c_i z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \beta_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

mit den Tangenten $L + P\alpha + U\alpha^2 = 0$; zweitens giebt es zwei mit einander verzweigte Mäntel

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

für welche $a\alpha + G = 0$ und $y_0 a^2 - x_0 G = 0$ ist; drittens finden sich drei verzweigte Mäntel

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots,$$

$\varepsilon^3 = 1$, wobei $2b\alpha + G = 0$ und $b^2\alpha + Gb + L\alpha^2 = 0$ ist. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus zwei linearen Aesten

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

mit den Tangenten $2L + 3P\alpha + 4U\alpha^2 = 0$, und aus drei verzweigten Aesten:

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots$$

für welche $2b\alpha + G = 0$ und $b^2 + 2L\alpha = 0$ ist. Die beiden linearen Aeste schneiden das Monoid in je vier, die drei verzweigten Aeste zusammen in 14 consecutiven Punkten, so dass der dreifache Punkt die Classe um 22 Einheiten reducirt.

Eine Osculation zwischen dem Kegel $u_4 = 0$ und der Doppelebene $x = 0$ findet statt, wenn gleichzeitig $H = 0$ und $L = 0$ werden. Der projicirende Kegel 12. Ord. besitzt jetzt nur noch einen linearen Mantel $x = bz^2 + \cdots$, $y = \alpha z + \cdots$, mit der Tangente $P + U\alpha = 0$, die 6 übrigen Mäntel berühren die singuläre Kante $x = 0$, $y = 0$. Von diesen 6 Mänteln sind ein Mal zwei verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wobei $a\alpha + G = 0$ und $y_0 a^2 + x_0 G = 0$ ist, und einmal sind vier Mäntel verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \varepsilon^3 c z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{5}{4}} + \cdots,$$

$\varepsilon^4 = 1$, wobei $c^2\alpha + Gc + P\alpha^3 = 0$ und $2c\alpha + G = 0$ ist. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besitzt einen linearen Ast $x = bz^2 + \cdots$, $y = \alpha z + \cdots$, mit der Tangente $3P + 4U\alpha = 0$, und vier mit einander verzweigte Aeste mit den Reihen

$$x = \varepsilon^3 c z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{5}{4}} + \cdots, \quad \varepsilon^4 = 1,$$

wobei $2c\alpha + G = 0$ und $c^2 + 3P\alpha^2 = 0$ ist. Der lineare Ast schneidet das Monoid in vier, die vier verzweigten Aeste zusammen in 19 consecutiven Punkten; die Classenreduction wird also 23.

Soll der Kegel $u_4 = 0$ die Doppelebene $x = 0$ hyperosculiren, so müssen gleichzeitig H, L und P verschwinden. Dann berühren alle sieben Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. in der siebenfachen Kante die singuläre Gerade $x = 0$, $y = 0$; von denselben sind ein Mal zwei verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wo $a\alpha + G = 0$ und $y_0 a^2 - x_0 G = 0$ ist, und ein Mal sind fünf verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \varepsilon^4 d z^{\frac{9}{5}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{6}{5}} + \cdots, \quad \varepsilon^5 = 1,$$

wo $2d\alpha + G = 0$ und $d^2\alpha + Gd + U\alpha^4 = 0$ ist. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus fünf verzweigten Aesten mit den Reihen

$$x = \varepsilon^4 d z^{\frac{9}{5}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{6}{5}} + \cdots, \quad \varepsilon^5 = 1,$$

wobei: $2d\alpha + G = 0$ und $d^2 + 4U\alpha^3 = 0$ ist; sie schneiden das Monoid in 24 consecutiven Punkten. Der dreifache Punkt erniedrigt die Classe um 24 Einheiten.

73. Gehen wir nun zu den Monoiden über, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus einer dreifachen Ebene besteht, oder, wie wir kurz sagen wollen, zu den Monoiden mit uniplanarem dreifachen Punkt. Als singuläre Ebene nehmen wir die Ebene $x = 0$, während wiederum $u_4 = Fz^4 + z^3(Gx + Hy) + z^2(Ix^2 + 2Kxy + Ly^2) + \cdots$ gesetzt wird. Es sind dann folgende fünf Fälle zu unterscheiden: Die vier Geraden $u_4 = 0$, $x = 0$ oder $(0yz)_4 = 0$ sind alle verschieden, oder es fallen zwei zusammen, oder es fallen zwei Mal zwei zusammen, oder endlich es fallen drei resp. vier von ihnen zusammen. Als Scheitel

des projicirenden Kegels 12. Ord. können wir hier, unbeschadet der Allgemeinheit, den Punkt $x, y, z, w = 1, 0, 0, 0$ wählen, dieser Kegel besitzt stets eine achtfache Kante.

Falls die Geraden $(0yz)_4 = 0$ alle verschieden sind, sind die acht Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. paarweise verzweigt, ihre Reihen sind

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

wo $(0\alpha 1)_4 = 0$ ist, d. h. die Mäntel berühren die 4 Geraden $(0yz)_4 = 0$. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus 6 Curvenästen, welche drei Mal zu zwei verzweigt sind und durch die Reihen

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2, 3,$$

dargestellt werden, wobei $\frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 = 0$ ist. Jeder Curvenast schneidet das Monoid in vier consecutiven Punkten, wodurch sich die Classenerniedrigung des uniplanaren dreifachen Punktes auf 24 beziffert.

Fallen von den Geraden $(0yz)_4 = 0$ zwei mit der Geraden $y:z = \alpha:1$ zusammen, so sind von den 8 Mänteln des Kegels 12. Ord. zwei Mal je zwei und ein Mal vier verzweigt, die ersteren haben die früheren Reihen, die Reihen der letzteren sind

$$x = \pm c z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^3 d z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{5}{4}} + \cdots, \quad \varepsilon^4 = 1.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht wieder aus 6 Aesten, welche drei Mal zu zwei verzweigt sind; da aber die Tangenten dieser Aeste durch die Gleichung $\frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 = 0$ bestimmt werden, so fällt eine der drei Tangenten mit $y:z = \alpha:1$ zusammen. Der zu dieser Tangente gehörige Zweig schneidet das Monoid im Ganzen in 9 Punkten, die beiden übrigen Zweige in je 8 Punkten, so dass die Reduction der Classenzahl gleich 25 wird. Ein analoges Resultat kommt, wenn $(0yz)_4 = 0$ zwei Doppelwurzeln hat.

Fallen von den Geraden $(0yz)_4 = 0$ drei mit der Geraden $y:z = \alpha:1$ zusammen, so ist $\frac{\partial}{\partial \alpha}(0\alpha 1)_4 = 0$ und $\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}(0\alpha 1)_4 = 0$, von den acht Mänteln des Kegels 12. Ord. sind dann ein Mal zwei und ein Mal sechs verzweigt; die Reihen der letzteren werden

$$x = \pm d z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^4 e z^{\frac{10}{6}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{7}{6}} + \cdots, \quad \varepsilon^6 = 1.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besteht aus 6 Aesten, von welchen ein Mal zwei und ein Mal vier verzweigt sind; die Reihen der letzteren werden:

$$x = \pm c z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^3 d z^{\frac{7}{4}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{5}{4}} + \cdots, \quad \varepsilon^4 = 1.$$

Diese Reihen in die Gleichung des Monoids eingesetzt liefern als niedrigste Potenz $z^{1\frac{1}{2}}$, so dass die Gesammterniedrigung der Classe 26 beträgt.

Wird endlich $(0yz)_4 = 0$ eine reine vierte Potenz, so sind alle 8 Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. mit einander verzweigt, sie haben die Reihen

$$x = \pm e z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon^5 f z^{\frac{13}{8}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \varepsilon \beta z^{\frac{9}{8}} + \cdots, \quad \varepsilon^8 = 1.$$

Auch alle Aeste der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sind mit einander verzweigt; die Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt wird hier gleich 27.

74. Es ist noch die Aufgabe zu erledigen, die in dem letzten Capitel aufgestellten Flächen auch gestaltlich aus den früheren Flächen zu entwickeln. Zu diesem Ende gehen wir von dem Monoide aus, dessen Tangentialkegel 3. Ord. aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, siehe Nr. 57. Nehmen wir ferner an, dass die Hauptgeraden des Monoids alle reell sind, und lassen wir eine singuläre Ebene sich um die singuläre Axe drehen. Wird diese Drehung so lange fortgesetzt, bis die Ebene mit einer der beiden übrigen singulären Ebenen zusammenfällt, so geht das Monoid in ein solches über, dessen Tangentialkegel 3. Ord. aus einer einfachen und einer Doppelebene besteht. Wie diese neue Fläche entsteht, kann man sich leicht vorstellen, wenn man bei der Ausgangsfläche sich eine Ebene um die singuläre Axe drehen lässt und die Schnittcurven beachtet. Die Entstehung dieser neuen Fläche unterscheidet sich aber in etwas von den gestaltlichen Entwicklungsvorgängen, die wir in früheren Capiteln kennen gelernt haben. Dort handelt es sich um das Zusammenziehen einzelner Oeffnungen der Fläche, oder um das Zusammenziehen einzelner an den dreifachen Punkt angrenzender Schleifen der Fläche, die ebenfalls eine Einschnürung der Fläche bewirken. Hier dagegen werden unendlich viele Schleifen zusammengezogen, welche die singulären Ebenen b und c berühren, wie man sofort an der Abbildung der Fläche auf eine Ebene erkennt. In Figur 16 entsprechen nämlich den Kreisstücken Schleifen des zugehörigen Monoids, und durch Drehung der Ebene c in die Lage b ziehen sich alle diese Schleifen zusammen; jeder Schnitt durch den dreifachen Punkt geht aus der Form 16a in die Form 16b über. Nur diejenigen Schnitte machen eine Ausnahme, welche durch eine der vier Geraden in der Doppelebene gehen, sie haben die Form 16c. So kommt es, dass der projicirende Kegel 12. Ord. jetzt eine siebenfache Kante erhält, indem einer der beiden sich

berührenden superlinearen Mäntel in vier lineare Mäntel übergeht, analog dem Uebergang der Curve 10b in 10c. Gehen wir noch einmal auf die Abbildung 16 zurück, so erkennen wir, dass durch Zusammenziehen der Curven 1, 2, 3, 4 daselbst ein derartiges Verhalten bedingt wird; jeder solchen Curve entspricht nämlich eine Doppelschleife der Fläche, und während unendlich viele einfache Schleifen zusammengezogen werden, werden *vier* Doppelschleifen zusammengezogen, entsprechend den vier singulären Richtungen in der Doppelebene.

75. Nachdem nun das Monoid, dessen Tangentialkegel aus einer einfachen und einer Doppelebene besteht, seiner Gestalt nach bekannt ist, kann man die weiteren Specialisirungen dieser Fläche ganz wie früher durch Zusammenziehen einzelner Schleifen (Oeffnungen, welche an den dreifachen Punkt angrenzen) erhalten. Rücken von den Hauptgeraden in der Doppelebene zwei, drei oder vier zusammen, so verzweigen sich von den vier linearen Mänteln des projicirenden Kegels 12. Ord. zwei, drei oder vier, was durch Zusammenziehen von einer, zwei oder drei Schleifen erreicht wird.

76. Das Monoid, dessen Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen besteht, und bei welchem $u_4 = 0$ die singuläre Kante passirt, siehe Nr. 62, geht in ein Monoid mit Doppelebene über, wenn man eine der drei singulären Ebenen so lange dreht, bis sie mit einer der übrigen zusammenfällt. Der Uebergang ist genau wie in Nr. 74 zu bewerkstelligen. Man zieht nämlich zunächst die unendlich vielen Schleifen zusammen, welche die singulären Ebenen b und c berühren, und dann zieht man in den drei (nicht mit der singulären Geraden zusammenfallenden) Hauptrichtungen noch eine zweite Schleife zusammen. Dadurch geht von den drei Paar einfach verzweigten Mänteln, aus welchen der projicirende Kegel 12. Ord. vorher bestand, ein Paar in drei lineare Mäntel über, analog dem Uebergang der Curve 17 in drei gerade Linien, die sich in einem Punkte schneiden.

Aus dem soeben abgeleiteten Monoid erhält man alle übrigen Monoide mit einer einfachen und einer Doppelebene im dreifachen Punkt durch Zusammenziehen von Schleifen. Wenn $u_4 = 0$ die einfache Ebene längs der singulären Kante berührt, osculirt oder hyperosculirt, so bleiben die drei linearen Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. ungeändert, während die vier übrigen vier Mäntel entweder zwei Mal zu zwei oder ein Mal zu vier verzweigt sind; das letztere tritt bei einfacher Berührung und bei Hyperosculation ein. Den Uebergang von zwei Paar einfach verzweigten Aesten zu einem superlinearen Zweig 4. Ord. und umgekehrt zeigen die Figuren 18 und 19 resp. 18a und 19a, welche das Zusammenziehen einer an den dreifachen

Punkt angrenzenden Schleife bei dem zugehörigen Monoid leicht erkennen lassen.

Wenn $u_4 = 0$ die Doppelebene längs der singulären Kante berührt, osculirt oder hyperosculirt, so bleibt *ein Paar* einfach verzweigter Mäntel des projicirenden Kegels 12. Ord. ungeändert, während von den linearen Mänteln sich einer, zwei oder alle drei mit dem *andern* Mantelpaar verzweigen. Diesen Vorgang zeigt Figur 20, 20a, 20b, 20c; sie zeigen wiederum deutlich das Zusammenziehen der Schleifen bei dem zugehörigen Monoid.

77. Von den Monoiden mit *uniplanarem dreifachen Punkte* macht man sich am besten eine Vorstellung, wenn man die Schnitte untersucht, welche von einer sich um die Axe $y = 0$, $z = 0$ drehenden Ebene ausgeschnitten werden. Dieselben haben im Allgemeinen die Gestalt der Figur 21α; dreht sich die Ebene, bis sie eine der vier Hauptgeraden enthält, so geht 21α über in 21β, dreht sich die Ebene noch weiter, so geht 21β in 21γ über. Man erkennt so, dass das Monoid in der Nähe des dreifachen Punktes folgende Gestalt hat. Im Allgemeinen liegt über der dreifachen Ebene nur ein einziger reeller Flächentheil; derselbe macht an vier Stellen Falten, wie sie Figur 22 zeigt, jedoch existiren diese Falten bei jeder Hauptgeraden nur nach *einer* Seite hin (vom dreifachen Punkt aus gerechnet). Das Monoid besteht in der Umgebung des dreifachen Punktes nur aus einem einzigen' unpaaren Flächentheile.

Wenn $u_4 = 0$ die dreifache Ebene berührt, so geht der projicirende Kegel 12. Ord. aus 23 in 23α über, was mit dem Zusammenziehen einer Schleife bei dem zugehörigen Monoid identisch ist. Dasselbe besteht jetzt in der Nähe des dreifachen Punktes aus einem *unpaaren* Flächentheil und aus einem *paaren* Flächentheil, der sich *dornförmig* in den dreifachen Punkt erstreckt, und dort den unpaaren Flächentheil berührt. Wenn $u_4 = 0$ die dreifache Ebene zwei Mal berührt, so giebt es im dreifachen Punkt ausser dem unpaaren Flächentheil noch *zwei paare* Flächentheile. Findet zwischen $u_4 = 0$ und der singulären Ebene eine Osculation statt, so besteht das Monoid in der Nähe des dreifachen Punktes nur aus einem unpaaren Flächentheil, während bei einer Hyperosculation neben dem unpaaren wieder ein paarer Flächentheil erscheint.

Die Monoide mit Doppelgeraden.

78. Soll das Monoid $w \,.\, u_3 + u_4 = 0$ eine Doppelgerade besitzen, so muss dieselbe offenbar Doppelkante sowohl für den Kegel $u_3 = 0$ als auch für den Kegel $u_4 = 0$ sein. Wir können desshalb, falls die Doppelkante von $u_3 = 0$ keine isolirte ist, für diesen Kegel die Gleichung

$$u_3 = xyz + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0$$

wählen und ebenso für den Kegel 4. Ord. die Gleichung:

$$u_4 = z^2(Ix^2 + 2Kxy + Ly^2) + z(Mx^2 + 3Nx^2y + \cdots) + Qx^4 + \cdots = 0.$$

Dann existiren auf der Doppelgeraden $x = 0$, $y = 0$ des Monoids zwei Punkte (Pinch-points), für welche die beiden Tangentialebenen zusammenfallen; es sind dieses die beiden Punkte $z = \frac{1}{-2K \pm 2\sqrt{IL}}$. Die singulären Ebenen in diesen beiden Punkten sind: $x\sqrt{I} \pm y\sqrt{L} = 0$. Legt man durch die Doppelgerade und vier Hauptgeraden des Monoids einen Kegel 2. Ord., so schneidet dieser noch einen Kegelschnitt aus; es giebt im Ganzen 70 solcher Kegelschnitte. Dieselben liegen paarweise in 35 Ebenen, den 35 noch existirenden dreifachen Berührungsebenen. Ausserdem giebt es auf der Fläche noch 8 Geraden, welche den dreifachen Punkt nicht passiren.

Um die Reduction der Classenzahl in diesem Falle zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass die Curve 9. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ hier in die Doppelgerade und eine Curve 8. Ord. zerfällt. Die Doppelgerade reducirt demnach an und für sich die Classe um 4 Einheiten. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ schickt, abgesehen von der Doppelgeraden, noch drei Aeste durch den dreifachen Punkt, so dass derselbe die Classe nur noch um 9 Einheiten erniedrigt. Ausserdem geht je ein Ast jener Curve durch die beiden Pinch-points, welche das Monoid in je drei consecutiven Punkten schneiden, wie man sich sofort überzeugt, wenn man die Potenzreihen für die Curvenäste aufstellt. Die Gesammterniedrigung der Classenzahl wird demnach gleich 19.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die Pinch-points auch conjugirt imaginär sein können.

79. Ist die Doppelkante von $u_3 = 0$ isolirt, so lässt sich dieser Kegel in der Form schreiben

$$u_3 = (x^2 + y^2)z + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0,$$

während $u_4 = 0$ seine frühere Form beibehält. Die Pinch-points sind dann durch $z = \frac{2}{-(I+L) \pm \sqrt{(I-L)^2 + K^2}}$ bestimmt, und sind hier offenbar immer reell; natürlich sind auch die singulären Ebenen in diesen Punkten, nämlich

$$\sqrt{I - L \pm \sqrt{(I-L)^2 + 4K^2}} \cdot x$$
$$+ \sqrt{-I + L \pm \sqrt{(I-L)^2 + 4K^2}} \cdot y = 0,$$

stets reell.

80. Nehmen wir die Doppelkante von $u_3 = 0$ wieder, wie in Nr. 78, mit reellen Tangentialebenen an, so kann eine weitere Specialisirung

dadurch eintreten, *dass ein Mantel von* $u_4 = 0$ *einen Mantel von* $u_3 = 0$ *längs der Doppelkante berührt.* Dieses tritt ein, wenn die Constante L in der Gleichung von $u_4 = 0$ verschwindet. Dann giebt es längs der Doppelkante *eine feste und eine bewegliche Tangentialebene,* beide fallen zusammen für den Punkt $z = -\frac{1}{2K}$. Es existirt hier nur noch ein *einziger singulärer* Punkt mit zusammengefallenen Tangentialebenen, der durch Zusammenrücken zweier Pinch-points entstanden ist.

Die constante Tangentialebene schneidet das Monoid noch in einer Geraden $D + Pz + Uy = 0$, welche den singulären Punkt nicht enthält. Jeder projicirende Kegel 10. Ord. berührt die Doppelgerade in dem singulären Punkt, so dass derselbe eine Form annimmt, wie sie Figur 24 zeigt. Den Beweis dafür erhält man, wenn man die Reihen der Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ im Punkt $x = y = 0$, $z = -\frac{1}{2K}$ aufstellt. Die Reihen der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ in diesem Punkte werden $x = bz_1^3 + \cdots$, $y = az_1^2 + \cdots$, wenn $z_1 = z + \frac{1}{2K}$ ist; der zugehörige Curvenast schneidet desshalb das Monoid in 6 consecutiven Punkten. Die Erniedrigung der Classenzahl wird also gleich 19, genau wie in Nr. 78.

81) Wenn ein Mantel von $u_4 = 0$ einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante osculirt, so ist $P = 2KD$. Dann gibt es wieder eine *feste* und eine *bewegliche* Tangentialebene, welche für den Punkt $z = -\frac{1}{2K}$ zusammenfallen; erstere schneidet das Monoid noch in einer Geraden, welche durch den singulären Punkt $z = -\frac{1}{2K}$ hindurchgeht. Jeder projicirende Kegel 10. Ord. schickt *zwei* Mäntel durch denselben hindurch, er hat also die Form 25. Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besitzt in diesem Punkt ebenfalls zwei Aeste mit den Reihen $x = b_i z_1^2 + \cdots$, $y = a_i z_1 + \cdots$, wo $i = 1, 2$ und $z_1 = z + \frac{1}{2K}$ ist; jeder Ast schneidet das Monoid in 4 consecutiven Punkten. Der singuläre Punkt ist durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines gewöhnlichen Knotenpunktes entstanden. Die Reduction der Classe beträgt hier 21.

Findet zwischen einem Mantel des Kegels 4. Ord. und einem Mantel des Kegels 3. Ord. eine Hyperosculation statt, so hat man die Relation $U + 3CP - 3DO + JD^2 = 0$. Bei dem projirenden Kegel 10. Ord. sind jetzt die beiden Mäntel durch den singulären Punkt verzweigt, derselbe hat also die Form 26. Er erniedrigt die Classe des Monoids um 9 Einheiten, wie man durch Aufstellung der Curve

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ zeigt, und ist durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines biplanaren Knotenpunktes B_3 entstanden.

Ganz analog ergiebt sich allgemein folgendes Resultat: *Besitzen die Kegel $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ eine gemeinsame Doppelkante und hat ein Mantel des einen Kegels mit einem Mantel des andern Kegels $\varkappa$ consecutive Kanten gemein, welche mit der Doppelkante zusammenfallen, so besitzt das zugehörige Monoid eine Doppelkante und auf ihr einen singulären Punkt, der durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines biplanaren Knotenpunktes $B_{\varkappa-1}$ entstanden ist und die Classe demgemäss um $(\varkappa + 5)$ Einheiten erniedrigt.*

82) Eine andere Reihe von Monoiden erhalten wir, wenn beide Mäntel von $u_3 = 0$ beide Mäntel von $u_4 = 0$ längs der gemeinsamen Doppelkante berühren, was durch gleichzeitiges Nullsetzen von J und L erreicht wird. Dann giebt es längs der Doppelgeraden des Monoids *zwei constante Tangentialebenen.* Die Kegelschnitte, welche in den Ebenen durch die Doppelgerade liegen, schneiden sich alle in denselben beiden Punkten der Doppelgeraden, nämlich in den *beiden dreifachen Punkten des Monoids* $x = y = z = 0$ und $x = y = 0$, $z = -\frac{1}{2K}$. Die beiden dreifachen Punkte sind ganz gleichartig und erniedrigen die Classe, abgesehen von der Doppelgeraden, um 9, so dass die Gesammtreduction gleich 22 wird. Das Monoid erhält die beiden Gleichungen:

$$\begin{gathered} xyz + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 2Kz^2xy \\ + z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2 + Py^3) + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 \\ + 4Txy^3 + Uy^4 = 0, \end{gathered}$$

und:

$$\begin{gathered} -xyz_1 + x^3\left(A - \frac{M}{2K}\right) + 3x^2y\left(B - \frac{N}{2K}\right) + 3xy^2\left(C - \frac{O}{2K}\right) \\ + y^3\left(D - \frac{P}{2K}\right) + 2Kz_1{}^2xy + z_1(Mx^3 + \cdots) + (Qx^4 + \cdots) = 0, \\ z_1 = z + \frac{1}{2K}. \end{gathered}$$

83) Auch hier kann wieder die Relation $P = 2KD$ erfüllt sein, so dass der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ den *einen* Mantel von $u_3 = 0$ osculirt. Dann verschwindet der Coefficient von y^3 in der zweiten Flächengleichung, d. h. der Tangentialkegel in dem neuen dreifachen Punkte zerfällt in die Ebene $x = 0$ und einen Kegel 2. Ord. Während also der ursprüngliche dreifache Punkt nach wie vor die Classe um 9 Einheiten erniedrigt (abgesehen von der Doppelgeraden), erniedrigt der neue dreifache Punkt die Classe um 10 Einheiten, siehe Nr. 52.

Wie wir soeben gesehen haben erhält der Tangentialkegel im neuen dreifachen Punkt, ausser der Doppelgeraden des Monoids, eine weitere Doppelkante $x = 0$, $z_1 = 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right)$, sobald *ein* Mantel von $u_3 = 0$ *einen* Mantel von $u_4 = 0$ längs der Doppelgeraden osculirt. Wir bezeichnen nun den Tangentialkegel 3. Ord. im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{2K}$ mit $U_3 = 0$ und den Kegel 4. Ord. mit $U_4 = 0$ (so dass also die zweite Flächengleichung in $U_3 + U_4 = 0$ übergeht). Dann lässt sich leicht auf analytischem Wege zeigen und es ist geometrisch unmittelbar klar, dass der Kegel $U_4 = 0$ durch die Doppelkante $x = 0$, $z_1 = 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right)$ des Kegels $U_3 = 0$ hindurchgeht und daselbst mit dem *einen* Mantel dieses Kegels $(\varkappa - 3)$ consecutive Kanten gemein hat, wenn der *eine* Mantel von $u_3 = 0$ mit dem *einen* Mantel von $u_4 = 0$ $\varkappa$ consecutive Kanten gemein hat. Der neue dreifache Punkt reducirt demnach (abgesehen von der Doppelgeraden des Monoids) nach Nr. 59, die Classe um $(7 + \varkappa)$ Einheiten, so dass die gesammte Classenerniedrigung gleich $(20 + \varkappa)$ wird.

84) Es kann nun weiter eintreten, dass beide Mäntel von $u_4 = 0$ beide Mäntel von $u_3 = 0$ in der Doppelkante osculiren, dann ist gleichzeitig $P = 2KD$ und $M = 2KA$, d. h. der Kegel $U_3 = 0$ zerfällt in die drei Ebenen:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z_1 - 3x\left(B - \frac{N}{2K}\right) - 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right) = 0.$$

Die Classenreduction beträgt in diesem Falle 24. Finden zwischen den Mänteln von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ noch höhere Berührungen statt, so geht $U_4 = 0$ durch die Doppelkanten:

$$x = 0, \; z_1 = 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right) \quad \text{resp.} \quad y = 0, \; z_1 = 3x\left(B - \frac{N}{2K}\right)$$

einfach hindurch, oder berührt, osculirt oder hyperosculirt daselbst die Ebene $z_1 - 3x\left(B - \frac{N}{2K}\right) - 3y\left(C - \frac{O}{2K}\right) = 0$. Die Erniedrigung der Classe ist in jedem Falle leicht anzugeben.

85) Ausser den bereits aufgezählten *Monoiden mit zwei dreifachen Punkten* sind noch folgende zu erwähnen. Der Kegel $u_3 = 0$ kann *zwei* Doppelkanten besitzen, die *eine* ist Doppelgerade des Monoids, während zugleich der Kegel $U_3 = 0$ *zwei* Doppelkanten hat. Dann sind noch zwei Fälle zu unterscheiden; entweder die Ebene von $u_3 = 0$ ist mit der Ebene von $U_3 = 0$ identisch und die Kegel 2. Ord., welche als Theile von $u_3 = 0$ resp. $U_3 = 0$ auftreten, berühren sich längs der Doppelgeraden des Monoids, oder die Ebene von $u_3 = 0$ berührt den Kegel 2. Ord. von $U_3 = 0$ und die Ebene von $U_3 = 0$ berührt den Kegel 2. Ord. von $u_3 = 0$.

Der Kegel $u_3 = 0$ kann endlich *drei* Doppelkanten besitzen, die *eine* ist Doppelgerade des Monoids, während der Kegel $U_3 = 0$ ebenfalls drei Doppelkanten besitzt. Die beiden Ebenen von $u_3 = 0$, welche sich in der Doppelgeraden des Monoids schneiden, sind identisch mit zwei Ebenen von $U_3 = 0$. Die Classe einer solchen Fläche ist $36 - 26 = 10$. Ihre Gleichung lässt sich schreiben:

$$xyzw + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4 = 0.$$

Besitzt dieses Monoid noch zwei Knotenpunkte, so ist seine Classe gleich 6 und seine Gleichung wird:

$$xyzw + (ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 = 0.$$

Es mag hier noch erwähnt werden, dass auch bei den in Nr. 78, 79, 80 und 81 aufgezählten Monoiden der Kegel $u_3 = 0$ *zwei* resp. *drei* Doppelkanten besitzen und $u_4 = 0$ eventuell durch dieselben hindurchgehen und daselbst berühren kann. Ferner mag hervorgehoben werden, dass man zu keinen neuen Monoiden gelangt, wenn man die Doppelkante des Kegels $u_3 = 0$ zur dreifachen oder vierfachen Kante des Kegels $u_4 = 0$ nimmt.

86) Es sollen nun diejenigen Monoide mit Doppelgeraden ihre Erledigung finden, deren Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine Rückkehrkante, Selbstberührungskante oder dreifache Kante besitzt. Hat $u_3 = 0$ *eine Rückkehrkante*, welche für $u_4 = 0$ Doppelkante ist, so wird:

$$u_3 = x^2z + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

während $u_4 = 0$ die in Nr. 78 angegebene Form beibehält. Auf der Doppelgeraden des Monoids existirt jetzt nur noch ein einziger gewöhnlicher Pinch-point $z = \frac{L}{K^2 - JL}$ mit der singulären Ebene $Kx + Ly = 0$, während der andere Pinch-point in den dreifachen Punkt hereingerückt ist. Von den vier Aesten, welche die Berührungscurve des projicirenden Kegels 10. Ord. durch den dreifachen Punkt schickt, berührt *einer* die Doppelgerade und hat die Reihen: $x = bz^3 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$, wobei $D\alpha + L = 0$ und $2b + 3C\alpha^2 + 2K\alpha = 0$. Man findet, dass die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt jetzt 12 beträgt, sie hat sich also durch Hereinrücken des Pinch-point um 3 vermehrt.

Berührt ein Mantel des Kegels $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Rückkehrkante, so wird $L = 0$. Dann giebt es längs der Doppelkante eine *constante* Tangentialebene $x = 0$ und eine *bewegliche* $x\left(J + \frac{1}{z}\right) + 2yK = 0$. Beide Pinch-points sind hier in den dreifachen Punkt hereingerückt. Von den vier Aesten der Berührungscurve des projicirenden Kegels 10. Ord. berührt wiederum *einer* die Doppelgerade, er hat die Reihen $x = bz^4 + \cdots$, $y = \alpha z^3 + \cdots$. Die Reduction der Classe des Monoids durch den dreifachen Punkt beträgt 15.

87) Besitzt $u_3 = 0$ *eine Selbstberührungskante*, welche für $u_4 = 0$ Doppelkante ist, so schreiben wir:

$$u_3 = x(Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz),$$

während u_4 seine frühere Form nicht ändert. Dann giebt es auf der Doppelgeraden wiederum nur einen einzigen Pinch-point $z = \frac{2DL}{K^2 - JL}$ mit der singulären Ebene $Kx + Ly = 0$; der andere ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt, von welchen zwei die Doppelgerade berühren und mit einander verzweigt sind, ihre Reihen sind: $x = bz^2 + \cdots$, $y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots$. Von den drei Aesten der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ im dreifachen Punkt sind ebenfalls zwei verzweigt, sie haben die Reihen:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wobei $Bb + L = 0$ und $B\alpha^2 + 4Db = 0$ ist. Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt wird in Folge dessen gleich 13.

Berührt *einer* der Mäntel von $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, so verschwindet der Coefficient von z^2y^2, nämlich L, und es giebt in der Doppelgeraden eine *constante* und eine *bewegliche* Tangentialebene. Beide Pinch-points sind in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt, von welchen zwei die Doppelgerade berühren; ihre Reihen sind $x = b_i z^3 + \cdots$, $y = \alpha_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$. Auch von den drei Aesten der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ berühren zwei die Doppelgerade und besitzen die Reihen: $x = b_i z^3 + \cdots$, $y = \alpha_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$; sie schneiden desshalb das Monoid in je 7 consecutiven Punkten. Demnach wird die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt gleich 17.

Osculirt *einer* der Mäntel von $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$ längs der Selbstberührungskante, so verschwindet auch noch P. Dann sind die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord., welche die Doppelgerade tangiren, verzweigt und ihre Reihen werden $x = \pm dz^{\frac{7}{2}} + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$, wo $B\alpha + 2K = 0$ und: $4Dd^2 - U\alpha^4 = 0$. Von den drei Aesten der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ berühren wieder zwei die Doppelgerade; der *eine* hat die Reihen $x = bz^3 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$, wo $B\alpha + K = 0$ und $4Db + K\alpha = 0$ ist, der *andere* hat die Reihen $x = cz^4 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$, wo $B\alpha + 2K = 0$ und $Kb - 2U\alpha^3 = 0$ ist. Der erstere Ast schneidet das Monoid in 7, der letztere in 8 consecutiven Punkten, so dass die Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt gleich 18 wird.

Osculirt *einer* der beiden Mäntel, die $u_4 = 0$ durch die Selbstberührungskante schickt, den Kegel:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz = 0,$$

so gelten die Relationen $L = 0$, $BK - DP = 0$. Die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord., welche die Doppelgerade des Monoids berühren, sind dann ebenfalls mit einander verzweigt, aber ihre Reihen werden jetzt:

$$x = cz^3 \pm dz^{\frac{7}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

wo

$$\alpha = \frac{2K}{B} \quad \text{und} \quad c = -\frac{2K^2}{BD}$$

ist. Ebenso berühren zwei Aeste der Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ganz wie vorher, die Doppelgerade; ihre Reihen sind:

$$x = b_i z^3 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

wobei

$$\alpha_1 = \frac{K}{B}, \quad b_1 = -\frac{3}{4}\frac{P\alpha}{B} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{2K}{B}, \quad b_2 = -\frac{P\alpha}{B}$$

ist. Der erstere Zweig schneidet das Monoid in 7, der letztere in 8 consecutiven Punkten; die Classenerniedrigung wird wieder 18.

Es ist ferner möglich, dass *ein* Mantel von $u_4 = 0$ mit dem Kegel $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz = 0$ vier, fünf, sechs, oder sieben consecutive Kanten gemein hat, die alle in die singuläre Gerade $x = 0$, $y = 0$ hereingerückt sind. Dann wird die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt sich auf 19, 20, 21 oder 22 belaufen. Der Beweis lässt sich geometrisch leicht führen und ist ganz analog dem Beweise in Nr. 59. Dabei werden die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord., welche die Doppelgerade des Monoids tangiren, verzweigt sein, wenn die Zahl der consecutiven Kanten fünf oder sieben beträgt; beträgt sie jedoch vier oder sechs, so tritt eine Berührung der beiden Mäntel ein.

88) Es kommen jetzt die Monoide an die Reihe, deren Kegel $u_3 = 0$ in *drei sich in einer Geraden schneidende Ebenen* zerfällt, also $u_3 = xy(x + \varrho y)$, und deren Kegel $u_4 = 0$ die singuläre Gerade zur Doppelkante hat. Hat dieser letztere Kegel keine besondere Lage zu den drei Ebenen $u_3 = 0$, so ist seine Gleichung wieder die in Nr. 78 angenommene. Dann giebt es längs der Doppelgeraden des Monoids zwei *constante* Tangentialebenen, nämlich $Jx^2 + 2Kxy + Ly^2 = 0$. Der projicirende Kegel 10. Ord. aus dem Punkte $x_0, y_0, 0, 0$ schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt, welche alle vier die Doppelgerade berühren und deren Reihen die Form haben:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Die Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ schickt drei Aeste durch den dreifachen Punkt, auch sie berühren alle die Doppelgerade und haben Entwicklungen von der Form:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt beträgt offenbar 18. *Die vorliegende Fläche entsteht aus dem Monoid mit zwei dreifachen Punkten durch Zusammenrücken der beiden dreifachen Punkte.*

Berührt *ein* Mantel des Kegels $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$, so wird $L = 0$, und die constanten Tangentialebenen werden $x = 0$ und $Jx + 2Ky = 0$. Die Entwicklungen für die vier Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. werden:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

respective

$$x = \pm b z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

d. h. zwei sind verzweigt. Die Reihen der drei Zweige von $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sind $x = a_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$, respective $x = b z^3 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$; die Classenerniedrigung durch den dreifachen Punkt wird in Folge dessen gleich 19.

Osculirt *ein* Mantel des Kegels $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$, so wird $L = 0$ und $P = 0$. Zwei Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. haben wieder die Entwicklungen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

die beiden andern aber ergeben die Reihen:

$$x = \pm b z^3 + c_i z^4 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \beta_i z^3 + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

Ebenso werden zwei Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wieder durch die Reihen $x = a_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z^2 \cdots$, $i = 1, 2$, die dritte aber durch die Reihen $x = c z^4 \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$ dargestellt. So ergiebt sich als Classenerniedrigung die Zahl 20.

89) Berühren die *beiden* Mäntel von $u_4 = 0$ die singulären Ebenen $x = 0$, $y = 0$ respective, so wird $J = 0$ und $L = 0$. Jetzt sind die vier Mäntel des Kegels 10. Ord. zwei Mal zu zwei mit einander verzweigt, sie besitzen die Reihen:

$$x = \pm b z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Die Reihen der drei Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ beginnen mit: $x = a z^2$, $y = \alpha z^2$, resp. $x = b z^3$, $y = \alpha z^2$, resp. $x = a z^2$, $y = \beta z^3$; die Classenerniedrigung wird wiederum gleich 20.

Osculirt *ein* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$, während der *andere* die Ebene $y=0$ berührt, so wird ausser $J=0$, $L=0$, auch noch $P=0$. Zwei Mäntel des Kegels 10. Ord. haben die früheren Reihen:

$$x = az^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots,$$

die beiden andern haben die neuen Reihen:

$$x = \pm bz^3 + c_i z^4 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \beta_i z^3 + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

Die Reduction der Classe wird 21.

Osculiren die *beiden* Mäntel von $u_4 = 0$ die singulären Ebenen $x=0$, $y=0$ respective, so wird $J=0$, $L=0$, $M=0$, $P=0$ und die Reduction der Classe berechnet sich auf 22. Die Reihen der vier Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. sind dann:

$$x = \pm bz^3 + c_i z^4 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \beta_i z^3 \cdots, \quad i = 1, 2,$$

respective

$$x = az^2 + b_i z^3 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^3 + \gamma_i z^4 + \cdots.$$

Alle in den letzten beiden Nummern erhaltenen Monoide können als Monoide mit zwei zusammengefallenen dreifachen Punkten aufgefasst werden.

90) Es erübrigen nun noch diejenigen Monoide mit Doppelgeraden, deren Tangentialkegel $u_3 = 0$ in eine einfache und eine Doppelebene oder in eine dreifache Ebene zerfällt. Beginnen wir mit dem ersteren Falle und nehmen wir zunächst an, dass die Doppelkante von $u_4 = 0$ nicht mit der dreifachen Kante von $u_3 = 0$ zusammenfällt, dann können wir $u_4 = 0$ in seiner früheren Form (Nr. 78) belassen und

$$u_3 = x^2(Ax + By + Cz)$$

setzen. Auf der Doppelgeraden giebt es ersichtlich nur einen gewöhnlichen Pinch-point; der andere ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt jetzt *fünf* Mäntel durch den dreifachen Punkt, nämlich zwei lineare Mäntel $x = b_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \cdots$, welche die Geraden $Lz^2 + Pzy + Uy^2 = 0$ berühren, und drei verzweigte Mäntel:

$$x = \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

welche die Gerade $By + Cz = 0$ berühren. Die Curve 8. Ord. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ besitzt *vier* Zweige, davon sind zwei linear, nämlich $x = b_i z^2 + \cdots$, $y = \alpha_i z + \cdots$, $i = 1, 2$, und zwei verzweigt, nämlich:

$$x = \pm bz^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

sie berühren die Gerade $By + Cz = 0$. Die vier Aeste schneiden das Monoid in je vier consecutiven Punkten, so dass die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt (abgesehen von der Doppelgeraden) gleich 16 wird.

Berührt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene, so wird $L = 0$; es giebt auf der Doppelgeraden keinen Pinch-point mehr, beide sind in den dreifachen Punkt hereingerückt. Die fünf Mäntel des Kegels 10. Ord. erhalten jetzt die Reihen:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

respective
$$x = bz^3 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective
$$x = \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots.$$

Die vier Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ werden durch die Reihen:
$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

resp.
$$x = bz^3 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

resp.
$$x = \pm b z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots.$$

dargestellt. Die Classe wird durch den dreifachen Punkt um 19 Einheiten erniedrigt.

Osculirt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene, so wird $L = 0$ und $P = 0$ und die fünf Mäntel des Kegels 10. Ord. werden durch die Reihen:

$$x = \pm c z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

respective
$$x = \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots$$

gegeben. In Folge dessen wird die Reduction der Classe gleich 20.

Hier ist noch zu erwähnen, dass die Hauptgeraden des Monoids, welche in der Ebene $Ax + By + Cz = 0$ liegen, in die dreifache Kante von $u_3 = 0$ hereinrücken und so die Classe noch weiter erniedrigen können, vergl. 71.

91) Fällt die Doppelkante von $u_4 = 0$ mit der dreifachen Kante von $u_3 = 0$ zusammen, so können wir $u_3 = x^2 y$ setzen, $u_4 = 0$ aber in seiner früheren Form nehmen. Dann sind die Tangentialebenen längs der Doppelgeraden *constant*. Die Mäntel des Kegels 10. Ord., welcher die Fläche aus dem Punkte x_0, y_0, 0, 0 projicirt, erhalten die Reihen:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

respective
$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Reihen der vier Zweige der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ werden:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

respective
$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

Die Classenerniedrigung beträgt also 20.

Berührt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$, wird also $J = 0$, so besitzt der Kegel 10. Ord. wieder zwei Mäntel mit den Reihen:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und einen mit den Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots;$$

nur die beiden letzten Mäntel erhalten die neuen Reihen:

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Die Classenerniedrigung wird 21.

Osculirt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$, wird also auch noch $M = 0$, so besitzt der Kegel 10. Ord. immer noch zwei Mäntel mit den Reihen:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und einen mit den Reihen

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots;$$

dagegen werden die beiden noch übrigen Mäntel durch die Reihen:

$$x = a z^2 + b_i z^3 \cdots, \quad y = \pm \beta z^3 + \cdots, \quad i = 1, 2$$

dargestellt. Die Classenerniedrigung berechnet sich auf 22.

Berührt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene $x = 0$, dann wird $L = 0$, und der Kegel 10. Ord. besitzt einen Mantel mit den Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \alpha z \cdots,$$

zwei weitere Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und endlich zwei verzweigte Mäntel mit den Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Die Classenerniedrigung beträgt 21.

Osculirt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Doppelebene $x = 0$, dann wird $L = 0$, $P = 0$, und der Kegel 10. Ord. besitzt zwei Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

und drei verzweigte Mäntel mit den Reihen:

$$x = c z^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1.$$

Die Classenerniedrigung beträgt 22.

Berühren die Mäntel von $u_4 = 0$ respective die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$, so wird $J = 0$ und $L = 0$. Der projicirende Kegel 10. Ord. hat hier einen linearen Mantel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

und zwei Mal zwei verzweigte Mäntel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

respective

$$x = \alpha z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Der dreifache Punkt erniedrigt die Classe wieder um 22 Einheiten.

Wenn der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $y = 0$ osculirt, während der *andere* die Ebene $x = 0$ berührt, so ist $J = 0$, $L = 0$ und $M = 0$. Der Kegel 10. Ord. hat wieder den linearen Mantel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

die beiden verzweigten Mäntel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

und zwei sich berührende Mäntel:

$$x = \alpha z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^3 + \cdots.$$

Die Reduction der Classe wird 23.

Wenn umgekehrt der *eine* Mantel von $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$ osculirt, während der *andere* die Ebene $y = 0$ tangirt, so ist $J = 0$, $L = 0$ und $P = 0$. Der Kegel 10. Ord. hat jetzt zwei verzweigte Mäntel:

$$x = \alpha z^2 + \cdots, \quad y = \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots$$

und drei verzweigte Mäntel:

$$x = cz^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1.$$

Die Reduction der Classe ist wieder 23.

Osculiren die *beiden* Mäntel von $u_4 = 0$ respective die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, so wird endlich: $J = 0$, $L = 0$, $M = 0$, $P = 0$. Der projicirende Kegel 10. Ord. besitzt zwei sich berührende Mäntel $x = \alpha z^2 + \cdots$, $y = \pm \beta z^3 + \cdots$ und drei verzweigte Mäntel:

$$x = cz^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots.$$

Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt (abgesehen von der Doppelgeraden) beträgt 24.

92) Zum Schluss sind noch die Monoide mit Doppelgeraden zu behandeln, deren *dreifacher Punkt uniplanar ist*, für welche also $u_3 = x^3$ wird. Die Doppelkante von $u_4 = 0$ liegt in der singulären Ebene. Der projicirende Kegel 10. Ord. schickt sechs Mäntel durch den dreifachen Punkt, davon sind zwei Mal zwei verzweigt, sie berühren die Geraden $Lz^2 + Pzy + Uy^2 = 0$ und ihre Reihen sind:

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2;$$

die beiden übrigen berühren sich und haben die Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots.$$

Die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ besitzt fünf Aeste, davon sind zwei Mal zwei verzweigt, nämlich:

$$x = \pm b_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha_i z + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

und einer ist linear, nämlich $x = a z^2 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$. Die Erniedrigung der Classe durch den dreifachen Punkt wird demnach 22. Würde $u_4 = 0$ zwei Doppelkanten haben, welche beide in der singulären Ebene liegen, so würde das Monoid zwei Doppelgeraden haben. Der projicirende Kegel würde dann nur von der 8. Ordnung sein und nur vier Mäntel durch den dreifachen Punkt schicken, welche zu zwei die beiden Doppelgeraden berühren. Die Erniedrigung der Classe würde, abgesehen von den beiden Doppelgeraden, 20 betragen.

Berührt *ein* Mantel von $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$ längs der Doppelkante, so wird $L = 0$. Die sechs Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. erhalten dann die Reihen:

$$x = \pm b z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

respective

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective

$$x = \varepsilon^2 b z^{\frac{5}{3}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1.$$

Die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt steigt desshalb auf 23.

Osculirt *ein* Mantel von $u_4 = 0$ die singuläre Ebene $x = 0$ längs der Doppelkante, so wird auch noch $P = 0$, und die Reductionszahl der Classe steigt auf 24. Die 6 Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. werden jetzt durch die Reihen:

$$x = a z^2 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

respective

$$x = \varepsilon^3 c z^{\frac{8}{5}} + \cdots, \quad y = \varepsilon \alpha z^{\frac{6}{5}} + \cdots, \quad \varepsilon^5 = 1,$$

dargestellt, wobei $3c^2 + 2K\alpha = 0$ und $-2c^3 + U\alpha^4 = 0$ ist.

93) Hiermit ist die Gesammtheit der Monoide mit Doppelgeraden erschöpft, insofern es sich um eine Specialisirung des dreifachen Punktes in der Richtung der Doppelgeraden handelt. Es mag jedoch besonders hervorgehoben werden, dass noch weitere Specialisirungen des dreifachen Punktes in andern Richtungen sich einstellen können.

Dazu ist natürlich vor allen Dingen erforderlich, dass der Kegel $u_3 = 0$ mehrere singuläre Kanten besitzt. Ist dieses der Fall, so kann in der Richtung einer jeden solchen Kante eine Reihe weiterer Specialisirungen eintreten, sowie wir dieses in den vorhergehenden Capiteln gesehen haben. Auch die gestaltliche Wirkung jener Specialisirungen haben wir bereits studirt, so dass wir hier davon absehen können. Schliesslich ist noch hinzuzufügen, dass *zwei* resp. *drei* Doppelkanten des Kegels $u_3 = 0$ zu Doppelgeraden des Monoids werden können. *Die letzteren Flächen nennt man Steiner'sche Flächen*, sie sollen in einem weiteren Capitel eine besondere Berücksichtigung erfahren.

94) Es mögen hier einige wenige Monoide mit Doppelgeraden eine kurze Behandlung finden. Zunächst können die Monoide mit *einer* Doppelgeraden noch *vier* Knotenpunkte besitzen. Legt man durch diese Knotenpunkte und die Doppelgerade einen Kegel 2. Ord., dessen Scheitel sich im dreifachen Punkt des Monoids befindet, so schneidet derselbe aus der Fläche einen Kegelschnitt, der die vier Knotenpunkte enthält und die Doppelgerade schneidet. Die Ebene durch diesen Kegelschnitt berührt längs desselben, trifft also die Doppelgerade in einem der beiden Pinch-points; durch den andern Pinch-point giebt es keine derartige Ebene. Berührt der Kegel 2. Ord. den Tangentialkegel 3. Ord. längs seiner Doppelkante, so fallen die beiden Pinch-points zusammen und zugleich rückt einer der vier Knotenpunkte in diesen singulären Punkt hinein.

Die Monoide mit *zwei* Doppelgeraden können noch *zwei* Knotenpunkte besitzen. Jede Ebene durch die beiden Knotenpunkte schneidet natürlich zwei Kegelschnitte aus; zwei von diesen Ebenen sind besonders ausgezeichnet, sie berühren das Monoid längs eines Kegelschnitts und schneiden die Doppelgeraden in ihren Pinch-points. Die Gleichung dieser Fläche lässt sich schreiben:

$$x(x^2 + 2azy) + \varrho(x^2 + 2byz + 2czx + 2dxy)^2 = 0.$$

Wird in dieser Gleichung $c = 0$ und $d = 0$ gesetzt, so giebt es auf jeder Doppelgeraden einen singulären Punkt, der durch Zusammenrücken zweier Pinch-points und eines gewöhnlichen Knotenpunktes entstanden ist. Unter den Ebenen durch beide singuläre Punkte giebt es zwei, welche längs eines Kegelschnitts berühren.

Die Monoide mit *zwei dreifachen Punkten* können noch *drei* Knotenpunkte aufweisen. Von jedem Knotenpunkt aus giebt es zwei Tangentenkegel 2. Ord. an das Monoid. Diese Monoide bilden einen speciellen Fall des Symmetroids; man erhält dasselbe, wenn von den vier Grundflächen des Flächengebüsches zweiter Ordnung in Nr. 20 und 21 zwei in Doppelebenen ausarten. Die beiden dreifachen Punkte des Symmetroids rücken zusammen, wenn von den vier Grundflächen des Gebüsches eine in eine Doppelebene und eine in ein Ebenenpaar ausartet, dessen eine Ebene mit der Doppelebene identisch ist.

95) Wir wenden uns jetzt der *gestaltlichen Discussion* der in diesem Capitel aufgezählten Flächen zu. Hier ist zunächst zu bemerken, dass das Verhalten der Monoide längs einer Doppelgeraden ein dreifaches sein kann. Giebt es auf der Doppelgeraden keine reellen Pinch-points, so giebt es in jedem Punkt derselben zwei reelle Tangentialebenen; durchläuft der Punkt die ganze Doppelgerade, so vertauschen sich die beiden Tangentialebenen. Bei der Abbildung des Monoids auf die Ebene stellt sich die Umgebung der Doppelgeraden in einer Weise dar, wie sie Figur 27 zeigt. Ist das ebene Bild ein Kreis (oder Oval), welcher den Bildpunkt der Doppelgeraden einschliesst, so besteht die zugehörige Curve auf dem Monoid aus vier durch den dreifachen Punkt verlaufenden unendlichen Aesten, die sich ganz in der Nähe der Doppelgeraden hinziehen. Ein solches Monoid kann man entstehen lassen aus einem Monoide, dessen Abbildung durch Fig. 27a dargestellt wird; dem kleinen Kreise entspricht auf der Fläche eine Curve, welche aus zwei unendlich langen Zweigen besteht, die sich in der Nähe der Doppelkante von $u_3 = 0$ hinziehen. Lässt man den Kreis immer kleiner werden, bis er sich auf einen Punkt zusammenzieht, so rücken die beiden unendlich langen Zweige ebenfalls zusammen und bilden so die Doppelgerade (da sie vorher auf getrennten Flächentheilen lagen).

Giebt es auf der Doppelgeraden zwei reelle Pinch-points, und giebt es in dem dreifachen Punkt zwei reelle Tangentialebenen durch dieselbe, so ist das Stück der Doppelgeraden zwischen den beiden Pinch-points isolirt und man kann die unendlich ferne Ebene so wählen, dass $u_4 = 0$ eine isolirte Doppelkante erhält. Dazu stellt Figur 28 das Bild des Monoids in der Nähe der Doppelgeraden dar, die Richtungen t_1 und t_2 gehören den Pinch-points zu; dem kleinen Kreise entspricht auf dem Monoid eine Curve, welche aus vier Schleifen besteht, die abwechselnd auf der einen und der andern Seite des dreifachen Punktes liegen. Zieht sich der Kreis in einen Punkt zusammen, so ziehen sich die Schleifen in die Stücke der Doppelgeraden zwischen den Pinch-points und dem dreifachen Punkt zusammen. Wenn die isolirte Doppelkante von $u_4 = 0$ wegfällt, so verschwindet gleichzeitig die Doppelgerade und wir erhalten das Monoid, wie es in Nr. 52 untersucht wird. Der gestaltliche Uebergang von der letzteren Fläche zur ersteren wird bewerkstelligt, indem man die Flächentheile längs *zweier Stücke* der Doppelkante, die im dreifachen Punkt aneinander stossen, zusammenwachsen lässt. Das Zusammenwachsen tritt also hier, nicht wie früher in einzelnen Punkten, sondern längs eines Stückes einer Geraden ein.

Liegen auf der Doppelgeraden zwei reelle Pinch-points, giebt es aber in dem dreifachen Punkt keine reellen Tangentialebenen durch dieselbe, so sind die Stücke der Doppelgeraden zwischen den Pinch-points und dem dreifachen Punkt isolirt und man kann wieder die unendlich ferne Ebene so wählen, dass die Doppelkante von $u_4 = 0$ isolirt wird. Bildet man die Fläche wieder auf die Ebene ab, so entsprechen den Pinch-points wieder zwei Richtungen t_1 und t_2, Figur 29; dem kleinen Kreise entspricht auf der Fläche eine geschlossene Curve, welche in der Nähe der Doppelgeraden verläuft und sich zwischen den beiden Pinch-points zwei Mal hin und zurückbewegt. Zieht sich der Kreis in einen Punkt zusammen, so geht die Curve auf der Fläche in das vierfach zu zählende Stück der Doppelgeraden zwischen den Pinch-points über. Verschwindet die isolirte Doppelkante von $u_4 = 0$, so verschwindet die Doppelgerade des Monoids, und es geht in ein Monoid über, dessen Tangentialkegel $u_3 = 0$ eine isolirte Doppelkante besitzt, siehe Nr. 56. Der Uebergang von letzterer Fläche zur ersteren ist unschwer zu verfolgen; der dornförmige Theil derselben zieht sich zu einem Stück der Doppelgeraden zusammen, während gleichzeitig ein Zusammenwachsen des angrenzenden Flächengebiets mit sich selbst stattfindet.

96. *Die Monoide mit einer Doppelgeraden und reellen Pinchpoints*, für welche die an den dreifachen Punkt angrenzenden Stücke der Doppelgeraden *nicht isolirt* sind, bilden den Ausgangspunkt für eine Reihe weiterer Flächen. Zunächst können die beiden Pinch-points zusammenrücken, ein Vorgang, den die Figur 24a und 24 illustrirt; dieses tritt ein, wenn ein Mantel $u_4 = 0$ einen Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante berührt. Soll ein Mantel von $u_4 = 0$ mit einem Mantel von $u_3 = 0$ längs der Doppelkante $\varkappa$ consecutive Kanten gemein haben, so kann man von einem Monoid mit Doppelgeraden und getrennten Pinch-points ausgehen, welches noch einen Knotenpunkt $B_{\varkappa-1}$ besitzt. Durch gleichzeitiges Zusammenrücken der beiden Pinch-points und des Knotenpunktes $B_{\varkappa-1}$ entsteht dann die gesuchte Fläche. Solche Uebergänge schildern die Figuren 25a und 25 respective 26a und 26.

97. Zwei Pinch-points können auch zusammenrücken, ohne dass ihre singulären Ebenen identisch werden. Die singulären Ebenen erhält man ja, indem man zu den beiden Tangentialebenen von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in der Doppelkante das gemeinschaftliche harmonische Ebenenpaar construirt. Ist dieses Ebenenpaar und ebenso das Tangentialebenenpaar von $u_3 = 0$ fixirt, welches jenes harmonisch trennt, so kann man eine der beiden Tangentialebenen von $u_4 = 0$ noch beliebig wählen, die andere ist dann völlig bestimmt. Lässt man nun eine dieser beiden Ebenen mit einer der beiden Tangentialebenen von $u_3 = 0$ zusammenfallen, so fallen auch die zweiten Ebenen dieser

Ebenenpaare zusammen und die beiden Pinch-points rücken zusammen, ohne dass sich die Lage ihrer singulären Ebenen ändert. In diesem Falle entsteht ein dreifacher Punkt, wie ihn Figur 30 zeigt; man macht sich am besten an der Zeichnung den Uebergang aus den Pinch-points in den dreifachen Punkt klar; lässt man nämlich die Kante durch a mit der Kante durch a_1 und die Kante durch b mit der Kante durch b_1 zusammenwachsen, so geht der dreifache Punkt in zwei Pinch-points über.

Die hierher gehörigen Monoide zerfallen noch hinsichtlich der gegenseitigen Lage ihrer dreifachen Punkte in zwei Gruppen. Die constanten Tangentialebenen längs der Doppelgeraden schneiden das Monoid noch in je einer Geraden. Diese Geraden können nun die Doppelgerade in Punkten schneiden, welche durch die dreifachen Punkte *getrennt* oder *nicht getrennt* werden. Im letzteren Falle liegen die paaren Manteltheile der Kegel 3. Ord. in den beiden dreifachen Punkten in *demselben* Winkelraum (oder in Scheitelwinkeln, welche durch Projection immer in jenen Fall übergeführt werden können); zugleich liegen auf dem paaren Mantel von $u_3 = 0$ (und ebenso von $U_3 = 0$) eine *gerade* Anzahl von Hauptgeraden. Im ersteren Falle dagegen liegen die paaren Manteltheile der Kegel 3. Ord. in *Nachbarräumen*, und es liegen auf dem paaren Mantel von $u_3 = 0$ (und ebenso von $U_3 = 0$) eine *ungerade* Anzahl von reellen Hauptgeraden. Der Beweis kann rein topologisch geführt werden, wenn man eine Ebene um die Doppelgerade sich drehen lässt. Durch Beachtung der Schnittcurven in diesen Ebenen erhält man auch die beste Vorstellung von der Fläche selbst.

Lässt man bei der in Nr. 95 zuletzt erwähnten Art von Monoiden die beiden Pinch-points zusammenrücken, so erhält man ein Monoid mit zwei dreifachen Punkten, dessen Doppelgerade völlig isolirt ist. Bei völlig isolirter Doppelgeraden können noch die dreifachen Punkte conjugirt imaginär werden; dann schneidet jede Ebene durch die Doppelgerade einen Kegelschnitt aus, der die Doppelgerade nicht schneidet; diese Fläche kann man sich unschwer vorstellen.

98. Die Flächen mit zwei dreifachen Punkten können noch weitere Specialisirungen aufweisen, indem der Tangentialkegel in einem der dreifachen Punkte eine weitere Doppelkante erhält. Es ist dieses ein Vorkommniss, welches bereits früher behandelt wurde und hier nicht weiter zu discutiren ist; Gleiches gilt für *die* Fälle, in denen sich der dreifache Punkt in der neuen Doppelkante noch weiter specialisirt. Auch alle übrigen in Nr. 85 aufgeführten Flächen sind hiernach leicht zu erledigen.

99. Erhält der Kegel $u_3 = 0$ eine *Rückkehrkante*, so rückt ein Pinch-point in den dreifachen Punkt herein; dieses geschieht dadurch,

dass derjenige Ast der Berührungscurve des projicirenden Kegels 10. Ord., welcher vom dreifachen Punkt nach dem einen Pinch-point geht, die Doppelgerade nicht mehr in getrennten Punkten schneidet, sondern im dreifachen Punkt berührt. Die gestaltliche Veränderung der Fläche bei diesem Vorgang ist äusserst einfach und übersichtlich; siehe Figur 31.

Berührt der Kegel $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs der Rückkehrkante, so rücken beide Pinch-points in den dreifachen Punkt herein. Um dieses zu erreichen, lässt man zunächst die Pinch-points zusammenrücken; der eine Ast der Berührungscurve berührt alsdann die Doppelgerade in diesem Punkt. Alsdann lässt man den neu gebildeten Punkt in den dreifachen Punkt hereinrücken; dann hat der Ast der Berührungscurve drei consecutive Punkte mit der Doppelgeraden gemein; auch die gestaltliche Entstehung dieser Fläche ist sehr einfach, siehe Figur 32.

100. Durch das Auftreten einer *Selbstberührungskante* rückt ebenfalls ein Pinch-point in den dreifachen Punkt herein; zugleich aber wird noch eine Schleife zusammengezogen, so dass Figur 31 in 33 übergeht. Das *eine* Stück der Doppelgeraden im dreifachen Punkte ist isolirt.

Berührt der eine Mantel des Kegels $u_4 = 0$ den Kegel $u_3 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, so rückt der zweite Pinch-point ebenfalls in den dreifachen Punkt, indem zugleich eine Schleife sich zusammenzieht, wie dies Figur 34 zeigt; jetzt ist die Doppelgerade nirgends mehr isolirt.

Osculirt der eine Mantel des Kegel $u_4 = 0$ die Ebene $x = 0$ längs der singulären Kante, so zieht sich abermals eine Schleife, welche an den dreifachen Punkt angrenzt, zusammen, und es entsteht Figur 35.

Osculirt der eine Mantel des Kegels $u_4 = 0$ den Kegel 2. Ord.:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz = 0,$$

so projicirt sich die Umgebung des dreifachen Punktes wiederum als Figur 35. Die beiden verzweigten Aeste der Curve $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ liegen hier auf derselben Seite der singulären Ebene $x = 0$, während sie im vorhergehenden Falle auf verschiedenen Seiten lagen.

Soll der eine Mantel des Kegels $u_4 = 0$ vier, fünf, sechs oder sieben consecutive Kanten mit dem Kegel 2. Ord. gemein haben, welche alle in die singuläre Kante hereingerückt sind, so hat man noch eine, zwei, drei oder vier Schleifen einer Kette, die an den dreifachen Punkt angrenzt, zusammenzuziehen, wodurch die Projection im Wesentlichen die Form der Figur 34 oder 35 annimmt, je nachdem eine ungerade oder gerade Anzahl von Schleifen zusammengezogen worden ist.

101. Besitzt der Kegel $u_3 = 0$ eine dreifache Kante, welche für

den Kegel $u_4 = 0$ Doppelkante ist, so hat das zugehörige Monoid einen dreifachen Punkt, welcher durch Zusammenrücken zweier dreifacher Punkte entstanden ist, wie man sofort erkennt, wenn man beachtet, dass die vier Aeste der Curve $f = 0$, $x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ die Doppelgerade berühren. Hier giebt es noch zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem die constanten Tangentialebenen durch singuläre Ebenen getrennt werden oder nicht. Im letzteren Falle besteht das Monoid aus drei paaren Flächentheilen, vorausgesetzt dass die Hauptgeraden alle imaginär sind. Zwei von diesen Flächentheilen haben die in Nr. 57 gegebene Gestalt; der dritte durchsetzt sich selbst längs der ganzen Doppelgeraden und hat sich aus dem dritten Flächentheil des Monoids in Nr. 57 entwickelt, indem derselbe längs der Doppelgeraden mit sich selbst zusammengewachsen ist. Im ersteren Falle besteht das Monoid unter gleicher Voraussetzung aus einem paaren und zwei unpaaren Flächentheilen. Der paare Theil hat die in Nr. 57 gegebene Gestalt; die unpaaren Flächentheile liegen in den Winkelräumen, welche von den constanten Tangentialebenen geschnitten werden. Ein deutliches Bild eines solchen Theiles verschafft man sich, wenn man eine bewegliche Ebene den bezüglichen Winkelraum durchlaufen lässt; sie schneidet lauter Kegelschnitte aus, welche mit der Doppelgeraden zusammen jedes Mal den Gesammtdurchschnitt mit dem unpaaren Flächentheile ausmachen; so kommt die Figur 36.

Welcher Art die Aenderungen sind, wenn an Stelle der imaginären Hauptgeraden reelle treten, haben wir bereits früher gesehen.

Von den letzteren Flächen gelangt man leicht zu den anderen in Nr. 88 und 89 aufgeführten Monoiden, wenn man geeignete an den dreifachen Punkt angrenzende Schleifen zusammenzieht. Welche Schleifen man zu benutzen hat, erkennt man direct aus den Projectionen der Monoide, welche in den genannten Nummern angegeben sind. Man kann sich zu diesem Zwecke auch der Abbildung der Monoide auf eine Ebene bedienen; die Sache ist so einfach, dass ich nicht darauf eingehe.

102) Wir kommen jetzt zu den Monoiden mit Doppelgeraden, deren Tangentialkegel im dreifachen Punkt aus *einer einfachen* und *einer Doppelebene* besteht. Nehmen wir zunächst die Doppelgerade beliebig in der Doppelebene an, so erhalten wir eine Fläche, welche aus dem entsprechenden Monoid ohne Doppelgerade in Nr. 74 leicht abgeleitet werden kann. Durch Zusammenwachsen zweier Flächentheile längs eines *Theiles* der Doppelgeraden (vom dreifachen Punkt bis zum Pinch-point) entsteht die neue Fläche. Man übersieht das Gesagte am besten, wenn man die Schnittcurven in der Doppelebene Figur 37a

und in den benachbarten Ebenen, welche durch die Schnittgerade der einfachen und der Doppelebene hindurchgehen, Figur 37b betrachtet; der Punkt P entspricht dabei dem Pinch-point. Bei dem Monoid ohne Doppelgeraden sind die entsprechenden Schnittcurven durch die Figuren 10e) und 10b) gegeben.

Es kann nun der Pinch-point in den dreifachen Punkt hereinrücken; der Vorgang ist genau wie in den früheren derartigen Fällen, indem *der* Mantel des projicirenden Kegels 10. Ord., welcher die Doppelgerade in dem dreifachen Punkt und dem Pinch-point schneidet, übergeht in einen solchen, der die Doppelgerade im dreifachen Punkt berührt.

Ferner kann man noch eine Schleife des Monoids zusammenziehen, wodurch der die Doppelgerade berührende und der andere lineare Mantel des projicirenden Kegels 10. Ord. sich verzweigen.

103) Fällt die Doppelkante von $u_4 = 0$ mit der Schnittgeraden der einfachen und der Doppelebene zusammen, so ist das zugehörige Monoid als Specialfall des Monoids in Nr. 101 aufzufassen; es geht aus demselben hervor, wenn man zwei singuläre Ebenen zusammenrücken lässt. Ein derartiger Uebergang ist bereits in Nr. 74 geschildert; er bewirkt hier, dass einer der vier die singuläre Gerade berührenden Mäntel des projicirenden Kegels 10. Ord. sich in zwei sich schneidende Mäntel auflöst, ganz analog den Vorgängen in Nr. 74 und Nr. 76. Es giebt auch hier zwei wesentlich verschiedene Arten von Monoiden.

Aus dem soeben aufgestellten Monoid kann man eine Reihe weiterer Flächen ableiten. Lässt man durch Zusammenziehen einer Schleife *zwei* die Doppelgerade tangirende Mäntel des projicirenden Kegels sich in *einen* Mantel mit Rückkehrkante verwandeln, so entsteht ein neues Monoid. Dieses Monoid liefert abermals *eine* neue Fläche, indem durch Zusammenziehen einer weiteren Schleife der Mantel mit Rückkehrkante in zwei sich osculirende Mäntel übergeht.

Ferner kann man aus dem obigen Monoid dadurch weitere Flächen ableiten, dass man *einen* oder die *beiden* die Doppelgerade nicht berührenden Mäntel sich mit *einem* der drei übrigen sich berührenden Mäntel verzweigen lässt, was durch Zusammenziehen *einer* resp. *zweier* Schleifen geschieht.

Endlich kann man die beiden ersteren Operationen mit den beiden letzteren vereinigen und erhält so noch vier weitere Flächen.

104) Die Monoide mit *uniplanarem dreifachen Punkt* und einer Doppelgeraden können aus solchen ohne Doppelgerade abgeleitet werden, indem man ein Zusammenwachsen des in Nr. 77 erwähnten *paaren* und *unpaaren* Flächentheiles eintreten lässt (die Benennung paar und unpaar bezieht sich nur auf das Verhalten der Theile in der Umgebung des dreifachen Punktes). Das Monoid hat längs der Doppelgeraden

constante Tangentialebenen und sein Verhalten in der Nähe der Doppelgeraden ist leicht anzugeben. Der Schnitt durch die Gerade $x = 0$, $y = 0$ und die Doppelgerade hat die Form der Fig. 38a), die Nachbarschnitte haben die Form der Fig. 38b), die Projection dieser Partie der Fläche senkrecht zur singulären Ebene giebt Fig. 38c). Auch hier kann man durch Zusammenziehen von *einer* oder *zwei* Schleifen, genau wie in Nr. 77, zwei weitere Monoide ableiten.

Monoide mit Rückkehrgeraden oder Selbstberührungsgeraden.

105) Ein Monoid besitzt dann und nur dann eine *Rückkehrgerade*, wenn $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ eine gemeinsame Rückkehrkante mit gemeinsamer Tangentialebene besitzen; natürlich kann an Stelle der Rückkehrkante auch eine Selbstberührungskante, eine Doppelebene oder eine dreifache Ebene treten. Daraus folgt zunächst, dass bei den Monoiden mit Rückkehrgeraden *die Tangentialebene* in den Punkten dieser Geraden *eine constante ist.*

Gehen wir von dem einfachsten Falle aus, in welchem $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ eine gemeinschaftliche Rückkehrkante besitzen, die für sechs Schnittgeraden zählt, dann können wir setzen:

$$u_3 = x^2 z + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$
$$u_4 = Jz^2x^2 + z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2 + Py^3) + Qx^4 + \cdots.$$

Man erkennt dann sofort, dass auf der Rückkehrgeraden des Monoides $u_3 + u_4 = 0$ zwei dreifache Punkte liegen, nämlich der Punkt $z = 0$ und der Punkt $z = -\frac{1}{J}$. Die Gleichung des Monoides kann desshalb, unter der Annahme $z_1 = z + \frac{1}{J}$, auch in der Form geschrieben werden:

$$U_3 + U_4 = -x^2 z_1 + x^3\left(A - \frac{M}{J}\right) + 3x^2y\left(B - \frac{N}{J}\right) + 3xy^2\left(C - \frac{O}{J}\right)$$
$$+ y^3\left(D - \frac{P}{J}\right) + Jz_1^2x^2 + z_1(Mx^3 + \cdots) + Qx^4 + \cdots = 0.$$

Hieraus sieht man, dass die beiden dreifachen Punkte völlig gleichberechtigt sind. Ferner findet sich auf der Rückkehrgeraden noch ein singulärer Punkt vor, den wir mit Cayley*) *Close-point* bezeichnen, es ist der Punkt $z = -\frac{D}{P}$. Der projicirende Kegel 9. Ord. schickt durch einen solchen Punkt einen einzigen Mantel, der die Rückkehr-

*) Cayley, „A Memoir on the theory of reciprocal surfaces", Phil. Transactions CLIX, p. 201. Zeuthen, Math. Annal. Bd. X, „Sur la théorie des surfaces reciproques".

gerade nicht tangirt, wie man sich durch Rechnung leicht überzeugt; die Gestalt der Fläche in der Umgebung dieses Punktes giebt also Fig. 39. Die Classenreduction des Monoids bestimmt sich folgendermassen. Die Rückkehrgerade reducirt die Classe um 8 Einheiten, da sie sich doppelt gezählt von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ abtrennt, welche jetzt nur noch von der 7. Ord. ist. Jeder dreifache Punkt erniedrigt dann die Classe noch um 6 Einheiten und der Close-point um 4 Einheiten, so dass die Gesammtreduction der Classe gleich 24 wird.

Nebenbei sei erwähnt, dass hier keine dreifachen Tangentialebenen mehr existiren, dass es durch den Close-point jedoch noch 10 doppelte Tangentialebenen giebt.

106) Es kann nun eintreten, dass noch eine weitere Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in ihre gemeinschaftliche Rückkehrkante hereinrückt, so dass dieselbe für 7 Schnittgeraden zählt, dann besteht die Relation $JD = P$. Es rücken alsdann der Close-point $z = -\frac{D}{P}$ und der dreifache Punkt $z = -\frac{1}{J}$ zusammen; dadurch geht der Tangentialkegel $U_3 = 0$ in diesem dreifachen Punkt in einen Kegel mit Selbstberührungskante über. Der projicirende Kegel 9. Ord. schickt durch den dreifachen Punkt drei Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z_1 + \cdots, \quad y = \alpha_i z_1 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = b z_1^3 + \cdots, \quad y = \alpha z_1^2 + \cdots;$$

seine Classenerniedrigung berechnet sich auf $10 = 6 + 4$ Einheiten. Die Gesammterniedrigung der Classe hat sich demnach nicht geändert.

Rückt noch eine weitere Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in die gemeinschaftliche Rückkehrkante hinein, so wird auch noch $JC = O$. Der Tangentialkegel in dem dreifachen Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{J}$ zerfällt jetzt in die Dopplebene $x^2 = 0$ und in die einfache Ebene:

$$x\left(A - \frac{M}{J}\right) + 3y\left(B - \frac{N}{J}\right) - z_1 = 0.$$

In der Doppelebene liegt die Gerade des Monoids $Pz_1 + Uy = 0$. Der projicirende Kegel 9. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt mit den Reihen:

$$x = b z_1^2 + \cdots, \quad y = \alpha z_1 + \cdots,$$

resp.

$$x = \varepsilon b z_1^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z_1 + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

für welche letzteren:

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{J}{BJ - N}$$

ist; seine Classenerniedrigung erhöht sich auf 12. Die Classe des Monoids wird also um 26 erniedrigt.

Rückt eine neunte Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in die gemeinschaftliche Rückkehrkante hinein, so besteht noch die Relation:

$$U + 3P\left(B - \frac{N}{J}\right) = 0.$$

Dadurch wird der Tangentialkegel in dem dreifachen Punkt $z = -\frac{1}{J}$ nicht wesentlich geändert, aber es geht jetzt der Kegel $U_4 = 0$ durch die dreifache Gerade des Kegels $U_3 = 0$ hindurch. In Folge dessen sind die vier Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. paarweise verzweigt, sie haben die Reihen:

$$x = \pm b_i z_1^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z_1 \pm \beta_i z_1^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{J}{BJ - N}.$$

Die Reduction der Classenzahl durch den dreifachen Punkt wird, abgesehen von der Rückkehrgeraden, gleich 13.

Es kann ebenso die zehnte, eilfte und zwölfte Schnittgerade von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in die gemeinsame Rückkehrkante hineinrücken. Dabei bleibt der Tangentialkegel im dreifachen Punkt $z = -\frac{1}{J}$ im Ganzen ungeändert, aber es berührt, osculirt oder hyperosculirt der Kegel $U_4 = 0$ die singuläre Ebene:

$$x\left(A - \frac{M}{J}\right) + 3y\left(B - \frac{N}{J}\right) - z_1 = 0$$

längs der dreifachen Kante des Kegels $U_3 = 0$. Zählt die Rückkehrkante für zehn oder zwölf Schnittgeraden, so sind die vier Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. verzweigt, zählt sie jedoch für neun oder eilf, so sind zwei Mal zwei verzweigt; das Verhalten des projicirenden Kegels folgt unmittelbar aus Nr. 71.

107) Neue Flächen *mit einer Rückkehrgeraden* erhalten wir nur dann, wenn wir dem Kegel $u_3 = 0$ eine dreifache Kante zuertheilen und dieselbe zur Rückkehrkante des Kegels $u_4 = 0$ machen. Wir setzen desshalb:

$$u_3 = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

und

$$u_4 = Jz^2x^2 + z(Mx^3 + \cdots) + Qx^4 + \cdots.$$

Es giebt hier nur noch einen einzigen dreifachen Punkt, in den die beiden dreifachen Punkte des Monoids in Nr. 105 zusammengerückt sind; ferner giebt es auf der Rückkehrkante einen Close-point in

$z = -\frac{D}{P}$, genau von derselben Gestalt wie an der citirten Stelle. Das Verhalten des projicirenden Kegels 9. Ord. erkennt man aus den drei Entwicklungen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Reduction des dreifachen Punktes beträgt, abgesehen von der Rückkehrgeraden, 12 Einheiten, die des Close-point wie vorher 4 Einheiten. Fällt eine der drei singulären Ebenen $u_3 = 0$ mit der Tangentialebene in der Rückkehrkante von $u_4 = 0$ zusammen, so wird $D = 0$ und der Close-point rückt in den dreifachen Punkt herein. Die drei Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. werden dann durch die Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = b z^4 + \cdots, \quad y = \alpha z^3 + \cdots$$

dargestellt, und die Classenerniedrigung des dreifachen Punktes beträgt 16 Einheiten.

108) Wir nehmen jetzt an, dass $u_3 = 0$ in eine einfache und eine Doppelebene zerfällt, und dass die Rückkehrkante von $u_4 = 0$ mit der dreifachen Kante von $u_3 = 0$ zusammenfällt, dass jedoch die Rückkehrtangentialebene mit keiner der singulären Ebenen identisch ist. Dann setzen wir $u_3 = y^2(x + \varrho y)$, während wir u_4 in seiner ursprünglichen Form Nr. 105 belassen. Auf der Rückkehrgeraden des Monoids giebt es wieder einen Close-point $z = -\frac{\varrho}{P}$, der die Classe genau wie früher um 4 erniedrigt. Der projicirende Kegel 9. Ord. aus dem Punkte x_0, y_0, 0, 0 besitzt vier Mäntel, deren Reihen:

$$x = a_i z^2 + \cdots, \quad y = \alpha_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = a_i z + \cdots, \quad y = \beta_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2$$

sind; wesshalb die Classenerniedrigung gleich 14 wird. Wenn der Kegel $u_4 = 0$ die Doppelebene $y = 0$ berührt, so verzweigen sich die beiden zuletzt genannten Mäntel des projicirenden Kegels und die Classe wird noch um eine weitere Einheit reducirt. Es kann der Kegel $u_4 = 0$ auch noch eine Doppelkante besitzen, welche in der Doppelebene $y = 0$ liegt, so dass das Monoid noch eine Doppelgerade erhält.

Lassen wir jetzt die einfache Ebene von $u_3 = 0$ mit der Tangentialebene in der Rückkehrkante von $u_4 = 0$ zusammenfallen, so wird $\varrho = 0$, und der Close-point rückt in den dreifachen Punkt herein. Die vier Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. bekommen die Reihen $x = az^2 + \cdots$, $y = \alpha z^2 + \cdots$, resp. $x = bz^4 + \cdots$, $y = \alpha z^3 + \cdots$, resp. $x = a_i z + \cdots$, $y = \beta_i z^2 + \cdots$, $i = 1, 2$; und die Classenerniedrigung wird 18. Auch hier verzweigen sich die letzten beiden Mäntel, wenn $u_4 = 0$ die Doppelebene berührt, was wiederum die

Classe um eine Einheit vermindert; oder das Monoid erhält noch eine Doppelgerade, wenn $u_4 = 0$ in der Ebene $y = 0$ eine Doppelkante besitzt.

Lassen wir endlich die Doppelebene von $u_3 = 0$ mit der Tangentialebene in der Rückkehrkante von $u_4 = 0$ zusammenfallen, so kann man $u_3 = x^2 y$ setzen. Der projicirende Kegel 9. Ord. besitzt dann die vier Mäntel:

$$x = bz^2 + \cdots, \quad y = az + \cdots,$$

resp.

$$x = \varepsilon b z^{\frac{7}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1;$$

und die Classenerniedrigung beträgt 18 Einheiten.

109. Ist der dreifache Punkt *uniplanar*, d. h. ist $u_3 = y^3$, und behält u_4 seine frühere Form bei, so besitzt der projicirende Kegel 9. Ord. fünf Mäntel mit den Reihen:

$$x = a_i z + \cdots, \qquad y = \pm \beta_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad i = 1, 2,$$

resp.

$$x = az^2 + \cdots, \qquad y = \quad \alpha z^2 + \cdots.$$

Die Reduction der Classe durch den dreifachen Punkt berechnet sich auf 16 Einheiten. Zugleich existirt auf der Rückkehrgeraden wieder ein Close-point, der die Classe um 4 Einheiten erniedrigt. Berührt der Kegel $u_4 = 0$ die dreifache Ebene, so verzweigen sich die vier erstgenannten Mäntel des projicirenden Kegels mit einander, wodurch die Reduction des dreifachen Punktes gleich 17 wird.

Ertheilt man dem Kegel $u_4 = 0$ noch eine Doppelkante, welche in der dreifachen Ebene liegt, so giebt es auf dem Monoid noch eine Doppelgerade. Der projicirende Kegel 7. Ord. schickt nur noch drei Mäntel durch den dreifachen Punkt, von denen *zwei* die Doppelgerade und *einer* die Rückkehrgerade tangirt. Abgesehen von den singulären Geraden reducirt der dreifache Punkt die Classe um 14, so dass die Gesammtreduction gleich 30 wird. Ertheilt man dem Kegel $u_4 = 0$ dagegen noch eine Rückkehrkante, welche in der dreifachen Ebene liegt, so hat das Monoid noch eine Rückkehrgerade. Der projicirende Kegel 6. Ord. schickt nur noch zwei Mäntel durch den dreifachen Punkt, welche die beiden singulären Geraden berühren. Der dreifache Punkt reducirt um 8, und die Gesammtreduction beträgt 32.

Fällt die Tangentialebene in der Rückkehrkante des Kegels $u_4 = 0$ mit der dreifachen Ebene zusammen, so setzen wir $u_3 = x^3$; dann rückt der Close-point wieder in den dreifachen Punkt herein. Die fünf Mäntel des projicirenden Kegels 9. Ord. erhalten jetzt die Reihen:

$$x = \pm bz^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots,$$

resp.

$$x = \quad bz^2 + \cdots, \quad y = \varepsilon^2 \alpha z^{\frac{5}{3}} + \cdots;$$

die Classe wird durch den dreifachen Punkt um 20 Einheiten vermindert.

110. Hiermit ist die Gesammtheit der Monoide mit Rückkehrgeraden erledigt, und wir beginnen mit den *Monoiden mit einer Selbstberührungsgeraden*. Der einfachste Fall ist der, wo $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ eine gemeinsame Selbstberührungsgerade mit gemeinsamer Tangentialebene aufweisen, dann können wir setzen:

$$u_3 = x(Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz)$$

und

$$u_4 = Ix^2z^2 + z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2) + Qx^4 + 4Rx^3y + \cdots.$$

Auf der singulären Geraden giebt es einerseits zwei dreifache Punkte, nämlich $z = 0$, und $z = -\frac{2D}{I}$, andererseits zwei Pinch-points*), welche sich durch die quadratische Gleichung:

$$z^2(9O^2 - 4IU) + 2z(3BO - 4DU) + B^2 = 0$$

bestimmen. Die Gleichung des Monoids kann auch in der Form geschrieben werden:

$$U_3 + U_4 = x\left[\left(A - \frac{2MD}{I}\right)x^2 + \left(B - \frac{6OD}{I}\right)y^2 + \left(C - \frac{3ND}{I}\right)2xy - 2Dxz_1\right]$$
$$+ Ix^2z_1^2 + z_1(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2) + Qx^4 + \cdots = 0,$$

$z_1 = z + \frac{2D}{I}$. Man erkennt nun sofort, das der projicirende Kegel 8. Ord. durch jeden dreifachen Punkt zwei Mäntel schickt, die zu der singulären Geraden keine specielle Lage haben. Jeder dreifache Punkt reducirt desshalb die Classe um 3, während die Selbstberührungsgerade um 12 reducirt. Der projicirende Kegel schickt ferner durch jeden der beiden übrigen singulären Punkte auf der Selbstberührungsgeraden einen einzigen Mantel, und dieselben vermindern die Classe um je 5 Einheiten. Die Classe des Monoids ist also gleich 8. Ein derartiges Monoid kann noch zwei gewöhnliche Knotenpunkte besitzen, so dass es von der 4. Ord. und von der 4. Classe wird.

Wenn der *eine* Mantel des Kegels $u_4 = 0$ den Kegel 2. Ord.:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dxz = 0$$

längs der singulären Geraden osculirt, so besteht zwischen den Constanten die Relation:

$$IB^2 - 6OBD + 4UD^2 = 0.$$

*) Es sind dies keine gewöhnlichen Pinch-points, sie entstehen, wenn man zwei gewöhnliche Pinch-points mit ihren Doppelgeraden zusammenrücken lässt.

Dadurch werden die beiden dreifachen Punkte nicht weiter alterirt; dagegen rücken die beiden Pinch-points zusammen, so dass ein Mantel des projicirenden Kegels die singuläre Gerade in diesem Punkte berührt (siehe Fig. 40). Auch die Classenzahl ist ungeändert geblieben.

Wenn der *eine* Mantel des Kegels $u_4 = 0$ mit dem Kegel 2. Ord. vier, fünf oder sechs consecutive Kanten gemein hat, die alle in die singuläre Gerade hereingerückt sind, so bleiben hierbei die dreifachen Punkte ungeändert. Durch den einzigen singulären Punkt, der noch ausserdem auf der Selbstberührungsgeraden liegt, gehen jetzt zwei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. Dieselben sind im ersten Falle linear, im zweiten verzweigt und im dritten berühren sie sich; in Bezug auf die singuläre Gerade haben sie keine specielle Lage. Sie entstehen durch Zusammenrücken der beiden Pinch-points auf der Selbstberührungsgeraden mit einem gewöhnlichen Knotenpunkte, resp. einem biplanaren Knotenpunkt B_3 oder B_4; siehe Figur 40b, 40c und 40d. Die Classe des bezüglichen Monoids wird 6, 5 oder 4.

111. Besteht der Kegel $u_3 = 0$ aus drei sich in einer Geraden schneidenden Ebenen, und berührt *eine* dieser Ebenen den Kegel $u_4 = 0$ in seiner Selbstberührungskante, so können wir schreiben $u_3 = xy(x + \varrho y)$, während wir u_4 in seiner früheren Form nehmen. Die beiden Pinch-points ändern sich hierbei nicht, nur die beiden dreifachen Punkte rücken zusammen; die beiden Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. durch diesen Punkt berühren desshalb die singuläre Gerade. Die Classe des Monoids ist wiederum 8.

112. Zerfällt der Kegel $u_3 = 0$ in eine einfache und eine Doppelebene, und berührt letztere den Kegel $u_4 = 0$ längs seiner Selbstberührungskante, so belassen wir wieder u_4 in seiner alten Form und setzen: $u_3 = x^2(Ax + By + Cz)$. Dann giebt es auf der singulären Geraden zwei dreifache Punkte $z = 0$ und $z = -\frac{C}{I}\cdot$ Ferner giebt es einen Pinch-point $z = \frac{4UC}{9O^2 - 4IU}$, der andere ist in den dreifachen Punkt $z = 0$ hereingerückt. Im letzteren Punkte giebt es jetzt drei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord., ihre Reihen sind:

$$x = \varepsilon b z^{\frac{4}{3}} + \cdots, \quad y = \alpha z + \cdots, \quad \varepsilon^3 = 1;$$

er erniedrigt die Classe um 8 Einheiten. Lässt man O verschwinden, so rückt der andere Pinch-point in den dreifachen Punkt $z = -\frac{C}{I}$; es giebt dann auf der singulären Geraden zwei dreifache Punkte, deren Tangentialkegel je in eine einfache und eine Doppelebene zerfällt; jeder erniedrigt die Classe um 8, so dass die Classe des zugehörigen Monoids ungeändert gleich 8 bleibt. Auch ein solches Monoid kann noch zwei gewöhnliche Knotenpunkte besitzen.

113. Fällt die dreifache Kante von $u_3 = 0$ mit der Selbstberührungskante von $u_4 = 0$ zusammen und berührt die einfache Ebene den Kegel $u_4 = 0$ längs dieser Kante, so setzen wir: $u_3 = zy^2$ und für u_4 seinen früheren Ausdruck. Auf der Selbstberührungsgeraden des Monoids giebt es zwei Pinch-points, welche wie vorher die Classe je um 5 erniedrigen. Die beiden dreifachen Punkte sind zusammengerückt; die drei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. in diesem Punkte haben die Reihen:

$$x = az^2 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

resp.

$$x = a_i z + \cdots, \quad y = \beta_i z^2 + \cdots, \quad i = 1, 2;$$

weshalb dieser dreifache Punkt die Classe um 8 Einheiten reducirt. Das Monoid ist von der 6. Classe. Berührt $u_4 = 0$ die Doppelebene, so verzweigen sich die beiden zuletzt genannten Mäntel des projicirenden Kegels und das Monoid wird von der 5. Classe.

Hat der Kegel $u_4 = 0$ noch eine weitere Doppelkante, welche ebenfalls in der Doppelebene liegt, so erhält das Monoid noch eine Doppelgerade. Auf dieser liegt noch ein gewöhnlicher Pinch-point, während auf der Selbstberührungsgeraden nach wie vor zwei Pinch-points mit der Classenerniedrigung 5 liegen. Durch den dreifachen Punkt geht nur noch ein einziger Mantel des projicirenden Kegels 6. Ord., welcher die Selbstberührungsgerade tangirt; er reducirt die Classe, abgesehen von den singulären Geraden, um 4 Einheiten. Das Monoid ist nur noch von der 3. Classe und bildet einen *speciellen Fall der Steiner'schen Fläche;* vergleiche Nr. 126 im letzten Capitel.

114. Fallen die singulären Kanten von $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ zusammen und *tangirt die Doppelebene* den Kegel $u_4 = 0$ *längs dieser Kante,* so haben wir $u_3 = x^2 y$ zu setzen. Jetzt sind die beiden dreifachen Punkte und die beiden Pinch-points in den Punkt $z = 0$ zusammengerückt. Die drei Mäntel des projicirenden Kegels 8. Ord. durch diesen Punkt werden durch die Reihen:

$$x = \quad bz^3 + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

resp.

$$x = \pm bz^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = \alpha z^2 + \cdots,$$

dargestellt, sein Einfluss auf die Erniedrigung der Classe beträgt 16 Einheiten. Das Monoid wird folglich von der 8. Classe.

Stellt $u_3 = 0$ eine dreifache Ebene dar, welche den Kegel $u_4 = 0$ längs seiner singulären Geraden tangirt, so hat man $u_3 = x^3$ zu setzen. Der projicirende Kegel 8. Ord. schickt vier Mäntel durch den dreifachen Punkt mit den Reihen:

$$x = b_i z^2 + \cdots, \qquad y = \pm \alpha_i z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad i = 1,2.$$

Die Reduction der Classe beträgt 18, abgesehen von der singulären Kante; so dass das Monoid von der 6. Classe wird.

115. Auch in diesem Capitel mag auf einige der aufgezählten Monoide kurz aufmerksam gemacht werden. Das in Nr. 105 zuerst erwähnte Monoid kann noch drei gewöhnliche Knotenpunkte besitzen; die Ebene durch diese 3 Punkte muss die Fläche längs eines Kegelschnitts berühren, der die Rückkehrgerade offenbar im Close-point trifft.

Ferner giebt es einige Monoide 4. Ord. und 4. Classe. So z. B. das Monoid mit zwei Rückkehrgeraden. Auf jeder liegt ein Close-point; eine der Ebenen durch die beiden Close-points berührt längs eines Kegelschnitts, so dass die Gleichung dieser Fläche immer auf die Form:

$$x^3 + (ax^2 + 2byz)^2 = 0$$

gebracht werden kann.

Das Monoid mit einer Selbstberührungsgeraden und zwei gewöhnlichen Knotenpunkten ist ebenfalls von der 4. Ord. und der 4. Classe. Die Ebenen durch die beiden Knotenpunkte und je einen Pinch-point berühren längs eines Kegelschnitts. Die Gleichung dieser Fläche kann geschrieben werden:

$$(bx + ay)(ayz + bzx + cxy) + \varrho(ayz + bzx + dxy)^2 = 0.$$

Die beiden Close-points und ein Knotenpunkt können zusammenrücken, dann giebt es durch diesen Punkt und den noch übrigen Knotenpunkt zwei Ebenen, welche längs eines Kegelschnitts berühren. Die Gleichung der Fläche wird jetzt:

$$x(xz - \varrho y^2) + \sigma(xz - \varrho y^2 + axy)^2 = 0.$$

Ebenso kann der letzte Knotenpunkt noch in den singulären Punkt der Selbstberührungsgeraden hereinrücken. Dann giebt es durch diesen Punkt zwei Ebenen, welche längs eines Kegelschnitts berühren, ihre Schnittgerade ist die singuläre Gerade des Punktes. Ihre Gleichung ist:

$$0 = x(xz - \varrho y^2) + \sigma(xz - \varrho y^2 - \tau x^2)^2.$$

Ferner kann bei dem Monoid mit Selbstberührungsgeraden und zwei Knotenpunkten ein Pinch-point mit einem dreifachen Punkt zusammenrücken. Der Tangentialkegel in diesem Punkte zerfällt in eine Doppelebene und eine einfache Ebene, welche die beiden Knotenpunkte enthält und die Fläche längs zweier Geraden berührt. Ihre Gleichung ist:

$$(bx + ay)(ayz + bzx + cxy) + x^2y^2 = 0.$$

Rückt auch noch der andere dreifache Punkt mit dem andern Pinch-point zusammen, so zerfällt auch der Tangentialkegel in diesem Punkt in der angegebenen Weise, und die Gleichung wird:

$$(bx + ay)^2z + x^2y^2 = 0.$$

Endlich können die beiden dreifachen Punkte zusammenrücken, während die Pinch-points getrennt bleiben, dann zerfällt der Tangentialkegel im dreifachen Punkt in drei Ebenen durch die Selbstberührungsgerade. Die Gleichung der Fläche wird demnach:

$$xy(bx + ay) + \varrho(ayz + bzx + cxy)^2 = 0.$$

116. Es erübrigt in diesem Capitel nur noch die *gestaltliche Behandlung* unserer Flächen und wir beginnen mit den *Flächen mit Rückkehrgeraden.* Ich unterlasse es hier die Aenderungen anzugeben, welche bei den einzelnen Flächen vorzunehmen sind, und gebe nur das Princip an, nach dem man zu verfahren hat. Man kann nämlich immer von den Monoiden mit Doppelgeraden ausgehen, welche längs derselben constante Tangentialebenen besitzen. Solche Monoide besitzen zwei getrennt liegende, oder zusammenfallende dreifache Punkte. Lässt man nun die Doppelgerade in eine Rückkehrgerade übergehen, so trennt sich von der Berührungscurve des projicirenden Kegels die Doppelgerade ab, wie dies Figur 41a und 41b zeigt. Von den dreifachen Punkten A und B ist nur der Theil gezeichnet, der uns bei dem genannten Vorgang interessirt. Man übersieht hierbei sehr schön wie der Close-point entsteht. Die beiden dreifachen Punkte können auch conjugirt imaginär sein, ganz ebenso wie bei den Flächen in Nr. 97.

Die *Monoide mit einer Selbstberührungsgeraden* kann man aus den Monoiden mit zwei Doppelgeraden ableiten, indem man diese zusammenrücken lässt. Es sind hier folgende Fälle zu unterscheiden. Die beiden Pinch-points trennen die dreifachen Punkte, oder sie trennen die dreifachen Punkte nicht, oder sie sind conjugirt imaginär. Um das Monoid mit Selbstberührungsgeraden abzuleiten, dessen beiden Pinch-points die dreifachen Punkte nicht trennen, geht man von dem Monoid mit zwei Doppelgeraden aus, dessen Abbildung auf die Ebene die Figur 42a zeigt. Den Richtungen s_1, t_1 und s_2, t_2 entsprechen auf den Doppelgeraden die Pinch-points. Beim Grenzübergange rücken die beiden Pinch-points, entsprechend den Richtungen s_1 und s_2, zusammen und bilden den einen neuen Pinch-point auf der Selbstberührungsgeraden; die beiden Pinch-points, entsprechend den Richtungen t_1 und t_2 rücken ebenfalls zusammen, bilden aber den andern dreifachen Punkt, siehe Figur 42b. Jeder Richtung durch P_1 resp. P_2 in Fig. 42a entspricht ein Punkt der Doppelgeraden, da die Tangentialebenen in den Punkten der Doppelgeraden noch beweglich sind; dagegen entspricht jeder Richtung durch P in Fig. 42b nur noch ein einziger Punkt, da die Tangentialebenen in den Punkten der Berührungsgeraden constant sind. So entspricht der Partie A der Ebene beim Monoide ohne reelle Hauptgeraden ein geschlossener Flächentheil, der sich wie ein Kegel 2. Ord. in die beiden dreifachen Punkte erstreckt. Macht man eine Reihe Schnitte durch das Monoid, welche der Bildebene parallel sind, so entspricht dem Schnitt durch den dreifachen Punkt $z = 0$ die Curve

$u_3 = 0$, den Schnitten zwischen beiden dreifachen Punkten Curven von der Form 1, dem Schnitt durch den dreifachen Punkt $z = -\frac{2D}{I}$ die Curve 2, (bestehend aus einem Zweig und dem isolirten Punkt P), den Schnitten zwischen diesem dreifachen Punkt und dem einen Pinch-point Curven von der Form 3, dem Schnitt durch den Pinch-point die Curve 4, den Schnitten zwischen beiden Pinch-points Curven von der Form 5 oder 6, dem Schnitt durch den zweiten Pinch-point die Curve 7, den Schnitten zwischen diesem Punkt und dem dreifachen Punkt $z = 0$ Curven von der Form 8. Hierdurch gewinnt man ein deutliches Bild der Fläche *ohne* reelle Hauptgeraden; will man aber eine Fläche *mit* reellen Hauptgeraden, so muss man die Fläche, wie in Nr. 45 und Nr. 46 gezeigt wurde, mit sich selbst an geeigneten Stellen zusammenwachsen lassen.

Sollen die Pinch-points conjugirt imaginär werden, so lässt man bei der vorigen Fläche die beiden Pinch-points zusammenrücken und dann imaginär werden. Man kann die Fläche jedoch auch direct ableiten, wenn man von einem Monoid ausgeht, dessen Bild Fig. 42c darstellt. Sollen die Pinch-points durch die dreifachen Punkte getrennt werden, so kann man einen von ihnen durch einen dreifachen Punkt hindurchgehen lassen, oder aber man kann dasselbe wieder direct ableiten.

Auch bei den zuletzt aufgestellten Monoiden können die dreifachen Punkte wieder conjugirt imaginär werden.

Monoide mit Rückkehrgeraden höherer Ordnung oder mit Selbstosculationsgeraden.

117. Es handelt sich in diesem Capitel noch um einige wenige Monoide, deren singuläre Gerade von höherer Ordnung*) ist als die Selbstberührungsgerade. Wir haben bereits im vorigen Capitel gesehen, dass alle Monoide mit Rückkehr- resp. Selbstberührungsgeraden in den Punkten dieser Geraden eine constante Tangentialebene besitzen, oder dass die Projectionen aller ebenen Schnitte Curven mit Spitze resp. Selbsberührungspunkt liefern, deren Tangenten in diesem Punkte identisch sind. Mit andern Worten: die Potenzreihen dieser projicirten Curven oder der Projectionskegel stimmen bis zur Potenz $y^{\frac{3}{2}}$ resp. y^2 überein, wenn $x = 0$, $y = 0$ die singuläre Gerade darstellt. Ganz ebenso zeigt sich, dass bei einer Rückkehrgeraden 5. Ord. die Potenzreihen der Projectionskegel bis zur Potenz $y^{\frac{5}{2}}$ oder bei einer Selbst-

*) Den Rückkehrpunkt einer Curve oder die Rückkehrkante eines Kegels nennt man von der 3., 5., 7., . . . Ord., wenn er die Classe um 3, 5, 7, . . . erniedrigt; ebenso unterscheidet man Selbstberührungskanten 4., 6., 8., . . . Ord.

osculationsgeraden bis zur Potenz y^3 übereinstimmen. Je zwei solche zu einer Fläche gehörige Kegel, welche auf ebenen Schnitten stehen, *schneiden sich* demnach in 10 resp. 12 zusammenfallenden Kanten und folglich schneiden sie den Tangentialkegel 3. Ord. in dreifachen Punkte ebenfalls in 10 resp. 12 consecutiven Kanten. In Folge dessen sind nur die folgenden Möglichkeiten geboten.

Der Kegel $u_3 = 0$ zerfällt in eine einfache und eine Doppelebene, der Kegel $u_4 = 0$ besitzt eine *Rückkehrkante* 5. Ordnung und wird längs derselben von der Doppelebene berührt. Wir können dann:

$$u_3 = x^2y \text{ und } u_4 = Ix^2z^2 + z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Oxy^2) + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4$$

setzen unter *Zuhilfenahme* der Relation $9O^2 - 4IU = 0$. Jeder ebene Schnitt des Monoids $u_3 + u_4 = 0$ besitzt im Allgemeinen einen Rückkehrpunkt 5. Ord.; nur Schnitte durch einzelne Punkte der Rückkehrgeraden können höhere Singularitäten aufweisen, nämlich die Schnitte durch die singulären Punkte dieser Geraden. Umgekehrt können wir die *singulären* Punkte der Rückkehrgeraden dadurch bestimmen, dass wir uns fragen, für welche Werthe von z wird die Curve $u_3 + u_4 = 0$ einen dreifachen Punkt oder einen Selbstosculationspunkt erhalten; im ersteren Falle ist der bezügliche Punkt ein dreifacher Punkt, im letzteren ein Close-point*) des Monoids. Man erkennt aber sofort, dass kein weiterer *dreifacher* Punkt existiren kann, dagegen giebt es einen Close-point. Die Reihenentwicklungen für die beiden Aeste der Curve $u_3 + u_4 = 0$ beginnen nämlich mit $y = \alpha z^2$ und schreiten im Allgemeinen nach Potenzen von $z^{\frac{1}{2}}$ fort, also $y = \alpha z^2 \pm \beta z^{\frac{5}{2}} + \cdots$. Für die Schnittcurve durch den Close-point, welche einen Selbstosculationspunkt hat, müssen aber die Potenzreihen nach ganzen Potenzen von z fortschreiten, d. h. es muss β verschwinden. Nun ist $\alpha = -\frac{3O}{2Iz}$, ferner bestimmt sich β durch Nullsetzen der Glieder 7. Dimension, also $Iz^2\beta^2 + \alpha^2 + 3Nz\alpha^2 + 4T\alpha = 0$. Soll β verschwinden, so folgt daraus $z = \frac{3O}{8IT - 9ON}$, und hierdurch ist der Close-point bestimmt.

Die Reduction der Classenzahl vertheilt sich, wie folgt. Zunächst reducirt die Rückkehrgerade die Classe um 16 Einheiten, da sie sich vierfach von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ abtrennt. Der projicirende Kegel ist nur noch von der 7. Ord. und schickt nur noch zwei Mäntel durch den dreifachen Punkt, sie haben die Reihen:

*) Die Bezeichnung Close-point ist nicht völlig correct, aber der Punkt ist einem gewöhnlichen Closepoint sehr ähnlich, so dass ich keine bessere Bezeichnung wüsste.

$$x = \pm b z^{\frac{5}{2}} + \cdots, \quad y = a z^2 + \cdots, \quad a = - I;$$

die Reduction durch diesen Punkt berechnet sich auf 8. Für den Close-point findet man 6 als die Zahl, welche seinen Einfluss auf die Classenerniedrigung angiebt.

118. Wenn der Kegel $u_3 = 0$ eine dreifache Ebene darstellt und $u_4 = 0$ wiederum einen Kegel mit einer Rückkehrkante 5. Ord., welcher längs derselben von der singulären Ebene berührt wird, so setzen wir $u_3 = x^3$, während wir die Gleichung für u_4 und die Constantenrelation beibehalten, und erhalten ein neues Monoid mit einer Rückkehrgeraden 5. Ordnung. Es giebt jetzt auf der Rückkehrgeraden keinen Close-point mehr, er ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Der projicirende Kegel 7. Ord. schickt drei Mäntel mit den Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad b = -\frac{4}{9} I, \quad a^2 = \frac{8 I^2}{81 O},$$

resp.

$$x = b z^3 + \cdots, \quad y = \quad a z^2 + \cdots, \quad a = \frac{9 N O - 8 I T}{2 U}.$$

Der dreifache Punkt reducirt hier die Classe um 15, so dass die Gesammtreduction gleich 31 wird.

119. Schliesslich ist noch das Monoid mit einer *Selbstosculationsgeraden* zu erwähnen; man erhält es, wenn $u_4 = 0$ eine Selbstosculationskante besitzt und $u_3 = x^3 = 0$ den Kegel $u_1 = 0$ längs dieser Kante berührt. Nehmen wir u_4 in seiner früheren Form, so haben wir zwischen den Constanten die beiden Relationen $9 O^2 - 4 I U = 0$ und $8 I T - 9 O N = 0$; aus beiden folgt dann weiter $UN - 2 O T = 0$. Es giebt dann auf der singulären Geraden einen Pinch-point*) höherer Ord., einen Punkt für welchen die ebenen Schnittcurven Rückkehrpunkte von der 7. Ord. haben. Nun besitzen die Curven $u_3 + u_4 = 0$ alle einen Selbstosculationspunkt, der zum Rückkehrpunkt 7. Ord. wird, wenn

$$z = \frac{3 O U}{\cdot 72 I T^2 + 12 I S U + 3 M O U}$$

ist; hierdurch ist also der Pinch-point bestimmt.

Die Selbstosculationsgerade reducirt die Classe um 20, da sie sich fünffach von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ abtrennt. Durch den dreifachen Punkt gehen zwei Mäntel des projicirenden Kegels 6. Ord., sie haben die Reihen:

$$x = b z^2 + \cdots, \quad y = \pm a z^{\frac{3}{2}} + \cdots, \quad a = \frac{8 I^2}{81 O}, \quad b = -\frac{4 I}{9};$$

*) Dieser Pinchpoint ist durch Zusammenrücken dreier Pinch-points und ihrer drei Doppelgeraden entstanden.

der dreifache Punkt erniedrigt die Classe um 6 Einheiten. Durch den Pinch-point geht ein Mantel des projicirenden Kegels, er reducirt die Classe um 7 Einheiten. Die Fläche ist demnach von der 3. Classe und bildet einen *speciellen Fall der Steiner'schen Fläche;* siehe Nr. 126 des letzten Capitels.

120. Um sich ein Bild von der Gestalt des Monoids in Nr. 117 zu machen, lasse man eine Ebene sich um die singuläre Gerade drehen. Sind die beiden Hauptgeraden der Fläche imaginär und geht man von der Lage $y = 0$ aus, so bildet die Schnittcurve einen isolirten Punkt, der bei Drehung der Ebene in einen kleinen Kegelschnitt übergeht. Bei weiterer Drehung verlängert sich dieser Kegelschnitt, bis er in das doppelt gezählte Stück der singulären Geraden zwischen dreifachem Punkt und Closepoint übergeht, wenn die Ebene die Lage $x = 0$ einnimmt; siehe Figur 43. Nimmt man die Drehung der Ebene, von der Lage $y = 0$ ausgehend, in entgegengesetzter Richtung vor, so entwickelt sich aus dem isolirten Punkt ein kleiner Kegelschnitt, der auf der entgegengesetzten Seite der singulären Geraden liegt. Bei weiterer Drehung verlängert sich derselbe immer mehr, bis er schliesslich in den durchs Unendliche verlaufenden Theil der singulären Geraden übergeht; siehe Figur 43b). Die Fläche liegt in der Nähe des dreifachen Punktes ganz auf der einen Seite der Ebene $y = 0$. Sind die beiden Hauptgeraden reell, so erhält man die Fläche, wenn man die geschilderten Theile an einer Stelle zusammenwachsen lässt.

Die Gestalt des Monoids in Nr. 118 lässt sich ganz in derselben Weise finden, indem man eine Ebene um die singuläre Gerade dreht. Als Ausgangslage wähle man die Ebene senkrecht zur Ebene $x = 0$; sie schneidet einen Kegelschnitt aus, der bei der Drehung der Ebene immer kleiner wird, bis er sich auf einen Punkt zusammenzieht, wenn die bewegliche Ebene die Lage $x = 0$ angenommen hat. Macht man die Drehung von der Ausgangslage in entgegengesetzter Richtung, so verlängert sich der Kegelschnitt immer mehr, dringt durchs Unendliche und geht in die doppelte singuläre Gerade über, wenn die bewegliche Ebene wieder die Lage $x = 0$ angenommen hat; siehe Fig. 44. Die Partien der Fläche, welche sich an die Rückkehrgerade ansetzen, liegen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $x = 0$ und der singulären Geraden, wenn man den dreifachen Punkt passirt.

Was endlich die Gestalt der Fläche mit Selbstosculationsgeraden anlangt, so ist zunächst zu bemerken, dass es durch den Pinch-point eine Ebene giebt, welche längs eines Kegelschnitts berührt. Dreht sich wieder eine Ebene um die singuläre Gerade, so schneidet sie immer einen Kegelschnitt aus, der jene Ebene in einem Punkte ihres Kegelschnitts und die singuläre Gerade wie vorher im dreifachen Punkt berührt. Nimmt die bewegliche Ebene die Lage $x = 0$ an, so geht der Kegelschnitt in das doppelt gezählte Stück der singulären Geraden zwischen dem dreifachen Punkt und dem Pinch-point über, und zwar tritt dieses ein, einerlei ob man von der Ausgangslage nach rechts oder links dreht. Das eine Stück der Selbstosculationsgeraden zwischen den beiden singulären Punkten ist reell, das andere imaginär.

Die Regelflächen 4. Ordnung mit einer dreifachen Geraden.

121. Obgleich diese Regelflächen schon anderwärts*) ihre Erledigung gefunden haben, so können sie doch hier der Vollständigkeit halber nicht ausgelassen werden, und ich halte die nachstehenden Auseinandersetzungen um so weniger für überflüssig, als uns ein anderes Princip leiten wird, als das in den citirten Arbeiten. Wir gehen wieder von der Gleichungsform $u_3 + u_4 = 0$ aus, wo $u_3 = 0$ drei Ebenen durch die Gerade $x = 0$, $y = 0$ und $u_4 = 0$ einen Kegel 4. Ord. mit der dreifachen Kante $x = 0$, $y = 0$ bezeichnet; von den 12 Schnittgeraden $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ können 9, 10 oder 11 in die singuläre Gerade hereinrücken und hiernach haben wir verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Schneiden sich $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ in 9 Geraden $x = 0$, $y = 0$, so können wir setzen:

$$u_3 = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

und

$$u_4 = z(Mx^3 + 3Nx^2y + 3Qxy^2 + Py^3) + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4.$$

Es giebt dann im Allgemeinen in jedem Punkt der dreifachen Geraden drei von einander verschiedene Tangentialebenen, nur für *vier* Punkte dieser Geraden fallen zwei Tangentialebenen zusammen, da bekanntlich die Discriminante einer Gleichung 3. Grades in den Coefficienten vom vierten Grade ist. Einen solchen Punkt wollen wir wiederum als Pinch-point bezeichnen, da durch ihn ein einfacher Mantel der Regelfläche geht und zwei mit einander zusammenhängende Mäntel, welche sich genau so verhalten, wie die beiden Mäntel durch eine Doppelgerade in ihrem Pinch-point.

Der projicirende Kegel aus einem beliebigen Raumpunkt ist nur noch von der sechsten Ordnung; die Berührungscurve 6. Ord. dieses Kegels geht durch die vier Pinch-points hindurch, so dass in jeder Ebene durch die dreifache Gerade nur noch zwei bewegliche Punkte dieser Curve liegen. Von der Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ trennt sich die Gerade $x = 0$, $y = 0$ vierfach zählend ab, die übrig bleibende

*) Zuerst hat Cayley die verschiedenen Regelflächen 4. Grades untersucht, aber einige ausgelassen, vergl. Phil. Transactions CLIV, p. 559; vollständig bis auf *eine* giebt sie Cremona, Memorie del R. Ist. di Bologna v. VIII, vergl. die zweite Note auf Seite 147.

Curve 5. Ord. geht durch die Pinch-points einfach hindurch und schneidet daselbst die Regelfläche in je vier consecutiven Punkten, so dass sich für die Regelfläche die Classe 4 ergiebt, wie das ja auch bekannt ist.

Die drei Erzeugenden in einem Punkt der dreifachen Geraden liegen im Allgemeinen *nicht* in einer Ebene*); liegen sie jedoch für irgend einen Punkt der dreifachen Geraden in einer Ebene**), so gilt Gleiches für jeden Punkt derselben; die Erzeugenden treffen alle eine feste Gerade, welche der Regelfläche nur einfach angehören kann.

Ein Schnitt durch einen Pinchpoint liefert zwei verzweigte und einen linearen Ast; geht der Schnitt durch die singuläre Gerade oder Dorsallinie des Pinch-point, so wird diese Gerade, ein sie berührender Ast und ein weiterer Ast ausgeschnitten. Es giebt durch die Dorsallinie *eine* Ebene, welche längs ihr berührt und einen Kegelschnitt ausschneidet, der natürlich durch den Pinchpoint geht.

Rücken zwei Pinch-points zusammen, so gehen durch diesen Punkt drei Erzeugende, welche einander unendlich nahe gerückt sind. Macht man also diesen Punkt zum Coordinatenanfang, so hat man in der Gleichung $u_3 + u_4 = 0$ für u_3 einen reinen Cubus, etwa x^3, zu setzen. Dann schickt der projicirende Kegel 6. Ord. durch diesen Punkt zwei Mäntel, welche mit einander verzweigt sind und die Gerade $x = 0$, $Pz + Uy = 0$ berühren. Es können auch zwei Mal zwei Pinch-points zusammenrücken, aber es können nicht drei oder vier in einen Punkt zusammenfallen.

122. Nehmen wir jetzt an, dass eine der Ebenen $u_3 = 0$ einen der Mäntel des Kegel $u_4 = 0$ längs der dreifachen Kante berührt, so haben wir in der Gleichung der Regelfläche $D = 0$ und $P = 0$ zu setzen. Es giebt jetzt in der dreifachen Geraden *eine constante und zwei bewegliche Tangentialebenen****). Die Discriminante der Gleichung 3. Grades reducirt sich jetzt auf

$$(C + zO)^2 \{4(A + zM)(C + zO) - 3(B + zN)^2\}.$$

Es existiren also nur zwei gewöhnliche Pinch-points, die beiden andern sind in den singulären Punkt $z = -\frac{C}{O}$ zusammengerückt. Der projicirende Kegel 6. Ord. schickt durch den Punkt $z = -\frac{C}{O}$ zwei Mäntel mit den Reihen $x = b z_1^3 + \cdots$, $y = a z_1^2 + \cdots$, $z_1 = z + \frac{C}{O}$.

Als Specialfall ist zu erwähnen die Regelfläche, für welche ein Pinch-point in den singulären Punkt $z = -\frac{C}{O}$ hereinrückt, für welche also $BO - CN = 0$ ist. Der projicirende Kegel 6. Ord. schickt im

*) Cremona, a. a. O. Regelfläche 8.
**) Cremona, a. a. O. Regelfläche 9.
***) Cremona, a. a. O. Regelfläche 3.

letzteren Falle durch den Punkt $z = -\frac{C}{O}$ zwei verzweigte Mäntel mit den Reihen:

$$x = b z_1^2 + \cdots, \quad y = \pm \alpha z_1^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

123. Wenn zwei der Ebenen $u_3 = 0$ zwei Mäntel des Kegels $u_4 = 0$ längs der dreifachen Kante berühren, so können wir schreiben:

$$u_3 = 3Bx^2y + 3Cxy^2$$

und

$$u_4 = z(3Nx^2y + 3Oxy^2) + Qx^4 + Rx^3y + \cdots.$$

In Folge dessen sind von den *Tangentialebenen* in den Punkten der dreifachen Geraden *zwei constant und eine beweglich* *). Die Discriminante der Gleichung 3. Grades geht über in:

$$3(B + zN)^2 (C + zO)^2,$$

es giebt also zwei singuläre Punkte:

$$z = -\frac{C}{O} \text{ und } z = -\frac{B}{N}.$$

Die beiden constanten Tangentialebenen können auch zusammenrücken, dann verschwindet die Discriminante identisch; zwei Mäntel der Regelfläche sind längs der dreifachen Geraden verzweigt, d. h. sie haben dieselbe zur *Rückkehrkante*, und die Rückkehrtangentialebene ist gerade die constante Tangentialebene. Es giebt auf der dreifachen Geraden nur noch *einen* einzigen *singulären Punkt;* macht man denselben zum Coordinatenanfang, so erhält man als Gleichung der Regelfläche**):

$$x^3 + 3Nx^2z + Qx^4 + 4Rx^3y + 6Sx^2y^2 + 4Txy^3 + Uy^4 = 0.$$

Der projicirende Kegel ist jetzt nur noch von der 5. Ord., er schickt durch den singulären Punkt einen Mantel mit den Reihen:

$$x = bz^4 + \cdots, \quad y = \alpha z^3 + \cdots.$$

Auch die Curve $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist nur noch von der 4. Ord., so dass der singuläre Punkt, abgesehen von der dreifachen Geraden, die Classe um 12 erniedrigt, da ja die Regelfläche immer von der 4. Classe sein muss. Jeder Schnitt durch den singulären Punkt liefert eine irreducible Curve 4. Ord., deren drei Aeste mit einander verzweigt sind, nur die Schnitte durch die dreifache Gerade machen hiervon eine Ausnahme.

124. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse ist kurz Folgendes zu bemerken. Die Regelfläche mit drei beweglichen Tangentialebenen in

*) Cremona, a. a. O. Regelfläche 10.

**) Diese Regelfläche ist von Cremona in der citirten Abhandlung nicht angegeben.

der dreifachen Geraden kann vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Pinch-points besitzen. Wir drehen nun eine Ebene um die dreifache Gerade und verfolgen die Bewegung ihres Berührungspunktes. Sind alle 4 Pinch-points reell, und bezeichnen wir dieselben mit A, B, C, D, siehe Fig. 45, so können wir von derjenigen Ebene ausgehen, deren Berührungspunkt der unendlich ferne Punkt ist. Der Drehung dieser Ebene um 180°, entspricht eine Bewegung des Berührungspunktes von $-\infty$ nach A, dann wird die Bewegung rückläufig bis B, kehrt hier abermals um und geht nach C, wird hier rückläufig bis D, kehrt hier wieder um und geht nach $+\infty$, womit die ganze Bewegung geschlossen ist. Die Figur bringt in der punktirten Linie diese Bewegung zur Anschauung; eine andere Möglichkeit kann nicht eintreten. Ob nun die Erzeugenden alle noch eine feste Gerade treffen oder nicht, ist hinsichtlich der Gestalt der Regelfläche nicht von Belang.

Sollen nun zwei Pinch-points zusammenrücken, so können das in unserer Figur die Punkte A und B oder C und D sein, dann rücken die 3 Erzeugenden durch einen solchen Punkt unendlich nahe zusammen. Hieraus ist aber unmittelbar die Bewegung des Berührungspunktes in diesem Falle klar. Man erkennt auch sofort, wie die Verhältnisse sich gestalten, wenn A und B conjugirt imaginär werden. Werden auch noch C und D conjugirt imaginär, so giebt es ersichtlich in jedem Punkte der dreifachen Geraden nur noch eine *einzige reelle Tangentialebene*. Aus der Regelfläche mit nur zwei rellen Pinch-points C und D kann man noch eine zweite Regelfläche ohne reelle Pinch-points ableiten, wenn man in Fig. 45 die Punkte C und D durchs Unendliche zusammenrücken, und dann conjugirt imaginär werden lässt. Dasselbe erreicht man, wenn man von der Figur 45a ausgeht und die Punkte C und D im Endlichen zusammenrücken und conjugirt imaginär werden lässt. Man erhält so eine Regelfläche, welche in jedem Punkt der dreifachen Geraden noch *drei reelle Tangentialebenen* besitzt. Dreht sich eine Ebene durch die dreifache Gerade um 180°, so durchläuft der Berührungspunkt diese Gerade drei Mal in derselben Richtung. Der Uebergang von der Regelfläche mit *zwei* reellen Pinch-points zu der letztgenannten Regelfläche, wird von einer Regelfläche, mit einer constanten Tangentialebene längs der dreifachen Geraden, gebildet.

Hat die Regelfläche in der dreifachen Geraden *eine* constante Tangentialebene und bezeichnen wir die beiden Pinch-points wieder mit A und B, den singulären Punkt aber mit S, so giebt uns Figur 45a die Bewegung des Berührungspunktes. Die Erzeugende durch den Berührungspunkt fällt dabei *ein* Mal mit der dreifachen Geraden zusammen und zwar gerade für den Punkt S als Berührungspunkt; indem also der Berührungspunkt die Lage S passirt, passirt die Erzeugende die Lage der dreifachen Geraden.

Nach einer Drehung von 180^0 nimmt die Erzeugende wieder ihre ursprüngliche Lage an. Versieht man die Erzeugende mit einem Pfeil, um eine positive Richtung zu markiren, so stimmt die Richtung zu Anfang und am Schluss der Bewegung überein, was bei den vorhergehenden Regelflächen ebenfalls der Fall ist. Man übersieht leicht die kleine Aenderung, welche eintritt, wenn der Pinch-point A in den singulären Punkt hereinrückt.

Hat die Regelfläche in der dreifachen Geraden *zwei* constante Tangentialebenen, so durchläuft der Berührungspunkt die dreifache Gerade *einfach*, wenn sich die Tangentialebene um 180^0 dreht. Für zwei Lagen des Berührungspunktes fällt die Erzeugende mit der dreifachen Geraden zusammen, die positive Richtung der Erzeugenden zu Anfang und zu Ende der Bewegung stimmen wieder überein.

Zum Schluss ist noch die Regelfläche zu nennen, bei welcher die beiden Mäntel mit constanter Tangentialebene verzweigt sind. Der Berührungspunkt durchläuft die Gerade einfach; für einen Punkt fällt die Erzeugende mit der dreifachen Geraden zusammen und ändert in demselben Moment die Richtung ihrer Drehung in Bezug auf ihren Punkt in der dreifachen Geraden.

Da bei der zuletzt genannten Regelfläche, die beiden singulären Punkte zusammengerückt sind, so erkennt man, dass bei der Regelfläche mit *zwei* constanten Tangentialebenen, die letzteren auch conjugirt imaginär sein können.

Die Steiner'sche Fläche, ihre Realitätsverhältnisse, sowie die Specialfälle derselben.

125. Da die Steiner'sche Fläche ein so allgemeines Interesse in Anspruch nimmt, so dürfte es nicht überflüssig sein, ihr ein besonderes Capitel zu widmen. Beginnen wir mit dem Fall der Steiner'schen Fläche, in welchem die drei Doppelgeraden reell sind, dann ist ihre Gleichung:

$$2xyzw + a_1 y^2 z^2 + a_2 z^2 x^2 + a_3 x^2 y^2 + 2b_1 x^2 yz + 2b_2 y^2 zx + 2b_3 z^2 xy = 0.$$

Die Pinch-points auf den drei Doppelgeraden bestimmen sich respective durch die Werthe:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{-1}{b_3 \pm \sqrt{a_1 a_2}},$$
$$x = 0, \qquad y = \frac{-1}{b_2 \pm \sqrt{a_1 a_3}}, \qquad z = 0,$$
$$x = \frac{-1}{b_1 \pm \sqrt{a_2 a_3}}, \qquad y = 0, \qquad z = 0;$$

zugleich werden die Gleichungen der singulären Ebenen in diesen 6 Punkten:

$$x\sqrt{a_2} \pm y\sqrt{a_1} = 0,$$

resp.

$$y\sqrt{a_3} \pm z\sqrt{a_2} = 0,$$

resp.

$$z\sqrt{a_1} \pm x\sqrt{a_3} = 0.$$

Von diesen singulären Ebenen lassen sich vier Mal drei herausgreifen, welche sich in einer Geraden schneiden. Die 6 Pinch-points liegen vier Mal zu drei in Ebenen, welche die Fläche längs eines Kegelschnitts berühren, die 6 Dorsallinien in den Pinch-points bilden die Kanten eines Tetraeders. Alle diese Eigenschaften sind längs bekannt und habe ich sie hier nur einfach wiederholt*).

Sind die Grössen a_1, a_2, a_3 alle drei zugleich positiv oder zugleich negativ, so sind die aufgezählten Singularitäten alle reell und das Tetraeder der Dorsallinie ist reell**). Die Fläche liegt ganz innerhalb dieses Tetraeders.

Sind von den Grössen a_1, a_2, a_3 eine oder zwei negativ, die andern positiv, so giebt es nur noch zwei reelle Pinch-points und zwei reelle Dorsallinien; die vier Ebenen, welche längs eines Kegelschnittes berühren, sind paarweise conjugirt imaginär.

Den Uebergangsfall bildet eine zerfallende Fläche, welche aus einer Ebene und einer Regelfläche 3. Ord. besteht.

Die Steiner'sche Fläche kann auch so beschaffen sein, dass eine der drei Doppelgeraden reell, die beiden andern aber conjugirt imaginär sind. Macht man die reelle Doppelgerade zur Axe $x = 0$, $y = 0$ und die reelle Ebene durch die beiden andern Doppelgeraden zur Ebene $z = 0$, bestimmt man ferner die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ so, dass die imaginären Doppelgeraden sich in der Form:

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2) = 0$$

darstellen, so wird die Gleichung der Steiner'schen Fläche:

$$(x^2+y^2)^2 + (azx+bzy)(x^2+y^2) + z^2(cx^2+dy^2+2exy) + 2\varrho z(x^2+y^2) = 0.$$

Hier giebt es offenbar nur noch zwei reelle Pinch-points, sie liegen auf der einzigen reellen Doppelgeraden $x = 0$, $y = 0$ und bestimmen sich als:

$$z = \varrho\,\frac{(c+d) \pm \sqrt{(c-d)^2 + 4e^2}}{e^2 - dc}.$$

---

*) Ich erwähne hier: Steiner, Kummer, Weierstrass, Cremona, Clebsch, Schröter, Sturm.

**) Es ist das diejenige Steiner'sche Fläche, deren Modell von Kummer angefertigt worden ist, vergl. Berliner Monatsberichte 1864, oder auch Verlagskatalog von L. Brill in Darmstadt.

Man erkennt, dass diese Pinch-points stets reell sein müssen; durch jeden dieser beiden Punkte gehen zwei reelle Ebenen, welche längs eines Kegelschnittes berühren. Im dreifachen Punkt giebt es einen reellen Flächentheil, welcher die Ebene $z = 0$ berührt, die Doppelgerade $x = 0$, $y = 0$ ist in der Nähe des dreifachen Punktes isolirt.

126. Den Uebergang von der Steiner'schen Fläche mit 3 reellen Doppelgeraden zu derjenigen mit nur einer reellen Doppelgeraden, bildet die Fläche mit *Selbstberührungsgeraden*; siehe Nr. 113. Die Gleichung dieser Fläche lässt sich immer schreiben:

$$x^2 z + a x^4 + b x^3 z + c x^2 y z + z^2 (d x^2 + e y^2) = 0.$$

Auf der Doppelgeraden $x = 0$, $y = 0$ liegt der eine Pinch-point $z = -\frac{1}{d}$, der andere ist in den dreifachen Punkt hereingerückt. Auf der Selbstberührungsgeraden $z = 0$, $x = 0$ liegen die beiden singulären Punkte $y = \frac{-1}{c \pm 2\sqrt{ae}}$; durch jeden dieser Punkte geht *eine* Ebene, welche längs eines Kegelschnitts berührt. Die beiden andern Ebenen, welche längs eines Kegelschnitts berühren, sind in die Ebene $z = 0$ zusammengefallen. Der projicirende Kegel 3. Classe geht stets durch den dreifachen Punkt und berührt daselbst die Selbstberührungsgerade.

Die singulären Punkte auf der Geraden $z = 0$, $x = 0$ können auch conjugirt imaginär werden, dann werden auch die beiden, längs eines Kegelschnitts berührenden Ebenen conjugirt imaginär; in diesem Falle giebt es kein isolirtes Stück der Selbstberührungsgeraden mehr.

Zum Schluss haben wir noch die Steiner'sche Fläche mit *Selbstosculationsgeraden* zu untersuchen. In Nr. 119 haben wir bereits gefunden, dass es auf der singulären Geraden einen singulären Punkt giebt, durch diesen Punkt giebt es eine singuläre Tangente und durch diese eine Ebene, welche längs eines Kegelschnittes berührt. Da diese Singularitäten immer reell sein müssen, so kann man die Gleichung der Fläche immer schreiben: $x^3 + (axz + by^2)^2 = 0$. Das Gestaltliche dieser Fläche ist bereits in Nr. 120 besprochen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um auf ein Versehen in meiner Abhandlung „Ueber die Gestalten der Kummer'schen Fläche," Math. Annalen Bd. XVIII aufmerksam zu machen. Dort ist in dem letzten Abschnitt, welcher über Linienflächen handelt, Seite 156, die Linienfläche mit vier reellen Cuspidalpunkten auf der *einen* und vier imaginären auf der *andern* Doppelgeraden ausgelassen worden, sie ist ein Specialfall der Kummer'schen Fläche vom Typus IV.

Leipzig, den 20. Januar 1884.