

Construction einer Tafel für den *lapsus hyperbolicus* innerhalb der Grenzen

$r = 0$  und  $r = \frac{2,10223029 \rho k^2 \mu}{\rho c^2 - 2 k^2 \mu}$ , wenn  $r$  die Entfernung des bewegten Puncts vom Schwerpunct der anziehenden Masse  $\mu$ , und  $k$  die *Gauss'sche* Zahl 0,01720209895 bedeutet, und für  $r = \rho$  die Geschwindigkeit  $c$  stattfindet, von Herrn Dr. *Lehmann*.

Ich beabsichtige, wie schon in № 929 der Astr. Nachrichten angekündigt worden, Tafeln zur directen Auflösung des *Kepler'schen* Problems für alle Excentricitäten zu berechnen, durch deren einfache Interpolation die wahre Anomalie und der natürliche Logarithmus des Radiusvectors sich mit einem Fehler-Maximum = *Arc.* 1" finden lassen werden, und hoffe dadurch denjenigen Rechnern, welche jenes Problem bei der Bahnbestimmung eines neu-entdeckten Weltkörpers oftmals hinter einander für unregelmässig-fortschreitende Argumente zu lösen haben, einen nicht unwesentlichen Dienst zu leisten, da alle bisherigen Methoden, ungeachtet der vorhandenen zahlreichen Erleichterungsmittel, immer noch mit einer unangenehmen Umständlichkeit verbunden waren. Ich gedenke aber dabei das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit zu umfassen, wo es auch die geradlinigen und hyperbolischen Bahnen in sich schliesst, und werde, damit sich aus den Anfängen ein Maassstab des Vertrauens auf die Genauigkeit und Gründlichkeit der ganzen Untersuchung entnehmen lasse, mit denjenigen Fällen beginnen, wo man mit Tafeln von einfachem Eingang ausreicht, — um so mehr, da die Untersuchung dieser Fälle zur Grundlage der Theorie der zusammengesetzteren Fälle dienen kann, welche Tafeln mit doppeltem Eingang nöthig machen.

### § 1.

Das *Kepler'sche* Problem im weitesten Sinne ist die Aufgabe, bei einem nach dem Gravitations-Gesetz bewegten Punkt, wenn die Elemente der Bahn gegeben sind, für jeden gegebenen Augenblick die auf den Centralpunkt bezogenen Polar-Coordinationen zu bestimmen. Die bei dieser Bewegung vorkommenden verschiedenen Fälle machen verschiedene Auflösungs-Methoden nöthig; überall aber werden wir den mittleren Sonnentag als Zeit-Einheit, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Längen-Einheit, und die Sonnen-Masse als Massen-Einheit nehmen.

### § 2.

Geradlinig ist die Bewegung nur dann, wenn sie

direct nach dem Centralpunkt zu oder direct von ihm abwärts gerichtet ist. Es handelt sich in diesem Falle darum, eine Gleichung zwischen der Zeit  $t$  und der Entfernung  $r$  des bewegten Punkts vom Centralpunkt zu finden. Nach dem Gravitations-Gesetz ist  $r^2 \frac{d^2 r}{dt^2}$  constant, also weder von  $t$  noch von  $r$ , sondern nur von der im Centralpunkt befindlichen Masse abhängig; ist die Centralkraft eine anziehende, und bezeichnet man die anziehende Masse (oder, wenn die Anziehung gegenseitig ist und man nur die relative Bewegung bestimmen will, die Summe beider Massen) mit  $\mu$ , mit  $k$  aber die bekannte *Gauss'sche* Zahl, deren Logarithmus = 8,2355814414.\* ist, so ist  $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k^2 \mu}{r^2}$ ; bei abstossender Kraft ist  $\frac{d^2 r}{dt^2} = +\frac{k^2 \mu}{r^2}$ . Die Grundgleichung der geradlinigen Central-Bewegung ist also

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \pm \frac{k^2 \mu}{r^2} = 0, \dots \dots \dots (1)$$

wo das obere Zeichen für die anziehende, das untere für die abstossende Kraft gilt.

### § 3.

Die linke Seite dieser Gleichung wird integrabel, wenn sie mit  $2 dr$  multiplicirt wird; auf diese Weise findet man das erste Integral

$$\frac{dr^2}{dt^2} \mp \frac{2 k^2 \mu}{r} = \frac{k^2 \mu}{a},$$

wo  $a$  eine constante Linie ist; und zwar ist  $a$  bei einer anziehenden Kraft positiv oder unendlich oder negativ, je nachdem in irgend einem Augenblick der Bewegung  $\frac{dr^2}{dt^2}$  grösser oder gleich oder kleiner ist als  $\frac{2 k^2 \mu}{r}$  (*Lambert* in seiner Schrift „*Insigniores orbitarum cometarum parabolicarum proprietates*“ nennt die Bewegung im ersten Falle

\*) Der Punct hinter einem Logarithmus soll allemal — 10 bedeuten.

*lapsus hyperbolicus*, im zweiten *lapsus parabolicus* und im dritten *lapsus ellipticus*); bei einer abstossenden Kraft ist  $a$  allemal positiv. Will man aber  $a$  unter allen Umständen als positiv betrachten, so hat man für den *lapsus hyperbolicus*  $\frac{dr^2}{k^2 \mu dt^2} = \frac{2}{r} + \frac{1}{a}$ , für den *lapsus parabolicus*  $\frac{dr^2}{k^2 \mu dt^2} = \frac{2}{r}$ , für den *lapsus ellipticus*  $\frac{dr^2}{k^2 \mu dt^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$ , und für die geradlinige Central-Bewegung mit abstossender Kraft  $\frac{dr^2}{k^2 \mu dt^2} = \frac{1}{a} - \frac{2}{r}$  zu schreiben. Diese 4 Gleichungen dienen dazu, das Element  $a$  aus den primitiven Umständen der Bewegung zu bestimmen; ist nämlich  $\frac{dr^2}{dt^2} = c^2$  für  $r = \rho$ , so ist beim *lapsus hyperbolicus*  $a = \frac{\rho k^2 \mu}{\rho c^2 - 2 k^2 \mu}$ , beim *lapsus ellipticus*  $a = \frac{\rho k^2 \mu}{2 k^2 \mu - \rho c^2}$ , und bei der geradlinigen Central-Beweg. mit abstossender Kraft  $a = \frac{\rho k^2 \mu}{\rho c^2 + 2 k^2 \mu}$ ; setzt man nun  $\tau = \frac{k}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot t$ , und  $s = \frac{r}{a}$ , so kann man die ersten Integrale der Gleichung (1) des vorigen § für die vier verschiedenen Fälle kürzer so

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{2}{s} + 1 \dots (2), \quad \frac{dr^2}{k^2 \mu dt^2} = \frac{2}{r} \dots (3),$$

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{2}{s} - 1 \dots (4), \quad \frac{dr^2}{k^2 \mu dt^2} = 1 - \frac{2}{s} \dots (5)$$

schreiben.

#### § 4.

Die zweite Integration lässt sich durch Quadraturen vollziehen, wenn man den Gleichungen (2), (3), (4), (5) resp. die Gestalt

$$d\tau = \mp \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{s} + 1}} \quad (6), \quad dt = \mp \frac{dr}{k} \sqrt{\frac{r}{2\mu}} \quad (7),$$

$$d\tau = \mp \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{s} - 1}} \quad (8), \quad d\tau = \mp \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{2}{s}}} \quad (9)$$

gibt (wo die oberen Zeichen für die nach dem Centralpunkt zu gehende, die unteren für die vom Centralpunkt abwärts gehende Bewegung gelten).

Diese vier Gleichungen lehren, dass bei dem auf den Centralpunkt zu gehenden *lapsus hyperbolicus* oder *parabolicus* oder *ellipticus* der bewegte Punkt mit beschleunigter Bewegung dem Centralpunkt zueilt und in demselben mit unendlicher Geschwindigkeit anlangt, während der auf den Centralpunkt zu gehende Punkt bei abstossender Kraft ver-

zögert wird und dem Centralpunkt nie näher kommt als bis auf die Entfernung  $2a$  (weil in grösserer Nähe  $\frac{dr}{dt}$  eine unmögliche Grösse wäre); und da schon bei gleichförmig-verzögerter Bewegung die Geschwindigkeit 0 irgendwann erreicht wird, so findet dies um so mehr bei der mit der grösseren Nähe am Centralpunkt wachsenden abstossenden Kraft statt, und zwar wird die Geschwindigkeit 0 erreicht, wenn die Entfernung vom Centralpunkt  $= 2a$ , worauf dann der bewegte Punkt den bis dahin zurückgelegten Weg rückwärts in einer der vorigen Bewegung symmetrischen Bewegung beschreibt. Das völlige Erreichen des Centralpunkts beim *lapsus hyperbolicus* oder *parabolicus* oder *ellipticus* aber ist physisch unmöglich, weil in der Natur nie ein blosser Punkt, sondern allemal ein Körper das Anziehende ist, und schon an der Oberfläche desselben (wo der bewegte Körper nicht mit unendlicher, sondern immer noch mit endlicher Geschwindigkeit anlangt) die Stetigkeit der Bewegung unterbrochen wird, worauf dann die Bestimmung des weiteren Erfolgs kein Gegenstand des *Kepler'schen* Problems mehr ist, auch wenn dasselbe im weitesten Sinne genommen wird.

Ist aber der bewegte Punkt in einer vom Centralpunkt abwärts gerichteten Bewegung begriffen, so lehren die Gleichungen (6), (7), (8), (9) folgendes:

Beim *lapsus hyperbolicus* wird die Bewegung zwar verzögert, die Geschwindigkeit bleibt aber stets  $> k \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ , und folglich geht der bewegte Punkt ins Unendliche fort, wobei sich seine Geschwindigkeit dem Werthe  $k \sqrt{\frac{\mu}{a}}$  so sehr nähert, dass der Überschuss kleiner wird als jede gegebene Geschwindigkeit.

Verlängert man in Gedanken den Weg, welchen ein im *lapsus parabolicus* vom Centralpunkt abwärts gehender Punkt beschreibt, vom Centralpunkt abwärts ins Unendliche, und theilt man die dadurch entstandene unendliche Linie in lauter unendlich-kleine, aber gleiche Theile, so wird jeder dieser Theile mit einer endlichen Geschwindigkeit zurückgelegt, welche nach dem umgekehrten Verhältniss der Quadratwurzeln der Entfernung abnimmt; folglich geht auch hier der bewegte Punkt ins Unendliche fort, und zwar gebraucht er, um von der kleineren Entfernung  $r$  zur grösseren Entfernung  $r'$  zu gelangen, einen Zeitraum, welcher  $> r' - r$ , dividirt durch die in der Entfernung  $r$  stattfindende Geschwindigkeit, aber  $< r' - r$ , dividirt durch die in der Entfernung  $r'$  stattfindende Geschwindigkeit, d.i.  $> \frac{r' - r}{k} \sqrt{\frac{r}{2\mu}}$ , aber  $< \frac{r' - r}{k} \sqrt{\frac{r'}{2\mu}}$ , ist; zuletzt wird die Geschwindigkeit, ohne völlig in 0 überzugehen, kleiner als jede gegebene Geschwindigkeit.

Die verzögerte Bewegung im *lapsus ellipticus* führt den bewegten Punct niemals über die Entfernung  $r = 2a$  hinaus; verlängert man nun in Gedanken den Weg des bewegten Puncts bis auf die Entfernung  $2a$ , und theilt man die dadurch entstandene von der Entfernung  $r$  bis zur Entfernung  $2a$  reichende Linie in lauter unendlich-kleine, aber gleiche Theile, so wird jeder dieser Theile mit einer endlichen Geschwindigkeit zurückgelegt, mit Ausnahme des letzten Theils, für welchen die Gleichung (8)  $\frac{dr}{dt} = 0$  giebt; folglich erreicht der bewegte Punct jede Entfernung vom Centralpunct, welche  $< 2a$  ist, und zwar braucht er, um von der Entfernung  $r$  bis zur Entfernung  $r'$  zu gelangen, einen Zeitraum,

welcher, wenn man  $s' = \frac{r'}{a}$  macht, zwar  $> \frac{\frac{r'-r}{k} \sqrt{\frac{a}{\mu}}}{\sqrt{\frac{2}{s}-1}}$ , aber doch  $< \frac{\frac{r'-r}{k} \sqrt{\frac{a}{\mu}}}{\sqrt{\frac{2}{s}-1}}$ , und, genauer bestimmt, dem von

$s$  bis  $s'$  reichenden  $\frac{a}{k} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{s}-1}}$  gleich ist. Nun

aber ist das von 0 bis  $s$  reichende

$$\int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{s}-1}} = \text{Arc cos } (1-s) - \sqrt{2s-s^2}, \dots (10)$$

also das von  $s = 0$  bis  $s = 2$  reichende  $\int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{s}-1}} = \pi$ ,

also endlich. Folglich erreicht der bewegte Punct die Entfernung  $2a$  vom Centralpunct wirklich, und langt daselbst mit der Geschwindigkeit 0 an, worauf er den bis dahin zurückgelegten Weg rückwärts in einer der vorigen Bewegung symmetrischen Bewegung beschreibt.

Der mit abtossender Kraft vom Centralpunct abwärts gehende Punct wird fortwährend beschleunigt, und entfernt sich folglich ins Unendliche; aber seine Geschwindigkeit wächst nicht ins Unendliche, sondern bleibt stets  $< k \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ , welchem Werthe sie sich so nähert, dass das Fehlende kleiner wird als jede gegebene Geschwindigkeit.

### § 5.

Wir können nun vollständig die zweiten Integrationen ziehen, und zwar zuerst für die Gleichung (6).

Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$d\tau = \mp d(\sqrt{2s+s^2} - \log.\text{nat.}(1+s+\sqrt{2s+s^2})).$$

Das Integral der Gleichung (6) wird also durch die dem *lapsus hyperbolicus* zukommende Eigenschaft ausgedrückt,

dass  $\sqrt{2s+s^2} - \log.\text{nat.}(1+s+\sqrt{2s+s^2})$  sich mit einer constanten Geschwindigkeit ändert, welche  $= \mp \frac{k}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$  ist. Die Zeit, welche der bewegte Punct braucht, um sich dem Centralpunct von der Entfernung  $r'$  bis zur Entfernung  $r$  zu nähern, oder sich von ihm von der Entfernung  $r$  bis zur Entfernung  $r'$  zu entfernen, ist daher, wenn man auch hier  $s' = \frac{r'}{a}$  setzt, =

$$\frac{a}{k} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left( \sqrt{2s'+s'^2} - \sqrt{2s+s^2} - \log.\text{nat.} \frac{1+s'+\sqrt{2s'+s'^2}}{1+s+\sqrt{2s+s^2}} \right).$$

Folglich ist, wenn man  $\sigma = \frac{\rho}{a}$  setzt, die Zeit, welche erfordert wird, den bewegten Punct von der primitiven Entfernung  $\rho$  (wenn es möglich wäre) bis in den Centralpunct selbst zu führen, (entsprechend der Durchgangszeit durchs Perihelium bei der Planeten- und Kometen-Bewegung),

$$= \frac{a}{k} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left( \sqrt{2\sigma+\sigma^2} - \log.\text{nat.}(1+\sigma+\sqrt{2\sigma+\sigma^2}) \right);$$

hat man dieses Element bestimmt, so findet man den Zeitpunkt, in welchem der bewegte Punct sich in jeder gegebenen Entfernung  $r$  vom Centralpunct befindet, durch die Gleichung

$$\frac{k}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot t = \sqrt{2s+s^2} - \log.\text{nat.}(1+s+\sqrt{2s+s^2})$$

(wenn  $t$  den auf den Weg  $r$  verwandten Zeitraum bedeutet, welche Gleichung wir kürzer so

$$\tau = \sqrt{2s+s^2} - \log.\text{nat.}(1+s+\sqrt{2s+s^2}) \dots (11)$$

schreiben wollen.

### § 6.

In Beziehung auf die umgekehrte Aufgabe aber, nämlich  $s$  aus  $\tau$  zu bestimmen, ist die Gleichung (11) transscendent, und kann daher direct nicht ohne Hülfe von Tafeln, welche zu interpoliren sind, gelöst werden. Um nun die zweckmässigste Construction solcher Tafeln zu erkennen, müssen wir die Fälle unterscheiden, wo  $t$  (und also auch  $r, \tau$  und  $s$ ) klein oder gross ist.

Sind  $t$  und  $r$  klein, so lässt sich die Gleichung (6) § 4 in die Reihe

$$\frac{d\tau}{ds} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{3}{2}} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{5}{2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{7}{2}} + \dots$$

auflösen, welche, integrirt,

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot s^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} s^{\frac{5}{2}} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{7} s^{\frac{7}{2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{9} s^{\frac{9}{2}} + \dots$$

und folglich

$$\frac{\tau \sqrt{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{5} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8} \cdot \frac{s^2}{7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \frac{s^3}{9} + \dots (12)$$

giebt. Das  $n$ te Glied dieser Reihe muss, um das folgende Glied zu geben, mit  $-\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{s}{2}$ , also mit einer

Zahl multiplicirt werden, welche absolut genommen kleiner ist als  $\frac{s}{2}$ . Folglich convergirt die Reihe (12) und hat eine positive Summe (die aber  $< \frac{1}{3}$  ist), so lange  $s$  nicht grösser ist als 2. Die Gleichung (12) giebt

$$\frac{d\tau \sqrt{\frac{1}{2}}}{ds} = -\frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} \cdot \frac{2s}{7} - \frac{1.3.5}{4.8.12} \cdot \frac{3s^2}{9} + \frac{1.3.5.7}{4.8.12.16} \cdot \frac{4s^3}{11} - \dots (13)$$

Das  $n$ te Glied dieser Reihe muss, um das folgende Glied zu geben, mit  $-\left(1 - \frac{2n-3}{2n(2n+5)}\right) \cdot \frac{s}{2}$ , also mit einer Zahl multiplicirt werden, welche, wenn  $n > 1$ , absolut genommen kleiner ist als  $\frac{s}{2}$ . Folglich convergirt die Reihe

(13) und die Summe des 3ten, 4ten, 5ten... oder des 5ten, 6ten, 7ten... oder des 7ten, 8ten, 9ten... u. s. w. Gliedes dieser Reihe ist negativ, so lange  $s$  kleiner ist als 2. Ist  $s < \frac{28}{15}$ , so ist auch die Summe des 1sten und 2ten Gliedes (und folglich die Summe der ganzen Reihe (13)) negativ. Ob nun gleich die Summe des 1sten, 2ten, 3ten und 4ten Gliedes positiv ist, wenn  $s = 2$ , so macht doch  $s = 2$  die Summe des 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten und 6ten Gliedes negativ. Und wenn man die Summe dieser 6 Glieder differentirt, so findet man

$$d\left(-\frac{1}{20} + \frac{3}{112}s - \frac{5}{384}s^2 + \frac{35}{5632}s^3 - \frac{315}{106496}s^4 + \frac{231}{163840}s^5\right)$$

$= \frac{3}{112} + \frac{3}{56}s \left(\frac{2}{11}s - \frac{1}{3}\right) + \frac{21}{2048}s^3 \left(\frac{1}{16}s - \frac{1}{13}\right)$ , eine Grösse, welche, wenn  $s$  nicht  $< \frac{28}{15}$  und folglich  $\frac{28}{15}s$  nicht  $< \frac{1,3363636\dots}{3}$  und  $\frac{11}{16}s$  nicht  $< \frac{16,68333\dots}{13}$  angenommen wird, positiv ist. Folglich macht um so mehr  $s = \frac{28}{15}$  oder = einer zwischen  $\frac{28}{15}$  und 2 liegenden Grösse die Summe der 6 ersten Glieder der Reihe (13) (und daher auch die Summe der ganzen Reihe (13)) negativ. Die Summe der Reihe (13) ist also negativ, so lange überhaupt  $s < 2$  ist. Hieraus folgt, dass die oben erwähnte positive Summe der Reihe (12) von  $\frac{1}{3}$  desto mehr übertroffen wird, je mehr  $s$  sich dem Werthe 2 nähert.

Der Grenzwert, welchem  $\frac{\tau \sqrt{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}}$  sich nähert, wenn man  $\tau$  und  $s$  bis auf 0 abnehmen lässt, ist zufolge der Gleichung (12)  $= \frac{1}{3}$ .

Folglich ist dieser Grenzwert für  $\frac{3\tau \sqrt{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} = 1$ , und  $\frac{3\tau \sqrt{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}}$  wird, während  $s$  von 0 bis 2 wächst, von 1 desto

mehr übertroffen, je mehr  $s$  sich dem Werthe 2 nähert. Folglich ist der entsprechende Grenzwert für  $\frac{s^{\frac{1}{2}}}{3\tau \sqrt{\frac{1}{2}}}$ , d. i. für  $\log. \frac{s}{x}$  (wenn man

$$x = \sqrt[5]{\frac{9}{2}} \cdot \tau^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots (14)$$

setzt),  $= 0$ , und  $y = \log. \frac{s}{x}$  ist, während  $s$  von 0 bis 2 wächst, positiv und desto grösser, je mehr  $s$  sich dem Werthe 2 nähert. Bezeichnet man nun mit  $\alpha$ , wie gewöhnlich, den Modulus des Logarithmen-Systems, so ist vermöge der Gleichung (12) für ein sehr kleines  $t$  und  $r$  näherungsweise

$$y = -\frac{2}{3} \alpha \log. \text{nat.} \frac{3\tau \sqrt{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3} \alpha \log. \text{nat.} (1 - \frac{3}{20}s) = \frac{\alpha s}{10} = \frac{\alpha x}{10};$$

hieraus sehen wir, dass, wenn  $t$  klein ist, die einfachste Einrichtung der Tafel die ist, dass darin  $x$  als Argument, und  $y$  als die zugehörige Function erscheint; denn auf diese Art wird, während das Argument von 0 an (nur nicht über denjenigen Werth von  $x$  hinaus, welcher zu  $s = 2$  gehört) wächst, auch die Function von 0 an ohne Schwanken wachsen und anfangs sehr nahe dem Argument proportional sein, und man wird, um  $\log. s$  zu finden, weiter nichts nöthig haben, als dass man zu dem gegebenen  $t$

$$\lg x = \frac{1}{3} \log \frac{9}{2} + \frac{2}{3} \log \tau$$

berechnet, die zu diesem Logarithmus gehörige Zahl  $x$  in der Argument-Spalte der Tafel aufsucht, und die zugehörige Function  $y$  zu  $\log. x$  addirt.

## § 7.

Sind aber  $t$  und  $r$  gross, so lässt sich die Gleichung (6) § 4 in die Reihe

$$\frac{d\tau}{ds} = 1 - \frac{1}{s} + \frac{1.3}{1.2s^2} - \frac{1.3.5}{1.2.3s^3} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4s^4} - \dots$$

auflösen, welche, integrirt,

$$\tau = s - \log. \text{nat.} s + C - \frac{3}{1.1.2s} + \frac{3.5}{1.2.2.3s^2} - \frac{3.5.7}{1.2.3.3.4s^3} + \dots (15)$$

giebt, wo die Constante  $C$  noch zu bestimmen ist. Das  $n$ te Glied der auf diese Art für  $s - \log. \text{nat.} s - \tau + C$  gefundenen Reihe muss, um das folgende Glied zu geben, mit  $-\left(1 - \frac{3n+4}{(n+2)(2n+2)}\right) \cdot \frac{2}{s}$ , also mit einer Zahl multiplicirt werden, welche absolut genommen kleiner ist als  $\frac{2}{s}$ . Folglich convergirt die für  $\tau$  gefundene Reihe (15) schon vom 4ten Gliede an, so lange  $s$  nicht kleiner ist als 2. Die Constante  $C$  findet sich vermittelst der Gleichung (11) § 5; es ist nämlich

$$\sqrt{2s+s^2} = s + 1 - \frac{1}{2s} + \frac{1.3}{2.3s^2} - \frac{1.3.5}{2.3.4s^3} + \dots,$$

also  $1 + s + \sqrt{2s + s^2} = 2s \left( 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{4s^2} + \frac{1.3}{4.3s^3} - \frac{1.3.5}{4.3.4s^4} + \frac{1.3.5.7}{4.3.4.5s^5} - \dots \right),$

also  $\log. nat. (1 + s + \sqrt{2s + s^2}) = \log. nat. s + \log. nat. 2 + \frac{1}{s} - \frac{3}{4s^2} + \frac{5}{6s^3} - \frac{35}{32s^4} + \dots,$

also  $\tau = s - \log. nat. s + 1 - \log. nat. 2 - \frac{3}{2s} + \frac{5}{4s^2} - \frac{35}{24s^3} + \frac{63}{32s^4} - \dots, \dots \dots \dots (16)$

welche Gleichung, obgleich darin das Gesetz der Fortschreitung der Coefficienten nicht einleuchtet, doch mit der Gleichung (15) verglichen  $C = 1 - \log. nat. 2$  giebt, worauf dann das Gesetz der Fortschreitung der Coefficienten der Reihe (16) durch die Reihe (15) ausgesprochen wird. Aus der Gleichung (15) folgt:

$$\frac{\tau}{s} = 1 - \frac{\log. nat. s}{s} + \frac{1 - \log. nat. 2}{s} - \frac{3}{1.1.2s^2} + \frac{3.5}{1.2.2.3s^3} - \frac{3.5.7}{1.2.3.3.4s^4} + \dots, \dots \dots (17)$$

in welcher Reihe jedes der nach  $-\frac{\log. nat. s}{s}$  folgenden Glieder  $= 0$  wird, wenn  $s$  ins Unendliche wächst. Dass aber auch  $\frac{\log. nat. s}{s}$  selbst  $= 0$  wird, lässt sich leicht beweisen. Setzt man nämlich  $s$  nach und nach  $= 10, 100, 1000, \dots$ , so wird  $\frac{\log. s}{s} = \frac{1}{10}, \frac{2}{100}, \frac{3}{1000}, \dots$ ; dividirt man mit jedem dieser Brüche in den folgenden, so erhält man nach und nach  $\frac{2}{10}, \frac{3}{20}, \frac{4}{30}, \dots$ ; der  $n$ te dieser Quotienten ist  $= \frac{1}{10} + \frac{1}{10n}$ , also desto kleiner, je grösser  $n$ ; folglich convergirt die Reihe  $\frac{1}{10}, \frac{2}{100}, \frac{3}{1000}, \dots$  schneller als eine fallende geometrische Reihe, und man kommt daher endlich auf ein Glied, welches kleiner ist als jede gegebene Grösse. Folglich ist  $\frac{\log. s}{s} = 0$ , wenn  $s$  unendlich, und da man dieselben Schlüsse machen kann, wenn man statt 10 jede andere Zahl, welche  $> 1$  ist, als Grundzahl des Logarithmen-Systems annimmt, (selbst für den Fall, wo die Grundzahl  $A$  zwischen 1 und 2 liegt, lässt sich allemal ein  $n$ tes Glied der Reihe  $\frac{1}{A}, \frac{2}{A^2}, \frac{3}{A^3}, \dots$  angeben, für welches  $\frac{1}{A} + \frac{1}{An} < 1$  ist, von welchem Gliede an also die Reihe convergirt), so ist auch  $\frac{\log. nat. s}{s} = 0$ , wenn  $s$  unendlich. Folglich wird jedes Glied der Reihe (17) unendlich gross im Vergleich

zum folgenden, wenn  $s$  ins Unendliche wächst. Folglich nähert sich  $\frac{\tau}{s}$  (mithin auch  $\frac{s}{\tau}$ ) unendlich dem Werthe 1, und also  $\lg. \frac{\tau}{s}$  und  $\lg. \frac{s}{\tau}$  dem Werthe 0, wenn  $s$  ins Unendliche wächst. (Dass aber  $\frac{s}{\tau}$  überhaupt desto kleiner ist, je grösser  $\tau$ , und folglich  $\log. \frac{s}{\tau}$  desto kleiner, je grösser  $\log. \tau$ , ist eine unmittelbare Folge davon, dass  $\frac{d s}{d \tau}$  desto kleiner ist, je grösser  $\tau$ .) Es ist daher (zum Behuf der bequemen Berechnung von  $\log. s$  aus dem gegebenen  $\tau$ ) rathsam, für die Fälle, wo  $t$  gross ist, eine Tafel zu construiren, worin  $\log. \tau$  das Argument, und  $\log. \frac{s}{\tau}$  die dazu gehörige Function ist; denn eine solche Tafel wird von selbst da ihr Ende erreichen, wo  $\log. \frac{s}{\tau}$  bis auf einen Werth abgenommen hat, welcher nicht beachtet wird. Diese Tafel kann aber nicht bei  $\tau = 0$  anfangen, weil  $\log. \tau$  für  $\tau = 0$  unendlich (und zwar negativ) ist, und daher am Anfang der Tafel keine Interpolation möglich wäre. Lässt man sie, wie die Tafel der Additions-Logarithmen, mit  $\log. \tau = 0$  anfangen, so kann sie sich unmittelbar an die im vorigen §. erwähnte, für kleine Werthe von  $t$  zu construierende Tafel anschliessen; denn für  $s = 2$  ist (zufolge der Gleichung (11) § 5)

$$\tau = \sqrt{8} - \log. nat. (3 + \sqrt{8}) = \sqrt{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} - \dots \right) = 1,06567\dots^*), \text{ also } \log. \tau \text{ schon } > 0.$$

Die Tafel für kleine Werthe von  $t$  braucht, wenn die für grosse Werthe mit  $\log. \tau = 0$  beginnt, nur bis

$$x = \sqrt[5]{2} = 1,65 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3993} - \frac{1.2}{3.6} \left( \frac{7}{3993} \right)^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9} \left( \frac{7}{3993} \right)^3 + \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12} \left( \frac{7}{3993} \right)^4 + \dots \right) = 1,650963\dots$$

fortgeführt zu werden.

\*) Zur Controlle dieses Werthes dient die Rechnung mittelst der viel schneller convergirenden Reihe

$$\tau = \sqrt{8} - \log. nat. 6 + \frac{2}{35 + 12\sqrt{8}} + \frac{2}{3(35 + 12\sqrt{8})^3} + \frac{2}{5(35 + 12\sqrt{8})^5} + \dots$$

Ich verweise hier, wie für alle ähnlichen Fälle weiter unten, hinsichtlich der Zuverlässigkeit aller Ziffern und der Vermeidung von Druckfehlern auf die Bemerkungen, welche ich auf der 5ten Seite meiner kleinen Schrift: „Fünf merkwürdige unendliche Reihen für die Sinus und Cosinus vielfacher Bogen und für die Zahlen  $\pi$  und  $\pi^2$ , Berl. 1855, in Commission bei F. Schneider“, gemacht habe.

## § 8.

Was den im vorigen §. angeführten nicht zu beachtenden Werth von  $\log. \frac{s}{\tau}$  betrifft, so wollen wir  $\alpha \text{ Arc. } 1''$  als einen solchen nicht zu beachtenden Werth ansehen, weil nach der bisher erreichten Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen (man sehe die Vorrede zu *Bremiker's* sechsziffrigen Logarithmen-Tafeln, zu Ende der 8<sup>ten</sup> und Anfang der 9<sup>ten</sup> Seite) die Vermeidung eines Fehlers von etwas mehr als  $1''$  in der Bestimmung der einem gegebenen physischen Augenblick entsprechenden wahren Anomalie eines Planeten und eines Fehlers von etwas mehr als  $\text{Arc. } 1''$  in der Bestimmung des  $\log. \text{nat.}$  des gleichzeitigen Radiusvectors nicht verbürgt werden kann. Wir wollen nun für den *lapsus hyperbolicus* denjenigen Werth von  $\log. \tau$  bestimmen, für welchen  $\log. \frac{s}{\tau} = \alpha \text{ Arc. } 1'' = \frac{\alpha \pi}{648000}$  ist. Dazu dient die

$$0,0000138155 \dots \quad 0,00000725432 \dots$$

u. s. w.; folglich liegt  $s$  zwischen 3000000 und 4000000. Setzen wir  $s = 3100000$ , so wird  $\frac{\log. \text{nat. } s}{s} = 0,00000482158 \dots$

Hieraus sehen wir, dass ziemlich nahe  $s = 3082000$ . Die weitere Annäherung kann durch den ersten Differential-Coefficienten

geschehen. Wir finden  $\frac{d \log. \frac{s}{\tau}}{ds} = \frac{d \log. s}{ds} - \frac{d \log. \tau}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \alpha \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{s}{s+2}} \right)$ , also

$$\frac{ds}{d \log. \frac{s}{\tau}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{1}{s} - \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{s}{s+2}}}. \text{ Nun aber ist } \sqrt{\frac{s}{s+2}} = \left( 1 + \frac{2}{s} \right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{s} + \frac{1.3}{1.2 s^2} - \frac{1.3.5}{1.2.3 s^3} + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4 s^4} - \dots,$$

also sehr nahe  $= 1 - \frac{1}{s}$ , zufolge der Gleichung (17) § 7 aber sehr nahe  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{s} + \frac{\log. \text{nat. } (2s) - 1}{s^2}$ , also

$$\frac{ds}{d \log. \frac{s}{\tau}} = - \frac{s^2}{\log. (2s) - 2\alpha}, \text{ also der zweite Näherungswerth von } s \text{ vermöge der Gleichung (17) = dem Reste, welcher}$$

bleibt, wenn man

$$\text{Arc. } 1'' + \log. \text{nat.} \left( 1 - \frac{\log. \text{nat. } 6164000 - 1}{3082000} - \frac{3}{1.1.2.3082000^2} + \frac{3.5}{1.2.2.3.3082000^3} - \frac{3.5.7}{1.2.3.3.4.3082000^4} + \dots \right)$$

mit  $\frac{3082000^2}{\log. \text{nat. } 6164000 - 2}$  multiplicirt und das Product von 3082000 subtrahirt. Führen wir diese Berechnung mittelst Logarithmen-Tafeln aus, so findet sich der 2te Näherungswerth von  $s = 3012448$ ; hierzu das Product von

$$- \log. \text{nat.} \left( 1 - \frac{\log. \text{nat. } 6024896 - 1}{3012448} - \frac{3}{1.1.2.3012448^2} + \frac{3.5}{1.2.2.3.3012448^3} - \frac{3.5.7}{1.2.3.3.4.3012448^4} + \dots \right) - \text{Arc. } 1''$$

und  $\frac{3012448^2}{\log. \text{nat. } 6024896 - 2}$  addirt, giebt den 3<sup>ten</sup> Näherungswerth  $= 3013927$ , und auf ähnliche Art findet sich der 4te  $=$

3013929, ... (die Punkte bedeuten hier die weggelassenen Bruchstellen). Da wir auf diese Weise schon einen sehr genäherten Werth von  $s$  gefunden, so wollen wir, um den zugehörigen Werth von  $\log. \tau$  in möglichst enge Grenzen der Ungewissheit einzuschliessen, für  $s = 3013929$  und  $s = 3013930$  die zugehörigen Werthe von  $\log. \text{nat. } \frac{s}{\tau}$  in aller Strenge,

also ohne Hülfe von Logarithmen-Tafeln, berechnen. Wir finden vermöge der Gleichung (17) für  $\frac{\tau}{s}$  die beiden Werthe

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{\log. \text{nat. } 6027858 - 1}{3013929} - \frac{3}{1.1.2.3013929^2} + \frac{3.5}{1.2.2.3.3013929^3} - \frac{3.5.7}{1.2.3.3.4.3013929^4} + \dots, \\ 1 - \frac{\log. \text{nat. } 6027860 - 1}{3013930} - \frac{3}{1.1.2.3013930^2} + \frac{3.5}{1.2.2.3.3013930^3} - \frac{3.5.7}{1.2.3.3.4.3013930^4} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Gleichung (17) des vorigen §. Da hier  $s$  sehr gross ist, so können wir in erster Annäherung  $\frac{\tau}{s} = 1 - \frac{\log. \text{nat. } s}{s}$

setzen. Setzen wir  $\log. \frac{s}{\tau} = \frac{\alpha \pi}{648000}$ , so ist  $\frac{\tau}{s}$  näherungsweise  $= 1 - \frac{\pi}{648000}$ , also  $\frac{\pi}{648000} = \frac{\log. \text{nat. } s}{s}$ . Setzen

wir  $s$  nach und nach  $= 10, 100, 1000, \dots$ , so wird  $\frac{\log. \text{nat. } s}{s}$  nach und nach  $=$

$$0,23025 \dots \quad 0,046051 \dots \quad 0,0069077 \dots \quad 0,00092103 \dots \\ 0,000115129 \dots \quad 0,0000138155 \dots \quad 0,00000161180 \dots$$

u. s. w. Da nun  $\frac{\pi}{648000} = 0,0000048481368 \dots$ , so liegt das dem gesuchten  $\log. \tau$  entsprechende  $s$  zwischen 1000000 und 10000000. Setzen wir  $s$  nach und nach  $= 1000000, 2000000, 3000000, \dots$ , so wird  $\frac{\log. \text{nat. } s}{s}$  nach und nach  $=$

$$0,00000497137 \dots \quad 0,00000380045 \dots \quad \frac{\log. \text{nat. } s}{s} = 0,00000482158 \dots$$

Wir berechnen  $\log. nat. 6027858$  und  $\log. nat. 6027860$  am schnellsten convergirend durch die Formel

$$\lg. nat. x = \lg. nat. y - \lg. nat. z + 2 \cdot \frac{xz-y}{xz+y} + \frac{2}{3} \left( \frac{xz-y}{xz+y} \right)^3 + \frac{2}{5} \left( \frac{xz-y}{xz+y} \right)^5 + \dots, \dots \dots (19)$$

wo  $y$  und  $z$  Zähler und Nenner eines von  $x$  wenig verschiedenen Bruches sind, welche aus den Factoren 2, 3, 10 zusammengesetzt sind, und deren natürliche Logarithmen sich daher durch Addition der bekannten Vielfachen von  $\log. nat. 2$ ,  $\log. nat. 3$  und  $\log. nat. 10$  leicht finden lassen. Hier können wir, da  $\frac{10^{12}}{2^{11} \cdot 3^4} = 6028163,5\dots$  ist,  $y = 10^{12}$  und  $z = 2^{11} \cdot 3^4$  setzen, und zur Controlle die bekannten Vielfachen von  $\log. nat. 5$  und  $\log. nat. 6$  zu Hülfe nehmen. Wir finden  $\log. nat. \frac{10^{12}}{2^{11} \cdot 3^4} = \log. nat. \frac{10^{12} \cdot 5^7}{6^4} = 15,6119529750967\dots$ , und, wenn wir  $y = 10^{12}$  und  $z = 2^{11} \cdot 3^4$  setzen,  $\frac{xz-y}{xz+y}$  für  $x = 6027858$  und  $x = 6027860$  resp. =

$$-\frac{1}{39452,8\dots}, \quad -\frac{1}{39712,8\dots},$$

$$0,0000048481361\dots - 0,0000048481346\dots : Arc. 1'' = 0,0000048481361\dots = 3013930 - 3013929 : 3013929 - s,$$

d. i.  $15 : 7 = 1 : 3013929 - s) = 3013928,5\dots$ . Um alle Zweifel niederzuschlagen, setzen wir  $s = 3013928,5$  und  $s = 3013928,6$ , und finden, indem wir  $y = 10^{12}$  und  $z = 2^{11} \cdot 3^4$  und zur Controlle  $y = 10^5 \cdot 5^7$  und  $z = 6^4$  setzen,

$$\frac{xz-y}{xz+y} = -\frac{1}{39324,1\dots}, \quad -\frac{1}{39349,863\dots},$$

woraus sich mittelst der Gleichung (19)

$\lg. nat. 6027857 = 15,611902115\dots$  und  $\lg. nat. 6827857,2 = 15,611902148\dots = \log. nat. 6027857 + 0,000000033$  findet (dieser kleine Unterschied 0,000000033 dient den gefundenen natürl. Logarithm. zur Controlle, da  $\frac{6827857,2}{6027857} = 1,000000033$ ), worauf dann Gleichungen, den Formeln (18) ähnlich-gebildet,

$$\frac{\tau}{s} = 1 - 0,00000484812516\dots \quad 1 - 0,00000484812101\dots,$$

$$\text{also } \log. nat. \frac{s}{\tau} = 0,0000048481369\dots \quad 0,0000048481367\dots$$

wenn wir aber  $y = 10^5 \cdot 5^7$  und  $z = 6^4$  setzen, ebenfalls

$$\frac{xz-y}{xz+y} = -\frac{1}{39452,8\dots}, \quad -\frac{1}{39712,8\dots},$$

$$\text{woraus sich mittelst der Formeln (19) und (18) } \frac{\tau}{s} = 1 - 0,00000484812441\dots \quad 1 - 0,00000484812291\dots$$

$$\text{und dann } \log. nat. \frac{s}{\tau} =$$

$$0,0000048481361\dots \quad 0,0000048481346\dots$$

findet. Da nun 0,0000048481361... schon um eine Kleinigkeit kleiner ist als  $Arc. 1''$ , so ist das gesuchte  $s$  um eine Kleinigkeit kleiner als 3013929, und findet sich sehr nahe (durch die Proportion

geben. Die Ziffern  $s = 3013928,5\dots$  sind also völlig richtig, und  $\log. nat. (2s)$  liegt zwischen den so eben gefundenen Werthen 15,611902115... und 15,611902148..., folglich  $\log. nat. (2\tau)$  zwischen 15,611902115... --  $Arc. 1''$  und 15,611902148... --  $Arc. 1''$ , folglich (da  $Arc. 1'' + \log. nat. 2 = 0,693152028\dots$ )  $\log. brigg. \tau$  zwischen

$$\alpha (15,611902115\dots - 0,693152028\dots)$$

und

$$\alpha (15,611902148\dots - 0,693152028\dots);$$

folglich braucht die Tafel nicht über das Argument  $\lg. \tau = 6,4791308\dots$  hinaus fortgeführt zu werden. (Zur Controlle des letzteren Werthes multipliciren wir 6,4791308 und 6,4791309 mit  $\frac{1}{\alpha}$ , d. i. mit 2,302585092..., und addiren zum Product 0,6931520..., wodurch wir Zahlen erhalten, welche ausserhalb der oben angeführten Grenzen 15,611902115... und 15,611902148... liegen).

(Die Fortsetzung folgt.)

Planeten-Oppositionen, beobachtet am Bonner Meridiankreise in der zweiten Hälfte des Jahres 1855, mitgetheilt von Herrn Professor Argelander, Director der Sternwarte in Bonn.

Die Grössen sind in Ganzen und Zehntheilen angegeben.

Vesta.				Hebe.			
1855 Aug. 11	6 <sup>m</sup> 1	21 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup> 59 <sup>s</sup> 52	—21°50'53''7	1855 Aug. 11	7 <sup>m</sup> 9	22 <sup>h</sup> 14 <sup>m</sup> 23 <sup>s</sup> 33	—14°16'18''2
13	6,0	41 7,54	22 6 16,3	17	7,7	10 27,69	15 48 36,9
17	6,5	37 23,11	22 35 28,6	18	7,3	9 45,85	16 4 11,6
18	6,5	36 27,52	22 42 25,0	21	7,5	7 37,29	16 50 49,4
21	6,1	33 42,58	23 2 9,6				

## Jupiter - Centrum.

1855 Aug. 11	22 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup> 54	— 13° 1' 17'' 7
13	4 44,85	6 54,2
17	2 45,76	18 12,5
18	2 15,76	21 3,9
21	0 45 802	29 30,7

## Neptun.

Sept. 8	7 <sup>m</sup> 9	23 <sup>h</sup> 13 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup> 55	— 6° 13' 16'' 0
10	7,9	13 1,42	14 36,5
19	8,0	12 6,79	20 22,6
22	8,0	11 48,97	22 15,6

## Pallas.

Sept. 8	8 <sup>m</sup> 3	23 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 35 <sup>s</sup> 87	— 0° 39' 59'' 0
10	8,5	24 6,29	1 7 17,4
19	8,6	17 18,45	3 12 5,3
22	8,5	15 4,92	3 53 36,3
27	8,8	11 30,52	5 1 50,7

## Ceres.

Oct. 22		2 <sup>h</sup> 41 <sup>m</sup> 35 <sup>s</sup> 37	+ 3° 34' 51'' 5
Nov. 2	7 <sup>m</sup> 3	31 43,48	+ 3 10 44,5

## Uranus - Centrum.

Nov. 2	3 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 16 <sup>s</sup> 16	+ 17° 12' 28'' 7
--------	--	------------------

## Saturn.

für AR Mittel aus beiden Ansen, für Decl. Centrum der Kugel.

Dec. 16	5 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 50 <sup>s</sup> 51	+ 22° 11' 33'' 6	Δ AR d. Ansen	3 <sup>s</sup> 35
18	45 7,68	33,1		3,70
19	44 46,26	30,2		3,64
20	44 25,00	28,2		3,69
21	44 3,71	26,7		3,52
22	43 42,32	24,9		3,43
27	42 56,90	15,8		3,44

## Iris.

Dec. 16	—	5 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 39 <sup>s</sup> 65	+ 22° 9' 58'' 1
18	7,5	50 28,89	22 0 42,5
19	7,4	49 23,75	21 56 4,0
20	7,7	48 18,91	21 51 26,5
21	7,5	47 14,73	21 46 50,4
22	7,7	46 10,86	21 42 16,0
28	—	40 6,53	21 15 38,8

Beobachtete Minima von *S Cancri*  
und daraus folgende Correction der Ephemeride in

№ 1000 der Astr. Nachr.

Corr. d. Eph.

1856 Jan. 31	11 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup>	m. Z. Bonn	<i>Schönfeld</i>	+ 7 <sup>m</sup>
	11 54	—	<i>Krüger</i>	+ 24
März 28	9 24	—	<i>Schönfeld</i>	+ 8
	9 31	—	<i>Argelander</i>	+ 15
April 16	8 32	—	<i>Schönfeld</i>	0
	8 36	—	<i>Argelander</i>	+ 4
	8 48	—	<i>Krüger</i>	+ 16

## Ringmicrometerbeobachtungen der Fides.

1855	m. Z. Bonn	AR app.	δ app.	
Oct. 9	11 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> 15 <sup>s</sup> 4	1° 32' 18'' 9	+ 0° 37' 33'' 0	5 Vergl. N mit <i>a</i>
10	8 35 28,6	1 21 41,1	34 23,8	5 — NS — <i>b</i>
16	8 9 56,4	0 12 2,6	14 39,4	8 — N — <i>c</i>
20	13 19 39,6	359 29 14,1	3 7,3	8 — N — <i>c</i>
24	10 56 31,7	358 55 9,4	5 19,0	9 — N — <i>d</i>

Scheinbare Örter der Vergleichsterne, nach je 2 Bonner Meridianbeobachtungen.

<i>a</i>	1° 48' 25'' 7	+ 0° 29' 47'' 1
<i>b</i>	1 36 15,8	+ 0 34 59,6
<i>c</i>	0 22 24,1	— 0 6 34,5
	24,0	34,5
<i>d</i>	358 40 51,5	— 0 23 11,9

Die Beobachtung Oct. 20 ist von *Krüger*, die andern sind von *Schönfeld* angestellt.Fr. *Argelander*.

## I n h a l t.

(Zu Nr. 1019). Construction einer Tafel für den *lapsus hyperbolicus* innerhalb der Grenzen  $r=0$  und  $r = \frac{2,10223029 \rho k^2 \mu}{\rho c^2 - 2 k^2 \mu}$ , wenn  $r$  die Entfernung des bewegten Puncts vom Schwerpunct der anziehenden Masse  $\mu$ , und  $k$  die *Gauss'sche* Zahl 0,01720209895 bedeutet, und für  $r = \rho$  die Geschwindigkeit  $c$  stattfindet, von Herrn Dr. *Lehmann* 161. —

Planeten-Oppositionen, beobachtet am Bonner Meridiankreise, mitgetheilt von Herr Professor *Argelander* 173. —

Altona 1856. April 30.