QUELQUES REMARQUES SUR LES GROUPES CONTINUS.

Par M. H. Poincaré, à Paris.

Adunanza del 3 aprile 1901.

§ I. — *Introduction.*

A l'occasion du jubilé de Sir G. G. STOKES, j'ai publié un Mémoire *) où je me suis occupé des groupes finis et continus de LIE. C'est ce Mémoire que je citerai dans la suite sous le nom de « Mémoire de Cambridge ».

J'y ai entre autres choses donné une démonstration nouvelle de ce théorème de LIE, qu'il existe toujours des groupes de structure donnée, pourvu que cette structure satisfasse aux conditions dites de JACOBI.

J'ai mis sous une autre forme la formule de LIE pour la construction du groupe adjoint; j'ai donné ensuite les équations différentielles du groupe paramétrique, et j'ai montré que ces équations pouvaient s'intégrer, au moins par quadratures.

La première chose que j'aurai à faire sera donc de rappeler toutes ces formules.

Nous avons ainsi deux méthodes pour former le groupe, soit en partant du groupe adjoint, soit en partant du groupe paramétrique. Ces deux méthodes doivent conduire au même résultat. Mais il arrive ceci, quand on égale les résultats obtenus par ces deux méthodes, on n'obtient

*) *Sur les groupes continus* [Memoirs presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the Jubilee of Sir GEORGE GABRIEL STOKES, Bart., Hon. LL. D., Hon. Sc. D., Lucasian Professor (Cambridge, At the University Press, 1900), pp. 220-255].

pas des identités immédiates, on obtient des propriétés plus ou moins cachées du groupe.

Beaucoup de ces propriétés étaient déjà connues ; d'autres auraient pu être obtenues par une autre voie ; il m'a paru qu'il pouvait y avoir quelque intérêt à les relier entre elles de cette manière.

Malheureusement je n'ai pu aller bien loin dans cette direction ; j'ai fait très peu et je serai heureux si j'ai pu faire comprendre à peu près ce qu'il y aurait à faire.

Les singularités des relations finies qui définissent le groupe paramétrique, ainsi que celles des équations différentielles d'où elles dérivent, peuvent être étudiées au point de vue de la théorie des fonctions, mais je me suis borné à cet égard à de brèves indications.

Dans le cours de ce travail j'ai eu à envisager tantôt des transformations infinitésimales, tantôt des transformations finies. Les premières je les ai représentées, tantôt par le symbole

$$X = X(f) = (X_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + (X_r)\frac{\partial f}{\partial x_r},$$

tantôt par le symbole

$$e^{\varepsilon X}.$$

Les transformations finies étaient toujours représentées par le symbole exponentiel. Je crois qu'il ne peut pas résulter de là de confusion fâcheuse.

J'ai employé indifféremment les deux mots « substitution » et « transformation ». J'aurais pu tirer profit de cette double dénomination, soit en réservant l'un des noms pour les opérations du groupe envisagé et l'autre pour les opérations correspondantes du groupe adjoint, soit de bien d'autres manières. Au contraire, je n'en ai fait usage que comme un simple littérateur, pour éviter les répétitions de mots. J'ai eu tort, mais j'espère que ce n'est qu'un péché véniel.

§ II. — *Formation du groupe adjoint.*

La première des formules que je dois rappeler était connue depuis longtemps ; je crois cependant devoir en parler pour familiariser le lecteur avec les notations employées.

Soit

$$X(f) = (X_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + (X_r)\frac{\partial f}{\partial x_r}$$

un opérateur quelconque. Je conviendrai d'écrire :

$$XY(f) = X[Y(f)],$$
$$(XY) = X[Y(f)] - Y[X(f)],$$
$$X^m(f) = X[X^{m-1}(f)].$$

Si je considère la substitution infinitésimale qui change f en $1 + \varepsilon X(f)$, les puissances de cette substitution engendrent un groupe dépendant d'un seul paramètre t et dont la transformation la plus générale peut être représentée par la notation

$$e^{tX},$$

puisqu'elle change f en

$$f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X^2(f) + \frac{t^3}{1.2.3} X^3(f) + \dots$$

Si je considère maintenant un groupe continu G dérivant de r opérations

$$X_1, X_2, \dots X_r,$$

la transformation la plus générale de ce groupe pourra être représentée par la notation :

$$e^T \qquad (T = t_1 X_1 + \dots + t_r X_r).$$

Ces transformations formant un groupe, on devra avoir identiquement :

$$e^T e^U = e^V \qquad \left\{ \begin{array}{l} T = t_1 X_1 + \dots + t_r X_r, \\ U = u_1 X_1 + \dots + u_r X_r, \\ V = v_1 X_1 + \dots + v_r X_r, \end{array} \right.$$

les v étant des fonctions convenablement choisies des t et des u.

La même condition s'exprime, comme on le sait, d'une autre manière ; on doit avoir :

(1) $$(X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s,$$

les c_{iks} étant des constantes.

Soient alors

$$V = \sum v_i X_i, \qquad T = \sum t_i X_i,$$

de sorte que e^V et e^T soient deux transformations quelconques du groupe ; posons

$$e^{-V} e^T e^V = e^{T'}.$$

$e^{T'}$ sera encore une substitution du groupe, de sorte qu'on aura :

$$T' = t_1 X_1 + t'_2 X_2 + \dots + t'_r X_r.$$

On voit aisément qu'on doit avoir :

$$e^{-V} T e^V = T',$$

ce qui montre que les t' sont des fonctions linéaires des t; c'est-à-dire qu'à chaque substitution e^V de G correspond une substitution linéaire qui change les t en t'. C'est l'ensemble de ces substitutions linéaires qui constitue ce que l'on appelle le groupe adjoint de G.

Cela posé, nous avons :

$$(VT) = \sum b_{ik} t_i X_k,$$

où

$$b_{ik} = c_{1,i,k} v_1 + c_{2,i,k} v_2 + \ldots + c_{r,i,k} v_r.$$

Formons l'équation caractéristique de KILLING :

$$(2) \quad F(\xi) = \begin{vmatrix} b_{11} - \xi & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} - \xi & \ldots & b_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rr} - \xi \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre $F(\xi)$ est un polynôme homogène de degré r par rapport à ξ et aux v.

Soient maintenant P_{ij} les mineurs du déterminant $F(\xi)$, de telle façon que

$$\xi P_{ij} - \sum b_{ki} P_{kj} = 0, \qquad (i \neq j)$$
$$\xi P_{ii} - \sum b_{ki} P_{ki} = - F(\xi).$$

Ces mineurs seront des polynômes homogènes de degré $r - 1$ par rapport à ξ et aux v.

Les racines de l'équation $F(\xi) = 0$ sont donc des fonctions algébriques des v, homogènes de degré 1 par rapport à ces variables.

Cela posé, la première formule que je voulais rappeler est la suivante :

$$(3) \qquad t'_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-\xi} \sum t_i P_{ij}}{F(\xi)} d\xi.$$

L'intégrale du second membre doit être prise le long d'un contour enveloppant toutes les racines de $F(\xi) = 0$.

On voit immédiatement quelle doit être la forme des cofficients de la substitution linéaire du groupe adjoint qui change T en T'.

Si les racines de l'équation (2) sont toutes distinctes, et si ces racines sont $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$, nos coefficients seront des combinaisons linéaires des exponentielles

$$e^{-\omega_1}, \quad e^{-\omega_2}, \quad \ldots \quad e^{-\omega_r}$$

ou plutôt seront de la forme :

$$\sum e^{-\omega_p} R(\omega_p),$$

R étant une fonction rationnelle homogène de degré zéro par rapport à ω_p et aux v. (Je rappelle que l'une des racines $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_r$ est toujours nulle).

Si les racines ne sont pas toutes distinctes, nos coefficients seront de la forme :

$$\sum e^{-\omega_p} \underset{p}{\Pi}(\omega_p), \tag{4}$$

$\underset{p}{\Pi}(\omega_p)$ étant une fonction rationnelle définie comme il suit :

Si ω_p est une racine d'ordre μ, le dénominateur sera homogène et de degré $r - \mu$ par rapport aux v et à ω_p, et le numérateur sera un polynôme non-homogène de degré $r - 1$ par rapport aux mêmes variables et où les termes du degré le moins élevé seront de degré $r - \mu$.

Si les t sont regardés comme donnés, les t'_i seront des expressions de la forme (4). On pourra choisir les t de telle façon que dans ces expressions tous les termes disparaissent, sauf ceux qui contiennent en facteur l'exponentielle $e^{-\omega_p}$. On dira alors que la transformation T *appartient* à la racine ω_p par rapport à la transformation V.

Soit maintenant :

$$e^{-V} T e^{V} = T', \qquad e^{-V} U e^{V} = U';$$

on aura aussi :

$$e^{-V}(TU - UT)e^{V} = T'U' - U'T'.$$

Si T appartient à la racine ω_p et U à la racine ω_q, T' se réduira à $e^{-\omega_p}$ multiplié par une fonction algébrique, et U' à $e^{-\omega_q}$ multiplié par une fonction algébrique ; de sorte que

$$T'U' - U'T'$$

se réduira à l'exponentielle

$$e^{-\omega_p - \omega_q}$$

multiplié par une fonction algébrique.

En d'autres termes,

$$TU - UT = (TU)$$

appartiendra à la racine $\omega_p + \omega_q$.

Si $\omega_p + \omega_q$ n'est pas racine de l'équation (2), on devra conclure que le crochet (TU) est nul.

Ce double théorème est dû, je crois, à Killing. La démonstration qui précède diffère de celle de Killing au moins pour la forme, et elle se présente d'une façon plus concise. Je rappellerai que dans le Mémoire cité de Cambridge j'ai été conduit (page 251) à une démonstration assez détournée de ce même théorème.

La comparaison des deux expressions de (TU), où figure d'une part une fonction dépendant de $\omega_p + \omega_q$ et d'autre part une somme dont chaque terme est le produit de deux fonctions dépendant respectivement de ω_p et ω_q, cette comparaison, dis-je, conduirait à d'autres conséquences sur lesquelles je n'insisterai pas.

La formule (3) montre que l'on a :

$$t'_i = \sum l_{ij} t_j,$$

les l étant des fonctions entières des v, et cette formule définit une substitution linéaire L qui appartient au groupe adjoint.

On peut se proposer inversement de calculer les v connaissant la substitution L. Cela n'est pas toujours possible, cela ne peut se faire que si le groupe ne contient pas de transformations distinguées, c'est-à-dire permutables à toutes les transformations du groupe. S'il en est autrement, tout ce qu'on pourra faire ce sera de calculer les b_{ik}.

Le calcul repose sur les principes suivants. Considérons l'équation :

$$(5)\qquad \Phi(e^{-\xi}) = \begin{vmatrix} l_{11} - e^{-\xi} & l_{12} & \dots & l_{1r} \\ l_{21} & l_{22} - e^{-\xi} & \dots & l_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{r1} & l_{r2} & \dots & l_{rr} - e^{-\xi} \end{vmatrix} = 0.$$

Soient Q_{ij} les mineurs de ce déterminant, de telle façon que :

$$e^{-\xi} Q_{ij} - \sum l_{ki} Q_{kj} = 0, \qquad (i \neq j)$$

$$e^{-\xi} Q_{ii} - \sum l_{ki} Q_{ki} = -\Phi(e^{-\xi}).$$

La puissance $\alpha^{\text{ème}}$ de la substitution linéaire L sera évidemment donnée par la formule :

$$(6)\qquad t'_i = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{-\alpha\xi} \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} \sum t_j Q_{ij},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant une fois, et une seule, chacune des racines *proprement distinctes* de l'équation (5). Voici ce que j'entends par là. L'équation (5) admet une infinité de racines, mais toutes ces racines peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles, car Φ ne change pas quand on augmente ξ d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Je ne considérerai donc pas comme proprement distinctes deux racines différant d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ et je supposerai que notre contour est tracé de façon à ne pas envelopper à la fois ces deux racines.

La formule (6) est vraie quel que soit α, entier, fractionnaire, etc.; supposons α infiniment petit. Alors la puissance $\alpha^{\text{ème}}$ de la substitution L se réduit à

$$t'_i = t_i - \alpha \sum b_{ji} t_j.$$

D'autre part, en vertu de la formule (6) elle se réduit à

$$t'_i = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int (1 - \alpha\xi) \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} \sum t_j Q_{ij},$$

d'où

$$b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, e^{-\xi}\, d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} Q_{ij}. \tag{7}$$

Cette formule nous montre d'abord que les b_{ji} ne sont pas toujours des fonctions uniformes des l. En effet, notre contour d'intégration doit envelopper une fois, et une seule, chacune des racines *proprement distinctes* de (5). Mais cela ne suffit pas pour déterminer ce contour et par conséquent les b_{ji}. Si, en effet, on remplace une des racines par cette racine augmentée d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, on obtient un contour différent qui conduit à une valeur différente de b_{ji}.

Comment maintenant pourra-t-il arriver que les b_{ji} deviennent infinis, ou, plus généralement, cessent d'être des fonctions holomorphes des l?

Il est clair que, tant que le contour n'ira pas passer par un des points singuliers de la fonction sous le signe intégral, c'est-à-dire par une des racines de (5), les b resteront des fonctions holomorphes des l. Mais on pourra toujours maintenir ce contour à distance de ces racines, à moins que l'une de ces racines ne devienne infinie ou que deux de ces racines ne viennent à se confondre; et encore faut-il que les deux racines qui se confondent ainsi soient primitivement l'une à l'extérieur du contour, l'autre à l'intérieur. C'est alors, en effet, que le contour pris entre deux feux ne peut plus fuir devant les racines, et qu'en général les b cesseront d'être des fonctions holomorphes des l.

Cela peut encore s'énoncer autrement. Les racines de (5) ne sont autre chose que celles de l'équation de KILLING augmentées d'un multiple arbitraire de $2\pi\sqrt{-1}$. Notre contour doit envelopper toutes les racines de l'équation de KILLING et laisser en dehors toutes les autres racines de l'équation (5). Alors, pour que les b restent des fonctions holomorphes, il suffit qu'une racine de l'équation de KILLING (qui doit être intérieure au contour) ne se confonde pas avec une racine de (5) n'appartenant pas à l'équation de KILLING (et qui doit rester extérieure au contour) : *Les b seront donc des fonctions holomorphes des l, à moins que deux des racines de l'équation de* KILLING *ne diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ autre que zéro, ou que l'une de ces racines ne devienne infinie.*

Nous sommes donc conduits à distinguer parmi les substitutions linéaires finies du groupe adjoint certaines *substitutions singulières*, qui jouissent de cette propriété que deux racines de l'équation de KILLING, sans être égales, diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

En général, pour ces substitutions singulières, les b considérées comme fonctions des l seront infinies ; c'est-à-dire que ces substitutions singulières ne seront pas une puissance d'une substitution infinitésimale du groupe. Mais il pourra se faire aussi que les b soient des fonctions indéterminées des l, de sorte que la substitution singulière sera une puissance d'une infinité de substitutions infinitésimales différentes.

La distinction entre les deux cas se rattache à la théorie des « Elementartheiler » ; formons les équations différentielles linéaires :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum l_{ij}\xi_j.$$

On sait quelle est la forme de l'intégrale générale de ces équations ; on a :

$$\xi_i = \sum P(t)e^{\omega t},$$

ω étant l'une des racines de l'équation

$$\Phi(\omega) = 0$$

et $P(t)$ un polynôme en t dont le degré est, au plus, égal à $\mu - 1$, si ω est une racine d'ordre μ.

Dans le cas d'une substitution singulière, deux racines de l'équation $\Phi(\omega) = 0$, ordinairement distinctes, viennent à se confondre. Soient ω_1 et ω_2 ces racines, μ_1 et μ_2 leur ordre, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ les polynômes correspondants dont l'ordre est, au plus, $\mu_1 - 1$ et $\mu_2 - 1$.

Quand les racines se confondent, on a une racine ω_1 d'ordre $\mu_1 + \mu_2$, de sorte que les deux termes

$$P_1(t)e^{\omega_1 t} + P_2(t)e^{\omega_2 t}$$

seront remplacés par un terme unique :

$$Q(t)e^{\omega_1 t},$$

où Q peut être de degré $\mu_1 + \mu_2 - 1$, mais peut être aussi de degré moindre.

Si le degré de Q ne dépasse pas celui de P_1 (ou celui de P_2, si P_2 est de degré plus grand que P_1) les b sont des fonctions indéterminées des l. Dans le cas contraire, les b deviennent infinis.

Nous devons aussi réserver le cas des substitutions que j'appellerai *singulières de la 2^de^ sorte*, c'est-à-dire de celles pour lesquelles une des racines ξ de l'équation de KILLING devient infinie ; pour cela il faut que l'une des racines $e^{-\xi}$ de l'équation (5) soit nulle ou infinie. Elle ne pourra devenir infinie si les l sont finis ; il faut donc qu'elle devienne nulle, c'est-à-dire que le déterminant des l soit nul. C'est ce qui caractérise les substitutions singulières de la 2^de^ sorte.

Quelques exemples feront d'ailleurs mieux comprendre la nature des différentes sortes de substitutions singulières et justifieront ce que je viens de dire au sujet de la distinction des cas où les b sont, soit infinis, soit indéterminés.

Reprenons notre substitution L et son équation caractéristique :

$$\Phi(S) = 0.$$

Si nous considérons les v comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $r - 1$ dimensions, nous pouvons nous demander quels sont les points, ou les variétés planes à q dimensions qui ne sont pas altérés par la substitution L. Dans le cas général, où l'équation caractéristique a r racines distinctes, il y a r points qui sont conservés ainsi que les variétés planes à q dimensions définies par $q + 1$ quelconques de ces r points. Soient $S_1, S_2, \ldots S_r$ les r racines. A chacune de ces racines S_i correspondra un point M_i inaltéré par L. Si deux racines S_1 et S_2 viennent à se confondre, il arrivera en général que les deux points M_1 et M_2 tendront à se confondre et que la droite $M_1 M_2$ tendra vers une droite D qui sera également inaltérée par L. En général le point $M_1 = M_2$ sera le seul point de D qui sera inaltéré ; la substitution sera dite alors *parabolique* ; mais il peut arriver aussi que tous les points de D soient inaltérés par L.

Étudions maintenant les b comme fonctions des l ; ou, ce qui revient au même, étudions les puissances fractionnaires L^α de L. Soit ξ_i la racine de KILLING qui correspond à S_i, de telle sorte que $S_i = e^{-\xi_i}$. Si l'équation caractéristique n'a pas de racine multiple, il n'y a pas de difficulté ; il n'y en a pas non plus si S_1 devenant égal à S_2, ξ_1 est égal à ξ_2. Il reste donc à examiner le cas où ξ_1 est égal à ξ_2 plus un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, de telle sorte que S_1 soit égal à S_2.

Si L est parabolique, on ne pourra pas former la substitution L^α. Si cette substitution existait en effet, aux deux racines distinctes ξ_1 et ξ_2 correspondraient deux points *distincts* M_1 et M_2 qui devraient être inaltérés par L^α et par conséquent par L. Or il n'en est pas ainsi puisque le seul point inaltéré de D est le point $M_1 = M_2$. Les équations qui donnent les b sont donc *impossibles*, c'est-à-dire que les b sont des fonctions qui deviennent infinies.

Dans le cas où tous les points de D sont inaltérés, il n'en est pas de même.

Choisissons, en effet, sur D deux points quelconques M_1 et M_2. Il y aura une substitution L^α, et une seule, qui conservera ces deux points inaltérés, les racines de KILLING ayant pour valeurs ξ_1 et ξ_2; L sera une puissance de cette substitution. On pourra donc résoudre le problème d'une infinité de manières. C'est le *cas d'indétermination.*

Voyons encore le cas d'une racine triple $S_1 = S_2 = S_3$. Si trois racines S_1, S_2, S_3 tendent à se confondre, les trois points inaltérés M_1, M_2, M_3 tendent aussi en général à se confondre, les trois droites M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 tendent vers une limite commune D, le plan $M_1M_2M_3$ tend vers un plan P.

En général, le plan P étant invariant, la seule droite invariante de P est D, le seul point invariant de P est $M_1 = M_2 = M_3$. On verrait comme plus haut que nous sommes encore dans un cas d'impossibilité (sauf si les trois racines de KILLING ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont égales, cas où il n'y a pas de singularité).

Il peut se faire aussi qu'il y ait dans P une droite D, et une seule, dont les points sont invariants, et sur D un point, et un seul, tel que toutes les droites de P qui passent par M soient invariantes.

Nous aurons alors impossibilité si les trois racines de KILLING sont distinctes, indétermination si deux de ces racines sont égales, la troisième en différant d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$; et enfin il n'y aura pas de singularité si les trois racines sont égales.

Il peut arriver enfin que tous les points et toutes les droites de P soient invariants; on retombe alors sur le cas d'indétermination.

§ III. — *Formation du groupe paramétrique.*

J'avais donné en outre une seconde formule d'une forme analogue mais entièrement nouvelle. Supposons que l'on ait :

$$e^V e^T = e^{V+dV},$$

$$V = \sum v_i X_i, \qquad T = \sum t_i X_i, \qquad dV = \sum dv_i X_i,$$

les t étant infiniment petits. Nous pourrons écrire :

$$t_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} \sum \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)}; \tag{1}$$

et d'autre part :

$$dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} \sum \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}. \tag{2}$$

Les intégrales doivent être prises le long d'un contour enveloppant toutes les racines de l'équation de Killing $F(\xi) = 0$; pour l'intégrale (2), le contour est assujetti en outre à ne pas envelopper les racines de $1 - e^{-\xi} = 0$, la racine zéro exceptée.

La formule (2) nous apprend en outre que les substitutions du groupe G, ou plutôt de sa « Parametergruppe » peuvent être mises sous la forme :

$$X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, d\xi}{(1 - e^{-\xi}) F(\xi)} \sum P_{ji} \frac{\partial f}{\partial v_j}. \tag{3}$$

Que signifient ces trois formules et d'abord la formule (1) ?

Les t sont des fonctions linéaires des dv et les coefficients sont de la forme suivante :

$$\sum R_p(\omega_p) + \sum e^{-\omega_p} S_p(\omega_p).$$

$R_p(\omega_p)$ et $S_p(\omega_p)$ sont des fonctions rationnelles de ω_p et des v. Le dénominateur commun de R_p et de S_p est un polynôme homogène de degré r, divisible par ω_p^μ, si ω_p est une racine d'ordre μ. Le numérateur de R_p est un polynôme homogène de degré $r - 1$; celui de S_p est un polynôme non-homogène de degré $r - 1$ dont les termes du degré le moins élevé sont de degré $r - \mu$.

Il y a exception pour la racine $\omega_p = 0$; pour cette racine les deux termes de la formule peuvent être réunis en un seul ; le dénominateur est un polynôme homogène de degré $r - \mu$ par rapport aux v, si zéro est une racine d'ordre μ ; le numérateur est un polynôme non-homogène de degré $r - 1$, dont les termes du degré le moins élevé sont d'ordre $r - \mu$.

Que nous apprend maintenant la formule (2)?

Elle montre que les dv sont des fonctions linéaires des t. Elle nous apprend aussi quelle est la forme des coefficients de ces fonctions linéaires qui sont en même temps les coefficients des $\frac{\partial f}{\partial v_j}$ dans les expressions des $X_i(f)$ [*voir* formule (3)].

Soit

$$D_0(\omega_p) = \frac{1}{1 - e^{-\omega_p}}$$

et $D_q(\omega_p)$ la $q^{\text{ème}}$ dérivée de $D_0(\omega_p)$ par rapport à ω_p; nos coefficients seront de la forme :

$$\sum [D_0(\omega_p) Q_p^1 + D_1(\omega_p) Q_p^2 + \ldots + D_{\mu-1}(\omega_p) Q_p^\mu],$$

$Q_p^1, Q_p^2, \ldots Q_p^\mu$ étant des fonctions rationnelles homogènes des v et de ω_p dont le dénominateur commun est d'ordre $r - \mu$ et dont les numérateurs sont d'ordre

$$r - \mu + 1, \quad r - \mu + 2, \quad \ldots \quad r.$$

Pour la racine $\omega_p = 0$, la même formule pourra être conservée, seulement les $D_q(\omega_p)$ devront être remplacés par l'unité et les degrés des numérateurs des Q devront être abaissés d'une unité.

Nos coefficients seront donc des termes de l'une des deux formes suivantes :

1° Une fonction rationnelle des v (provenant de la racine $\omega_p = 0$).

2° Une puissance négative de $1 - e^{-\omega_p}$ multipliée par une fonction rationnelle des v et de ω_p.

Un exemple simple fera d'ailleurs mieux comprendre la portée de cette formule (2).

Considérons le groupe des rotations d'un corps solide autour d'un point fixe.

Soit une rotation d'un angle 2θ autour de l'axe de cosinus directeurs α, β, γ; nous pouvons la représenter, en employant la notation des quaternions, par les quatre paramètres :

$$\lambda = \cos\theta, \qquad \mu = \alpha \sin\theta, \qquad \nu = \beta \sin\theta, \qquad \rho = \gamma \sin\theta.$$

Mais nous pouvons également la représenter par les trois paramètres :

$$v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta.$$

Si alors t_1, t_2, t_3 représentent les paramètres d'une rotation infiniment petite, si λ, μ, ν, ρ ou v_1, v_2, v_3 définissent, non seulement une rotation finie, mais l'orientation où cette rotation finie amène le corps solide en partant de son orientation initiale, cette orientation variera si le corps subit la rotation infiniment petite t_1, t_2, t_3, de sorte que les λ et les v subiront des accroissements $d\lambda$ et dv. La théorie des quaternions nous donne :

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\mu t_1 - \nu t_2 - \rho t_3, \\ d\mu &= \quad \lambda t_1 - \rho t_2 + \nu t_3, \\ d\nu &= \quad \rho t_1 + \lambda t_2 - \mu t_3, \\ d\rho &= -\nu t_1 + \mu t_2 + \lambda t_3. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$dv_1 = \theta\, d\alpha + \alpha\, d\theta = \frac{\theta\, d\mu}{\sin\theta} + \frac{\theta\alpha\cos\theta\, d\lambda}{\sin^2\theta} - \frac{\alpha\, d\lambda}{\sin\theta},$$

d'où :

$$\begin{aligned} dv_1 = t_1&[\theta\operatorname{cotg}\theta(1-\alpha^2)+\alpha^2] \\ &+ t_2[-v_3 + \alpha\beta(1-\theta\operatorname{cotg}\theta)] \\ &+ t_3[v_2 + \alpha\gamma(1-\theta\operatorname{cotg}\theta)]. \end{aligned}$$

Comparons ce résultat avec ce que donne la formule (2). Nous aurons :

$$\begin{aligned} X_1 &= -\mu\frac{\partial f}{d\lambda} + \lambda\frac{\partial f}{d\mu} + \rho\frac{\partial f}{d\nu} - \nu\frac{\partial f}{d\rho}, \\ X_2 &= -\nu\frac{\partial f}{d\lambda} - \rho\frac{\partial f}{d\mu} + \lambda\frac{\partial f}{d\nu} + \mu\frac{\partial f}{d\rho}, \\ X_3 &= -\rho\frac{\partial f}{d\lambda} + \nu\frac{\partial f}{d\mu} - \mu\frac{\partial f}{d\nu} + \lambda\frac{\partial f}{d\rho}; \end{aligned}$$

d'où :

$$(X_2 X_3) = 2X_1, \qquad (X_3 X_1) = 2X_2, \qquad (X_1 X_2) = 2X_3.$$

L'équation de Killing s'écrit :

$$F(\xi) = \begin{vmatrix} -\xi & -2v_3 & 2v_2 \\ 2v_3 & -\xi & -2v_1 \\ -2v_2 & 2v_1 & -\xi \end{vmatrix} = 0;$$

elle admet trois racines, qui sont 0 et $\pm 2i\theta$.

On a :

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -\xi(\xi^2 + 4\theta^2), \\ P_{11} &= \xi^2 + 4v_1^2, \\ P_{12} &= 4v_1v_2 - 2\xi v_3, \\ P_{13} &= 4v_1v_3 + 2\xi v_2; \end{aligned}$$

et la formule (2) donne:

$$dv_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, d\xi}{1-e^{-\xi}} \frac{t_1(\xi^2+4v_1^2)+t_2(4v_1v_2-2\xi v_3)+t_3(4v_1v_3+2\xi v_2)}{-\xi(\xi^2+4\theta^2)}.$$

Les résidus sont:

1° pour la racine 0:

$$\alpha^2 t_1 + \alpha\beta t_2 + \alpha\gamma t_3;$$

2° pour la racine $-2i\theta$:

$$-t_1 \frac{4(v_1^2-\theta^2)}{4i\theta(1-e^{2i\theta})} - t_2 \frac{4(v_1v_2+iv_3\theta)}{4i\theta(1-e^{2i\theta})} - t_3 \frac{4(v_1v_3-iv_2\theta)}{4i\theta(1-e^{2i\theta})};$$

3° pour la racine $2i\theta$:

$$-t_1 \frac{4(v_1^2-\theta^2)}{4i\theta(e^{-2i\theta}-1)} - t_2 \frac{4(v_1v_2-iv_3\theta)}{4i\theta(e^{-2i\theta}-1)} - t_3 \frac{4(v_1v_3+iv_2\theta)}{4i\theta(e^{-2i\theta}-1)}.$$

En faisant la somme on trouve:

1° pour le coefficient de t_1:

$$\alpha^2 + \frac{4(v_1^2-\theta^2)}{-4i\theta} \frac{e^{-2i\theta}+1}{e^{-2i\theta}-1} = \alpha^2 + \theta \operatorname{cotg} \theta . (1-\alpha^2);$$

2° pour le coefficient de t_2:

$$\alpha\beta + \frac{4v_1v_2}{-4i\theta} \frac{e^{-2i\theta}+1}{e^{-2i\theta}-1} - v_3 = \alpha\beta - \theta \operatorname{cotg} \theta . \alpha\beta - v_3;$$

3° pour le coefficient de t_3:

$$\alpha\gamma + \frac{4v_1v_3}{-4i\theta} \frac{e^{-2i\theta}+1}{e^{-2i\theta}-1} + v_2 = \alpha\gamma - \theta \operatorname{cotg} \theta . \alpha\gamma + v_2.$$

On retrouve donc bien par la formule (2) les résultats auxquels conduisait la théorie connue des quaternions.

Si nous avons, comme nous l'avons supposé plus haut,

$$e^V e^T = e^{V+dV}$$

et si nous supposons

$$T = \varepsilon V,$$

ε étant une constante infiniment petite, les deux substitutions V et T seront permutables, de sorte qu'on aura aussi:

$$dV = \varepsilon V.$$

Si donc les équations linéaires qui lient les dv aux t s'écrivent:

$$dv_i = \sum V_{ki} t_k,$$

il viendra :

$$v_i = \sum V_{ki} v_k. \tag{4}$$

C'est là une relation importante à laquelle les fonctions V_{ki} devront satisfaire identiquement et qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier sur l'exemple simple que nous venons de traiter.

Dans le § précédent nous avons donné les équations du groupe adjoint ; dans celui-ci nous donnons celles de la « Parametergruppe ». Il est aisé de voir quelle relation il y a entre ces deux groupes.

Soit e^V, e^T, e^U trois transformations du groupe G : la première finie, les deux autres infinitésimales. Posons

$$e^V e^T = e^{V+dV};$$

la transformation qui change les v_i en $v_i + dv_i$ appartient à la « Parametergruppe », je continue à l'appeler e^T ; c'est d'ailleurs la transformation

$$\sum t_k X_k(f),$$

où les $X_k(f)$ sont définies par la formule (3).

Posons encore :

$$e^{-U} V e^U = V'$$

$$\left(V = \sum v_i X_i,\ V' = \sum v'_i X_i\right).$$

La transformation qui change les v_i en v'_i appartient au groupe adjoint ; je la représenterai par e^{U_0} pour ne pas la confondre avec la transformation correspondante e^U de la « Parametergruppe ». Soit ensuite :

$$T' = e^{-U} T e^U, \qquad dV' = e^{-U} dV e^U;$$

je vois que la même transformation linéaire e^{U_0}, qui change les v_i en v'_i, change les t_i en t'_i et les dv_i en dv'_i ; et par conséquent les $v_i + dv_i$ en $v'_i + dv'_i$.

On aura aussi :

$$e^{-U} e^T e^U = e^{T'}, \qquad e^{-U} e^{V+dV} e^U = e^{V'+dV'}, \qquad e^{-U} e^V e^U = e^{V'},$$

d'où :

$$e^{V'+dV'} = e^{-U} e^{V+dV} e^U = e^{-U} e^V e^T e^U = e^{-U} e^V e^U e^{-U} e^T e^U = e^{V'} e^{T'};$$

c'est-à-dire que la transformation $e^{T'}$, qui appartient à la « Parametergruppe » change les v'_i en $v'_i + dv'_i$.

Il est donc indifférent de faire subir aux v_i, d'abord la transformation e^{U_0} qui les change en v'_i, puis la transformation $e^{T'}$ qui change les v'_i en $v'_i + dv'_i$; ou de faire d'abord la transformation e^T qui change les v_i en $v_i + dv_i$, puis la transformation e^{U_0} qui change les $v_i + dv_i$ en

$v'_i + dv'_i$; ce qui s'écrit :

$$e^{U_0} e^{T'} = e^T e^{U_0},$$

ou

$$e^{T'} = e^{-U_0} e^T e^{U_0},$$

ou, puisque les substitutions sont infinitésimales,

$$T' = T + (T U_0).$$

D'autre part, l'équation

$$e^{T'} = e^{-U} e^T e^U$$

nous donne :

$$T' = T + (T U),$$

d'où :

$$(T U_0) = (T U). \tag{5}$$

Pour l'intelligence de cette formule (5) il importe de se rappeler que

$$T = \sum t_k X_k(f) \quad \text{et} \quad U = \sum u_k X_k(f),$$

où les X_k sont donnés par la formule (3), tandis que les t_k et les u_k sont des coefficients constants. Quant à U_0 il est de la forme :

$$U_0 = \sum u_k Y_k(f),$$

où

$$Y_k(f) = \sum Z_{ki} \frac{\partial f}{\partial v_i},$$

les Z_{ki}, étant des fonctions linéaires des v.

C'est ce qu'on peut encore exprimer de plusieurs autres manières.

Reprenons les équations :

$$dv_i = \sum V_{ki} t_k.$$

Faisons subir aux v, aux t et aux dv une même substitution linéaire appartenant au groupe adjoint; soient v', t', dv' ce que deviennent les v, les t et les dv par suite de cette substitution. Soit V'_{ki} ce que devient V_{ki} quand on y change les v en v'; des équations proposées on pourra déduire alors :

$$dv'_i = \sum V'_{ki} t'_k.$$

Ou bien encore, considérons l'expression

$$\sum U_i t_k V_{ki}.$$

C'est une forme bilinéaire par rapport aux u et aux t dont les cœfficients sont des fonctions des v. Cette forme ne sera pas altérée quand on fera subir aux v et aux t une substitution linéaire du groupe adjoint, et aux u la substitution linéaire contragrédiente.

La formule (5) peut aussi s'interpréter comme il suit. L'ensemble des transformations du groupe adjoint et de la « Parametergruppe » engendre aussi un groupe Γ, et dans ce groupe Γ la « Parametergruppe » est un sous-groupe invariant, et en effet $(T\,U)$ fait aussi partie de ce sous-groupe.

Nos formules (1), (2) et (3) nous suggèrent encore différentes remarques qui nous seront utiles dans la suite.

Supposons que notre groupe G admette un certain nombre de transformations infinitésimales distinguées, c'est-à-dire permutables à toutes les transformations du groupe. Soient $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots X_r$ ces transformations que j'appellerai pour abréger les X'', tandis que les autres transformations $X_1, X_2, \ldots X_m$ s'appelleront les X'. Comme au dernier § du Mémoire cité de Cambridge, j'appellerai les t' et les v' ceux des coefficients t et v qui affectent les X', et les t'' et les v'' ceux qui affectent les X'', et je poserai par exemple:

$$V = V' + V'', \qquad V' = \sum v' X', \qquad V'' = \sum v'' X''.$$

Si nous envisageons alors le déterminant de KILLING nous verrons que les $r - m$ dernières colonnes sont entièrement composées de zéros sauf les termes de la diagonale principale qui se réduisent à $-\xi$. Il en résulte que

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)} = 0 \qquad (i > m,\ i \neq j), \qquad \frac{P_{ii}}{F(\xi)} = \frac{1}{\xi} \qquad (i > m).$$

La formule (2) nous donne alors, pour $i > m$:

$$d v_i = t_i + \sum A_k t_k \qquad (k \leqq m).$$

C'est d'ailleurs ce qui est presque évident; car V'' et T'' étant permutables à toutes les substitutions du groupe, on a (pour $T' = 0$):

$$e^{V+dV} = e^V e^T = e^V e^{T''} = e^{V+T''},$$

d'où:

$$d V = T'', \qquad d V' = 0, \qquad d V'' = T'';$$

ce qui équivaut à la formule que nous venons de trouver.

Cela posé, je reprend la formule

$$e^{V+dV} = e^V e^T$$

et je dis que *les dv ne peuvent jamais s'annuler tous à la fois.* Si cela arrivait en effet, on aurait $d V = 0$, d'où:

$$e^V = e^V e^T,$$

et si U est une substitution quelconque du groupe

$$e^{-V}\,U e^{V} = e^{-T} e^{-V}\,U e^{V} e^{T},$$

en posant

$$e^{-V}\,U e^{V} = U'$$

cela devient

$$U' = e^{-T}\,U' e^{T}.$$

Mais U' est une substitution quelconque du groupe. En effet, quelle que soit U' nous pourrons toujours poser

$$U = e^{V}\,U' e^{-V},$$

puisque U est arbitraire. La formule précédente signifie donc que T est une transformation distinguée, ou, avec nos notations, que $T = T''$. Mais on ne peut avoir (à moins que T ne se réduit à zéro):

$$T = T'', \qquad dV = 0\,;$$

car nous avons vu plus haut que pour $T = T''$ on a

$$dV = T''.$$

La proposition est donc démontrée.

Soit maintenant

$$e^{U} e^{W} = e^{V},$$

$$U = \sum u_i X_i\,, \qquad W = \sum w_i X_i\,, \qquad V = \sum v_i X_i\,.$$

On peut se demander dans quels cas les v cessent d'être des fonctions holomorphes des u et des w.

A trois transformations e^{U}, e^{W}, e^{V} correspondent trois substitutions linéaires du groupe adjoint; soient Λ_0, Λ_1, L ces trois substitutions. Soient λ^0_{ij}, λ^1_{ij}, l_{ij} leurs coefficients. Il est clair que L sera la résultante de Λ_0 et de Λ_1 et par conséquent que les l sont des polynômes du 1^er^ degré tant par rapport aux λ^0 que par rapport aux λ^1.

La formule (3) du § II nous apprend que les λ^0 et les λ^1 sont des fonctions entières des u et des w; il en est donc de même des l. D'autre part, la formule (7) du § II et la discussion de cette formule qui termine ce même paragraphe nous apprend que les b_{ik} ne cessent d'être des fonctions holomorphes des l que quand L est une substitution singulière. Si donc cette dernière circonstance ne se présente pas, les b_{ik} sont des fonctions holomorphes des u et des w.

Distinguons maintenant parmi les v ce que nous venons d'appeler les v' et les v''. Les b_{ik}, comme je viens de l'expliquer, ne dépendent que des v' et pas des v'': ce sont d'ailleurs des fonctions linéaires des v'. La connaissance des b_{ik} en fonctions des u et des w nous fournit donc un certain nombre d'équations linéaires entre les v'. Il reste à savoir si ces équations suffiront pour déterminer les v', c'est-à-dire si les déterminants formés à l'aide de ces équations ne seront pas tous nuls.

Si cela arrivait c'est que les b_{ik} reprendraient les mêmes valeurs pour deux systèmes différents de valeurs des v', c'est-à-dire qu'il existerait deux transformations

$$V_1 = V'_1 + V''_1, \qquad V_2 = V'_2 + V''_2$$

(sans que V'_1 soit égal à V'_2) et telles que l'on ait, quel que soit T,

$$(V_1 T) = (V_2 T);$$

et comme

$$(V''_1 T) = (V''_2 T) = 0,$$

on aurait

$$(V'_1 T) = (V'_2 T),$$

ou

$$(V'_1 - V'_2, T) = 0;$$

c'est-à-dire que $V'_1 - V'_2$ serait une transformation distinguée ; ce qui est impossible, puisque V'_1 et V'_2 sont supposés correspondre à des valeurs différentes des v'.

Donc nos déterminants ne sont pas tous nuls ; donc de nos équations linéaires nous tirerons les v' en fonctions holomorphes des u et des w.

J'ajouterai que les λ^0 et les λ^1, et par conséquent les v', dépendent seulement des u' et des w', et pas des u'' et des w''.

Passons maintenant aux v'' ; nous avons, d'après la formule (1),

$$dw_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} \sum \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

ou, en posant

$$\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} = 1 + \xi\psi(\xi),$$

$$dw_i - dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi \, d\xi \, \psi(\xi) \sum \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Je suppose que les indices $1, 2, \ldots m$ correspondent aux transformations non distinguées, c'est-à-dire aux v', aux u' et aux w', et que les indices $m+1, m+2, \ldots r$ correspondent aux transformations distinguées, c'est-à-dire aux v'', aux u'' et aux w''. Soit d'abord $i > m$; alors, si $j > m$, le rapport

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

sera égal à zéro ou à $\frac{1}{\xi}$, suivant que i est différent de j ou égal à j. En tout cas le terme correspondant de l'intégrale est nul, la fonction sous le signe intégral étant une fonction entière de ξ.

Nous pourrons donc ne conserver dans le second membre que les termes en dv_j où $j < m+1$, c'est-à-dire les termes qui dépendent des dv', et écrire:

$$(6) \qquad dw''_i - dv''_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \sum \frac{dv'_j\, P_{ij}}{F(\xi)} \quad (i > m,\ j < m+1).$$

Cette formule est tout à fait équivalente à la dernière formule de la page 254 du Mémoire cité de Cambridge.

Le second membre ne dépend que des v'; ce doit être une différentielle exacte, soit $d\Theta_i(v'_1, v'_2, \ldots v'_m)$.

L'équation (6) nous donne alors:

$$v''_i = w''_i - \Theta_i(v'_1, v'_2, \ldots v'_m) + \text{const.}$$

Pour $w = 0$ on doit avoir $v = u$, ce qui détermine la constante, et il vient:

$$(7) \quad v''_i = w''_i + u''_i - \Theta_i(v'_1, v'_2, \ldots v'_m) + \Theta_i(u'_1, u'_2, \ldots u'_m).$$

Comment les v'' pourraient-ils cesser d'être fonctions holomorphes des u et des w?

J'observe que $\xi\psi(\xi)$ est une fonction entière de ξ. Donc, en vertu d'une remarque faite à la page 238 du Mémoire cité de Cambridge, les dérivées

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial v'_j}$$

seront des fonctions entières des v'. Il en sera donc de même des Θ_i. Donc les v'' ne pourront cesser d'être des fonctions holomorphes que si les v' cessent eux-mêmes de l'être, c'est-à-dire si la substitution L est singulière.

En résumé: *les v seront des fonctions holomorphes des u et des w, à moins que la substitution L ne soit singulière.*

Quand je dis singulière je veux dire singulière de la 1[ère] sorte; le cas de ce que j'ai appelé, à la fin du § précédent, substitutions singulières de la 2[de] sorte, ne se présentera jamais. Et en effet ce serait le cas où la déterminant de la substitution L serait nul. Or cela n'arrivera pas puisque c'est le produit des déterminants des deux substitutions composantes Λ_0 et Λ_1, qui sont tous deux différents de zéro.

§ IV. — *Groupes de rang zéro.*

Il y a un cas où les formules se simplifient considérablement, c'est celui où l'équation de Killing a toutes ses racines nulles, c'est-à-dire celui où le groupe G est de rang nul. Dans ce cas, $F(\xi)$ se réduisant à $(-\xi)^r$ l'intégrale (3) du § II prend la forme suivante : nous avons sous le signe intégral, au numérateur $e^{-\xi}$ multiplié par un polynôme entier par rapport aux v et à ξ, et au dénominateur ξ^r.

Il en résulte que les coefficients de la substitution linéaire du groupe adjoint qui change T en T' seront des polynômes entiers par rapport aux v.

Les formules (1), (2) et (3) du § III subissent des simplifications analogues. Les fonctions sous le signe intégral se réduisent en effet à des polynômes entiers par rapport aux v et à ξ, divisés par ξ^r et multipliés par l'une des deux fonctions

$$\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}, \qquad \frac{\xi}{1-e^{-\xi}}.$$

Il résulte de là que les t sont des fonctions linéaires des dv et les dv des fonctions linéaires des t, et que les coefficients de ces deux substitutions linéaires inverses sont des polynômes entiers par rapport aux v.

On en conclut immédiatement que le déterminant de l'une ou de l'autre de ces substitutions linéaires se réduit à une constante. En effet, ce déterminant est un polynôme entier par rapport aux v ; et comme les coefficients de la substitution inverse sont aussi des polynômes, il faut que ce déterminant divise tous ses mineurs du 1^er^ ordre. Il divisera donc aussi toutes ses dérivées partielles du 1^er^ ordre ; et cela n'est possible que s'il se réduit à une constante.

La formule (3) nous apprend donc que l'on a :

$$X_i(f) = \sum W_{ik} \frac{\partial f}{\partial v_k},$$

les W_k étant des polynômes entiers par rapport aux v.

Ces polynômes jouissent d'une propriété intéressante ; si en effet on ı

$$t_i = \varepsilon v_i,$$

ε étant une constante infiniment petite, les deux transformations T et V

sont permutables, de sorte que l'on a:

$$dv_i = t_i = \varepsilon v_i .$$

Or

$$dv_i = \sum W_{ki} t_k .$$

Donc on a identiquement:

$$\sum^k W_{ki} v_k = v_i . \tag{1}$$

D'autre part, les transformations X_i doivent engendrer un groupe. Donc les crochets $(X_i X_j)$ doivent être des combinaisons linéaires des X_s.

Soit m le plus grand degré des polynômes W_{ki}, et soit W_{ki}^m l'ensemble des termes de degré m de W_{ki}, et en général W_{ki}^q l'ensemble des termes de degré q.

Soit

$$X_i^m(f) = \sum W_{ik}^m \frac{\partial f}{\partial v_k} . \tag{2}$$

Considérons le crochet $(X_i^m X_j^m)$; ce crochet représentera l'ensemble des termes de degré $2m - 1$ dans le crochet $(X_i X_j)$.

Supposons d'abord $m > 1$. Le crochet $(X_i X_j)$, qui est une combinaison des X_s, ne contient pas de terme de degré supérieur à m, et comme $2m - 1 > m$ il faut que

$$(X_i^m X_j^m) = 0.$$

Cela veut dire que *les transformations X_i^m engendrent un groupe G^m dont toutes les transformations sont permutables.*

D'autre part, la relation (1) nous donne:

$$\sum W_{ki}^m v_k = 0. \tag{1$^{\text{bis}}$}$$

Cela veut dire que la transformation

$$\sum t_k X_k^m$$

du groupe G^m n'altère pas le point:

$$v_1 = t_1 ,\ v_2 = t_2 ,\ \ldots\ v_r = t_r ,$$

ni d'ailleurs aucun des points:

$$v_1 = \lambda t_1 ,\ v_2 = \lambda t_2 ,\ \ldots\ v_r = \lambda t_r ,$$

quelle que soit la constante λ.

Cela nous avertit déjà que le groupe G^m est intransitif. En effet, un point quelconque étant inaltéré par ∞^1 transformations, les ∞^r transformations du groupe ne pourront transformer ce point qu'au plus en ∞^{r-1} points différents.

Avant d'aller plus loin, signalons quelques-unes des propriétés du groupe G^m et des fonctions W^m_{ki}.

Nous avons vu au § précédent que si

$$T = \sum t_k X_k(f)$$

est une substitution de notre groupe G; si

$$U = \sum U_k X_k(f)$$

est une autre substitution de ce même groupe, et U_0 la substitution correspondante du groupe adjoint, on a la formule

$$(T U_0) = (T U).$$

Comme $(T U)$ appartient aussi au groupe G, nous pouvons poser :

$$(T U) = T' = \sum t'_k X_k(f).$$

Nous poserons :

$$T^q = \sum t_k X^q_k, \qquad T'^q = \sum t'_k X^q_k,$$

en définissant comme plus haut les fonctions W^q_{ki} et les symboles X^q_i. On aura alors :

$$\begin{gathered}(T^m U_0) + (T^{m-1} U_0) + \ldots + (T^1 U_0) + (T^0 U_0) \\ = T'^m + T'^{m-1} + \ldots + T'^1 + T'^0.\end{gathered}$$

Or T^q et T'^q sont homogènes de degré q par rapport aux v, U_0 (comme appartenant au groupe adjoint dont toutes les substitutions sont linéaires) est homogène de degré o par rapport aux v, et par conséquent $(T^0 U_0)$ est homogène de degré q, de sorte qu'on aura :

$$(T^q U_0) = T'^q,$$

et en particulier :

$$(T^m U_0) = T'^m.$$

Cela signifie que le groupe G^m est permutable aux substitutions du groupe adjoint.

Cherchons maintenant les invariants du groupe G^m.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point $v_1, v_2, \ldots v_r$ ne soit pas altéré par la substitution T^m, c'est que l'on ait :

$$\sum W^m_{ki} t_k = 0. \tag{3}$$

Ce sont des équations linéaires par rapport aux t, et le déterminant de ces équations est nul comme le prouvent les relations (1^{bis}). Ces équations (3) déterminent les points qui ne sont pas altérés par la substitution T^m. Je remarque que *l'ensemble* de ces points ne sera altéré par aucune des transformations de G^m, je veux dire que ces transformations transformeront ces points les uns dans les autres. Si, en effet, M est un point inaltéré par T^m, et si e^H est une substitution quelconque du groupe G^m, qui change M en M_1, le point M_1 sera inaltéré par la transformation $e^{-H}\,T^m e^H$, c'est-à-dire par T^m puisque les substitutions du groupe G^m sont permutables. Donc e^H change le point M inaltéré par T^m, en un autre point inaltéré par T^m. C. Q. F. D.

Revenons aux équations (3). J'ai dit que le déterminant était nul. Supposons que les mineurs des $k - 1$ premiers ordres soient tous nuls également, mais que ceux du k^e ordre ne soient pas tous nuls à la fois. Conservons alors $r - h$ des équations (3); les autres en seront des conséquences et adjoignons-y $h - 1$ équations linéaires quelconques à coefficients constants entre les t. Nous aurons ainsi $r - 1$ équations, qui détermineront les rapports des t_k d'une manière, et d'une seule, et la substitution

$$T^m = \sum t_k X_k^m$$

n'altérera pas le point $v_1, v_2, \ldots v_r$; cette substitution et ses puissances seront d'ailleurs les seules substitutions du groupe G^m qui n'altèrent pas ce point et qui satisfassent à nos $h - 1$ équations linéaires à coefficients constants.

De nos équations nous tirerons les rapports des t_k en fonctions des v. Si une substitution quelconque du groupe G^m change les v en v', les transformations qui n'altèrent pas le point v'_i devront être les mêmes que celles qui n'altèrent pas le point v_i. Donc nos $r - 1$ équations doivent encore donner les mêmes valeurs des rapports des t_k quand on y remplacera les v par les v'. En d'autres termes, les rapports des t_k tirés de nos équations devront être des invariants du groupe G^m.

Nous pouvons, pour former nos $h - 1$ équations supplémentaires à coefficients constants, nous borner à égaler à zéro $h - 1$ des paramètres t_k. Dans ce cas les autres t_k sont entre eux comme des mineurs d'ordre h de notre déterminant.

En résumé : *les rapports des mineurs d'ordre h du déterminant des équations* (3) *sont des invariants du groupe G^m.*

Le nombre des invariants distincts du groupe G^m doit être précisément h; car notre groupe contient ∞^r transformations. Chacun des ∞^r points $v_1, v_2, \ldots v_r$ de l'espace demeure inaltéré par ∞^h transformations; il peut donc être changé en ∞^{r-h} autres points de l'espace. Il y a donc h invariants, et h seulement.

J'ai dit plus haut que le déterminant des W_{ik} se réduit à une constante. Il est aisé de voir d'abord que cette constante est égale à 1. On a en effet (1):

$$\sum W_{ki} v_k = v_i$$

et par conséquent, en égalant dans les deux membres les termes du 1^er^ degré,

$$\sum W^0_{ki} v_k = v_i ,$$

d'où l'on déduit:

$$W^0_{ii} = 1 , \qquad W^0_{ki} = 0 \qquad (i \neq k),$$

ce qui montre que quand les v s'annulent, c'est-à-dire quand les W_{ik} se réduisent aux W^0_{ik}, le déterminant se réduit à 1. Comme ce déterminant est une constante, il est toujours égal à 1.

Voyons quel sont ses mineurs. Si la formule (1) du § précédent s'écrit:

$$t_i = \sum U_{ki} d v_k ,$$

nous avons vu que les U_{ki} sont des polynômes et, le déterminant étant égal à 1, ces polynômes ne sont autre chose que les mineurs en question.

Comparons maintenant les formules (1) et (2) du § précédent. Nous verrons que les polynômes W_{ki} et U_{ki}, sont les uns et les autres les résidus d'une certaine intégrale et que les quantités sous le signe intégral diffèrent seulement par un certain facteur, qui est

$$\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi}$$

pour l'une des intégrales et

$$\frac{\xi}{1 - e^{-\xi}}$$

pour l'autre. Développons donc ces deux facteurs:

$$\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} = \sum A_m \xi^m, \qquad \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} = \sum B_m \xi^m.$$

Soit

$$F(\xi) = \xi^r, \qquad P_{ij} = \sum P_{ij} \xi^{r-1-m};$$

P^m_{ij} sera un polynôme homogène de degré m par rapport aux v.

Nous avons défini plus haut W^q_{ki}. De même, U^q_{ki} sera l'ensemble des termes de degré q du polynôme U_{ki}; nous trouvons alors:

$$(4) \qquad 2\pi\sqrt{-1}\, U^q_{ki} = \int d\xi \left(\sum A_h \xi^h\right) P^q_{ik} \xi^{-q-1},$$

$$(5) \qquad 2\pi\sqrt{-1}\, W^q_{ki} = \int d\xi \left(\sum B_h \xi^h\right) P^q_{ik} \xi^{-q-1};$$

d'où :

$$U_{ki}^q = A_q P_{ik}^q, \qquad W_{ki}^q = B_q P_{ik}^q.$$

Les deux polynômes homogènes U_{ki}^q et W_{ki}^q ne diffèrent donc que par un facteur constant facile à déterminer.

Entre les éléments W_{ki} de notre déterminant et ses mineurs U_{ki} nous avons les relations bien connues :

$$\sum_k U_{ki} W_{jk} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$\sum_k U_{ki} W_{ik} = 1.$$

En égalant les termes du degré le plus élevé, il vient :

$$\sum_k U_{ki}^m W_{jk}^m = 0$$

quels que soient i et j ; et puisque U_{ki}^m ne diffère de W_{ki}^m que par un facteur numérique constant :

$$(6) \qquad \sum_k W_{ki}^m W_{jk}^m = 0.$$

De là une propriété remarquable du groupe G^m. Considérons un point particulier

$$v_1^0, v_2^0, \ldots v_r^0$$

et cherchons parmi les transformations du groupe G^m celles qui conservent ce point v_i^0. Soit W_{ki}^{mo} ce que devient W_{ki}^m quand on y remplace les v_i par les v_i^0. Les substitutions cherchées seront données par les équations :

$$\sum_k t_k W_{ki}^{mo} = 0,$$

lesquelles, en vertu de la formule (6), admettent pour solutions :

$$(7) \qquad t_k = W_{jk}^{mo} \qquad (j = 1, 2, \ldots r).$$

Combien, parmi les solutions ainsi obtenues, y en aura-t-il de distinctes ?

Le déterminant des W est, comme nous l'avons dit, nul ainsi que ses mineurs des $h - 1$ premiers ordres. Cela fera donc $r - h$ solutions distinctes. Comme le problème en comporte h, on devra avoir :

$$r - h \leqq h,$$

de sorte que h est au moins égal à $\frac{r}{2}$.

La relation (6) nous montre encore que si les dv_i satisfont aux relations

$$dv_i = \sum W_{ki}^m t_k,$$

qui définissent le groupe G^m, on aura :

$$\sum W_{ij}^m d v_i = 0. \tag{8}$$

Les équations (8), dont $r - h$ sont distinctes, peuvent être regardées comme les équations différentielles des invariants du groupe G^m.

Mais la formule (6) n'est qu'un cas particulier d'une formule beaucoup plus générale. Soit, en effet,

$$h_i^{(q)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi . \xi^q \sum \frac{h_j P_{ij}}{F(\xi)}. \tag{9}$$

On déduira de là :

$$h_i^{(q)} = \sum h_j V_{ji}^q, \tag{10}$$

les $V_{ji}^{(q)}$ étant des polynômes homogènes de degré q par rapport aux v, et on verrait, en raisonnant comme plus haut, que V_{ji}^q ne diffère de W_{ji}^q et de U_{ji}^q que par un facteur numérique constant facile à calculer.

Quant à la signification des $h^{(q)}$, elle est facile à comprendre. D'après ce que nous avons vu dans le Mémoire cité de Cambridge, si l'on pose :

$$V = \sum v_i X_i, \qquad H = \sum h_i X_i, \qquad H^{(q)} = \sum h_i^{(q)} X_i,$$

on aura :

$$H^{(1)} = (VH), \qquad H^{(q)} = (V H^{(q-1)}).$$

Si donc on change h_i en $h_i^{(k)}$ dans la formule (9), il faudra changer $h_i^{(q)}$ en $h_i^{(q+k)}$; on a donc

$$h_i^{(q+k)} = \sum h_j^{(k)} V_{ji}^q. \tag{11}$$

Comparons alors trois formules qui ne diffèrent des précédentes que par les notations :

$$h_i^{(p+q)} = \sum V_{ji}^{p+q} h_j, \quad h_i^{(p+q)} = \sum V_{ki}^q h_k^{(p)}, \quad h_k^{(p)} = \sum V_{jk}^p h_j;$$

nous trouverons :

$$\sum_k V_{ki}^q V_{jk}^p = V_{ji}^{p+q},$$

ou, puisque les V ne diffèrent des W que par un facteur constant :

$$\sum_k W_{ki}^q W_{jk}^p = C W_{ji}^{p+q}, \tag{6$^{\text{bis}}$}$$

C étant un facteur numérique dépendant de p et de q.

Si $p + q$ est plus grand que m, W_{ji}^{p+q} doit être nul, de sorte que :

$$\sum_k W_{ki}^q W_{jk}^p = 0,$$

formule dont l'équation (6) n'est qu'un cas particulier.

La formule (6^{bis}) nous donne un procédé simple pour former les polynômes W.

On a en particulier :

$$\sum W^m_{ki} W^q_{ij} = 0,$$

de sorte que des équations du groupe G^m :

$$dv_i = \sum W^m_{ki} t_k$$

on pourra déduire :

$$(8^{\text{bis}}) \qquad \sum W^q_{ij} dv_i = 0,$$

nouvelle forme des équations différentielles des invariants du groupe G^m. On a, en particulier,

$$(8^{\text{ter}}) \qquad \sum W^1_{ij} dv_i = 0.$$

Il est à remarquer que les équations (8) et (8^{bis}) ne sont que des conséquences des équations (8^{ter}) ; car, en vertu de (6^{bis}),

$$\sum W^q_{ij} dv_i = \sum [W^{q+1}_{kj} (\sum W^1_{ij} dv_i)].$$

Autre remarque : Nous avons vu plus haut que dans l'expression

$$e^{V+dV} = e^V e^T$$

dV ne peut jamais s'annuler. Si donc nous reprenons nos équations différentielles

$$dv_i = \sum W_{ki} t_k,$$

nous voyons que les r polynômes

$$\sum W_{k1} t_k, \quad \sum W_{k2} t_k, \quad \ldots \quad \sum W_{kr} t_k$$

ne peuvent s'annuler tous à la fois, et cela quels que soient les coefficients arbitraires $t_1, t_2, \ldots t_r$.

Ou, pour employer le langage géométrique, les équations :

$$\sum W_{ki} t_k = 0$$

représentent r variétés à $r - 1$ dimensions dans l'espace à r dimensions. Ces r variétés ne peuvent se couper qu'à l'infini.

Ces équations différentielles peuvent d'ailleurs s'intégrer aisément, et nous allons voir quelle est la forme de l'intégrale générale. Soit

$$e^U e^W = e^V$$

et cherchons à exprimer les v en fonctions des u et des w.

Soient Λ_0, Λ_1, L les substitutions linéaires du groupe adjoint correspondant aux transformations e^U, e^W, e^V; soient λ^0_{ij}, λ^1_{ij}, l_{ij} leurs coefficients.

Les λ^0_{ij} nous seront donnés en fonctions des u, à l'aide de la formule :

$$\lambda_{ij}^{0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi\, e^{-\xi} P'_{ij}}{(-\xi)^{r}},$$

où P_{ij} est ce que devient P_{ij} quand on y remplace les v par les u ; car $F(\xi)$ se réduit à $(-\xi)^r$. Le dénominateur est indépendant des u ; le numérateur est un polynôme entier par rapport aux u. Donc les λ^0 sont des polynômes entiers par rapport aux u.

De même, les λ' seront des polynômes entiers par rapport aux w, de sorte que les l seront des polynômes entiers par rapport aux u et aux w.

Calculons maintenant les b_{ji} en fonctions des l à l'aide de la formule (7) du § II; cette formule s'écrit :

$$b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, e^{-\xi}\, d\xi}{(1-e^{-\xi})^{r}} Q_{ij},$$

car $\Phi(e^{-\xi})$ se réduit à $(1-e^{-\xi})^r$. Le seul facteur dépendant des l est Q_{ij}, qui est un polynôme entier. Donc les b sont des polynômes entiers par rapport aux l, et par conséquent par rapport aux u et aux w.

Nous avons vu que les v' sont liés aux b_{ij} par des équations linéaires ; les v' sont donc aussi des polynômes entiers par rapport aux u et aux w.

Reprenons maintenant la formule (6) du § III. Elle peut s'écrire :

$$dw''_i - dv''_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \sum \frac{dv'_j P_{ij}}{(-\xi)^r},$$

car $F(\xi) = (-\xi)^r$. Ici encore P_{ij} est un polynôme entier par rapport aux v', de sorte que le second membre est un polynôme entier par rapport aux v'; on déduit de là, en revenant à la formule (7) du § III :

$$v''_i = w''_i + u''_i - \Theta_i(v'_k) + \Theta_i(u'_k),$$

que Θ_i est un polynôme entier par rapport aux v'.

Donc les v'' sont des polynômes entiers par rapport aux u et aux w. Ainsi les v sont des polynômes entiers par rapport aux u et aux w. C'est-à-dire que si l'on intègre les équations différentielles

$$dv_i = \sum W_{ki}\, dv_k,$$

en cherchant à exprimer les v en fonctions des w, les intégrales seront des polynômes entiers.

§ V. — *Étude plus détaillée du groupe paramétrique.*

Reprenons l'équation

$$e^U e^W = e^V$$

du § III et étudions de plus près les v regardés comme fonctions des u et des w. Nous conserverons aux lettres Λ_0, Λ_1, L, λ_{ij}^0, λ_{ij}^1, l_{ij} la même signification qu'à la fin du § III.

Nous avons vu dans quel cas les b_{ik} cessent d'etre des fonctions holomorphes des l et par conséquent des u et des w; examinons plus complètement les singularités qui peuvent se produire, et pour cela reprenons la formule (7) du § II. Cette formule est susceptible de simplification.

Le contour d'intégration doit envelopper toutes les racines de l'équation de KILLING en laissant en dehors ces mêmes racines augmentées d'un multiple de $2i\pi$. Nous pouvons donc supposer que ce contour est un rectangle dont l'un des côtés parallèle à l'axe des quantités réelles est très grand, tandis que l'autre parallèle à l'axe des quantités imaginaires est égal à $2i\pi$.

Désignons par $\psi(\xi)$ la fonction sous le signe intégral. Si l'intégrale prise le long des petits côtés du rectangle tendait vers zéro, quand les grands côtés tendent vers l'infini, notre intégrale

$$\int \psi(\xi)\, d\xi$$

prise le long du rectangle entier, pourrait être remplacée par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(\xi) - \psi(\xi + 2i\pi)]\, d\xi$$

prise le long du rectangle entier de l'un des grands côtés (par exemple le long de l'axe des quantités réelles).

Les choses ne sont pas tout à fait aussi simples. Nous avons, en effet,

$$\psi(\xi) = \frac{\xi e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}.$$

Pour $\xi = +\infty$, $e^{-\xi}$ et par conséquent $\psi(\xi)$ tendent vers zéro; mais pour $\xi = -\infty$, $e^{-\xi}$ tend vers l'infini. L'expression

$$\frac{e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}$$

est le quotient de deux polynômes de même degré en $e^{-\xi}$; elle tend donc vers une limite finie et déterminée que j'appelle A.

Modifions alors légèrement la formule (7); l'intégrale

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \xi \frac{e^{-\xi}\,d\xi}{e^{-\xi}-1}$$

prise le long du rectangle est nulle, puisque à l'intérieur du rectangle le dénominateur ne s'annule que pour $\xi = 0$, et qu'alors le numérateur s'annule. Je puis donc écrire :

$$(7^{\text{bis}}) \qquad b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \xi\, d\xi\, e^{-\xi}\left[\frac{Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})} - \frac{A}{e^{-\xi}-1}\right].$$

Je poserai

$$e^{-\xi}\left[\frac{Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})} - \frac{A}{e^{-\xi}-1}\right] = \theta(\xi)$$

et je vois que θ tend vers zéro, aussi bien pour $\xi = -\infty$ que pour $\xi = +\infty$. Alors si les grands côtés du rectangle sont très grands, l'intégrale (7^{bis}), prise le long des petits côtés est nulle. On aura donc :

$$b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,[\xi\,\theta(\xi) - (\xi + 2i\pi)\,\theta(\xi + 2i\pi)],$$

l'intégrale étant prise le long de l'un des grands côtés. Mais la fonction $\theta(\xi)$ est périodique, de sorte que $\theta(\xi) = \theta(\xi + 2i\pi)$. C'est ce qui nous permet d'écrire tout simplement :

$$(7^{\text{ter}}) \qquad b_{ji} = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi)\,d\xi.$$

Nous avons vu qu'une singularité peut se produire quand deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2i\pi$.

Soient donc ω_1 et ω_2 deux de ces racines et je suppose qu'à un moment donné la différence $\omega_1 - \omega_2$ devienne égale à $2mi\pi$.

Originairement le chemin d'intégration, que j'appelle C, passe entre les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$; et c'est à l'instant où ces deux points se confondent qu'il peut y avoir une singularité. Considérons un second chemin C', ayant mêmes extrémités que C, mais laissant les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ d'un même côté. Le point $\omega_2 + 2mi\pi$ se trouvera par exemple entre ces deux chemins C et C'. L'intégrale prise le long de C sera alors égale à l'intégrale prise le long de C' plus $2\pi\sqrt{-1}\,R_2$, R_2 étant le residu de $\theta(\xi)$ relatif à la racine $\omega_2 + 2mi\pi$, ou, ce qui revient au même, à la racine ω_2. J'écrirai :

$$J(C) = J(C') + 2\pi\sqrt{-1}\,R_2,$$

en désignant par $J(C)$ l'intégrale le long du chemin C.

Quand les points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ se confondent, $J(C')$ reste holomorphe. La singularité provient donc uniquement du terme en R_2.

Supposons que les u ou les w tournent autour des valeurs qui correspondent à la singularité. Il pourra arriver :

1° Ou bien que les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ tournent autour l'un de l'autre, mais sans s'échanger. Dans ce cas R_2 et par conséquent $J(C)$ reviennent à leur valeur initiale. Les b_{ij} restent donc des fonctions uniformes des u et des w. Seulement ces fonctions peuvent devenir infinies parce qu'en général le résidu R_2 croît indéfiniment quand les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ tendent l'un vers l'autre.

2° Ou bien que les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ s'échangent. Dans ce cas R_2 se change en R_1 et par conséquent $J(C)$ en

$$J(C) + 2\pi\sqrt{-1}\,(R_1 - R_2).$$

Les b_{ij} ne sont plus des fonctions uniformes des u et des w.

Il est clair d'ailleurs que, tant que les b_{ij} restent fonctions uniformes des u et des w, il en est de même des v. Cela est évident pour les v' que l'on déduit des b_{ij} à l'aide d'équations du 1^{er} degré ; cela l'est également pour les v'' puisque les Θ_i sont des fonctions entières des v' (Cf. la fin du § III).

Plaçons-nous donc dans le cas où les v cessent d'être des fonctions uniformes des u et des w, et supposons que, les u et les w revenant à leurs valeurs initiales après avoir décrit des contours fermés, les v_i ne reviennent pas à leurs valeurs initiales, mais à des valeurs différentes que nous appellerons v_i^0 ; j'écrirai d'ailleurs :

$$V = \sum v_i X_i, \qquad V_0 = \sum v_i^0 X_i.$$

Alors, en faisant varier les u et les w d'une manière continue, on a pour les valeurs initiales :

$$e^U e^W = e^V,$$

et pour les valeurs finales :

$$e^V e^W = e^{V_0}.$$

Considérons maintenant les substitutions Λ_0, Λ_1, L du groupe adjoint, qui correspondent à e^U, e^W, e^V. Leurs coefficients λ^0, λ^1, l sont des fonctions entières des u et des w ; ils reviendront donc à leurs valeurs initiales quand les u et les w auront décrit des contours fermés. Donc la substitution L, qui correspond à e^{V_0}, est la même que celle qui correspond a e^V.

Considérons maintenant la transformation

$$e^V e^{-V_0};$$

la substitution correspondante du groupe adjoint sera

$$L L^{-1}$$

c'est-à-dire l'unité. En d'autres termes, *la transformation $e^V e^{-V_0}$ sera permutable à toutes les transformations du groupe.* Elle peut d'ailleurs dans certains cas se réduire à la transformation identique.

Les transformations finies qui jouissent de cette propriété s'appelleront les transformations *spéciales*. Elles forment dans le groupe proposé un sous groupe invariant discontinu. Toutes les racines de l'équation de KILLING sont, pour ces transformations spéciales, des multiples de $2i\pi$.

Il ne faut pas confondre ces transformations spéciales avec les transformations infinitésimales qui sont permutables à toutes les transformations du groupe et qui, comme nous l'avons vu, existent dans certains groupes.

Tous les groupes contiennent-ils des transformations spéciales? Soit d'abord une transformation e^V, et supposons que les racines correspondantes de l'équation de KILLING soient toutes distinctes et commensurables entre elles. On pourra alors choisir la constante α de telle sorte que l'équation de KILLING correspondant à $e^{\alpha V}$ ait toutes ses racines multiples de $2i\omega$. La transformation $e^{\alpha V}$ sera alors évidemment spéciale.

Mais ce que nous venons de dire ne s'appliquerait pas toujours au cas où l'équation de KILLING aurait des racines multiples. En effet, on sait qu'une substitution linéaire peut toujours être ramenée à une forme appelée canonique, mais que deux cas peuvent se présenter. Tantôt la forme canonique est la suivante:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix},$$

les nombres a, b, c, d pouvant être égaux ou différents. Tantôt elle est analogue à l'une des suivantes:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}, \text{ etc.},$$

les nombres e n'étant pas tous nuls.

Dans le premier cas, je dirai, pour abréger le langage, que la substitution linéaire est *ordinaire*; dans le second cas qu'elle est *parabolique*.

Or, aucune puissance d'une substitution parabolique ne peut se réduire à la substitution unité.

Si alors notre groupe admet une transformation spéciale $e^{\alpha V}$, celle-ci sera une puissance d'une certaine transformation infinitésimale e^V; si L est la substitution du groupe adjoint qui correspond à e^V, celle qui correspond à $e^{\alpha V}$ sera L^α. Comme $e^{\alpha V}$ est spéciale, L^α se réduira à la substitution unité. Donc L ne peut être parabolique.

Si l'équation de Killing a des racines multiples, il peut arriver que les substitutions du groupe adjoint soient paraboliques, de sorte qu'on peut se demander s'il n'y a pas des groupes qui ne contiennent pas de transformations spéciales. On peut en citer au moins un exemple : ce sont les groupes de rang zéro.

Soit maintenant e^W une transformation spéciale quelconque,

$$\tau_1, \quad \tau_2, \dots \tau_r$$

les racines correspondantes de l'équation de Killing ; ce seront des multiples de $2i\pi$. Soit e^U une transformation quelconque,

$$\omega_1, \quad \omega_2, \dots \omega_r$$

les racines correspondantes de l'équation de Killing ; posons :

$$e^U e^W = e^V$$

et soient

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \dots \omega'_r$$

les racines de Killing correspondant à e^V.

Si Λ_0, Λ_1 et L sont les substitutions du groupe adjoint correspondant à e^U, e^W, e^V, on aura :

$$\Lambda_0 \Lambda_1 = L, \qquad \Lambda_1 = 1;$$

d'où :

$$\Lambda_0 = L.$$

Cela nous montre que les ω' ne diffèrent des ω que par des multiples de $2i\pi$.

Faisons varier les u d'une manière continue, les v varieront aussi d'une manière continue et il en sera de même des ω et des ω'. Mais comme la différence de l'un des ω' et de l'ω correspondant doit rester égale à un multiple de $2i\pi$, cette différence devra demeurer constante.

Supposons que les valeurs initiales des u satisfassent aux proportions :

$$\frac{u_1}{w_1} = \frac{u_2}{w_2} = \ldots = \frac{u_r}{w_r},$$

de telle façon qu'originairement e^U et e^W soient des puissances d'une même transformation infinitésimale ; on aura originairement :

$$\omega'_i = \omega_i + \tau_i ;$$

et d'après ce que nous venons de voir, *cette relation devra subsister quand on fera varier les u d'une manière continue en partant des valeurs initiales que nous venons de définir.*

Si donc l'équation de Killing pour certaines valeurs des v, admet les racines :

$$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots \omega_r,$$

pour d'autres valeurs des v elle admettra les racines :

$$\omega_1 + \tau_1, \quad \omega_2 + \tau_2, \ldots \omega_r + \tau_r$$

et, plus généralement, pour d'autres valeurs des v elle admettra les racines :

$$\lambda\omega_1 + \lambda'\tau_1, \quad \lambda\omega_2 + \lambda'\tau_2, \ldots \lambda\omega_r + \lambda'\tau_r,$$

λ et λ' étant deux coefficients quelconques.

Si l'on fait varier les u d'une manière continue pour les faire revenir à leurs valeurs initiales après leur avoir fait décrire des contours fermés, il arrivera en général que les racines ω se permuteront entre elles ; supposons qu'elles deviennent :

$$\omega_1^{(1)}, \quad \omega_2^{(1)}, \ldots \omega_r^{(1)},$$

les $\omega_i^{(1)}$ n'étant autre chose que les ω_i placés dans un autre ordre.

Les racines de Killing relatives à e^V, qui étaient primitivement :

$$(1) \qquad \omega_1 + \tau_1, \quad \omega_2 + \tau_2, \ldots \omega_r + \tau_r,$$

deviendront :

$$(2) \qquad \omega_1^{(1)} + \tau_1, \quad \omega_2^{(1)} + \tau_2, \ldots \omega_r^{(1)} + \tau_r.$$

Or les expressions (2) ne sont autre chose (dans un autre ordre) que

$$(3) \qquad \omega_1 + \tau_1^{(-1)}, \quad \omega_2 + \tau_2^{(-1)}, \ldots \omega_r + \tau_r^{(-1)},$$

les $\tau_i^{(-1)}$ n'étant autre chose que les τ_i qui sont supposés avoir subi une permutation inverse de celle qui change les ω_i en $\omega_i^{(1)}$.

Nous avons donc deux déterminations des v, ou, si l'on aime mieux, de e^V; dans la première les racines de KILLING sont les $\omega_i + \tau_i$, dans la seconde elles sont les $\omega_i + \tau_i^{(-1)}$. Les différences des racines sont donc

$$\tau_i^{(-1)} - \tau_i,$$

c'est-à-dire des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Plus généralement: soient p transformations spéciales indépendantes, et soient

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \tau_{1,1}, & \tau_{2,1}, & \ldots & \tau_{r,1} \\ \tau_{1,2}, & \tau_{2,2}, & \ldots & \tau_{r,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{1,p}, & \tau_{2,p}, & \ldots & \tau_{r,p} \end{array}\right.$$

les racines correspondantes. Si les τ_i peuvent s'échanger entre eux (par suite de permutations analogues à celle qui change les τ_i en $\tau_i^{(-1)}$ et dont je viens de parler) les diverses permutations possibles des $\tau_{i,1}$, des $\tau_{i,2}$, ... devront figurer dans autant de lignes du tableau (4) comme si elles correspondaient à autant de transformations spéciales distinctes. Si, par exemple, $r = 3$, et si les racines sont τ_1, τ_2, τ_3, pour une des transformations spéciales et $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$ pour une autre; si enfin quand on fait décrire aux v des contours fermés, les trois racines de KILLING peuvent subir une permutation circulaire, le tableau (4) devra être formé comme il suit:

$$\begin{array}{lll} \tau_1, & \tau_2, & \tau_3 \\ \tau_2, & \tau_3, & \tau_1 \\ \tau_3, & \tau_1, & \tau_2 \\ \tau'_1, & \tau'_2, & \tau'_3 \\ \tau'_2, & \tau'_3, & \tau'_1 \\ \tau'_3, & \tau'_1, & \tau'_2. \end{array}$$

Cela posé, si pour certaines valeurs des v les racines de KILLING sont

$$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots \omega_r,$$

pour d'autres valeurs des v elles seront

$$\lambda\omega_i + \lambda_1\tau_{i,1} + \lambda_2\tau_{i,2} + \ldots + \lambda_p\tau_{i,p} \quad (i = 1, 2, \ldots r),$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ étant $p + 1$ coefficients quelconques.

Revenons maintenant sur une question que je n'ai fait qu'effleurer plus haut et qui est assez délicate.

J'ai supposé que $e^U e^W$ était susceptible de deux déterminations e^V et e^{V_0}, et j'ai dit que $e^V e^{-V_0}$ était une transformation spéciale. J'ajoute que cette transformation peut se réduire à la transformation unité.

On pourrait d'abord croire le contraire. Si, en effet, on avait

$$e^V e^{-V_0} = 1,$$

on aurait

$$e^V = e^{V_0}$$

et les deux transformations e^V et e^{V_0} seraient identiques contrairement à l'hypothèse.

Ce raisonnement serait insuffisant. Nous avons en effet obtenu e^{V_0} en faisant varier les u et les w d'une manière continue, partant de certaines valeurs initiales et revenant à ces mêmes valeurs. Réservons donc les notations U, W, u, w pour désigner ces valeurs initiales; et désignons par U', W', u', w' les valeurs variables de ces mêmes quantités. Nous poserons alors :

$$e^{U'} e^{W'} = e^{V'},$$

de telle façon qu'au commencement U', W' et V' se réduisent respectivement à U, W et V, et qu'à la fin U' et W' reviennent à leurs déterminations initiales U et W, tandis que V' aboutit à une détermination différente V_0. Envisageons alors la transformation :

$$e^V e^{-V'} = e^T.$$

Au commencement elle se réduira à la transformation identique, elle prendra ensuite diverses déterminations, et à la fin il pourrait se faire que e^T se réduisît de nouveau à la transformation identique. Il ne s'ensuivrait pas forcément que V' dût se réduire a V. On a en effet :

$$e^{V'} = e^{-T} e^V.$$

Si l'on suppose $T = 0$, *l'une* des déterminations possibles du second membre est certainement e^V, mais il peut se faire que ce second membre ait d'autres déterminations (de même que $e^U e^W$, d'après notre hypothèse, est susceptible de deux déterminations e^V et e^{V_0}).

Il est aisé de faire des exemples. Je suppose que les v soient choisis de telle sorte que la différence de deux des racines de KILLING relatives à e^V diffère peu d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Faisons ensuite varier les t d'une manière continue, chacune de ces variables partant de la valeur 0, décrivant un petit contour fermé, et revenant à la valeur 0. Nous pourrons choisir ces contours de telle façon que les deux points très voisins qui représentent l'une des deux racines de KILLING dont je viens de parler et l'autre racine augmentée d'un multiple convenable de $2\pi\sqrt{-1}$, que ces deux points, dis-je, s'échangent l'un avec l'autre. Alors, au début $e^{-T}e^{V}$ se réduira à e^{V}, et à la fin ne se réduira pas à e^{V} bien que T se réduise de nouveau à zéro. Le raisonnement précédent est donc insuffisant.

Soient maintenant e^{W} et e^{W_0} deux transformations correspondant à une même substitution Λ du groupe adjoint. Soit e^{U} une autre transformation et Λ' la substitution correspondante du groupe adjoint. Soit

$$(12) \qquad e^{U}e^{W} = e^{V}, \qquad e^{U}e^{W_0} = e^{V_0}.$$

Il est clair que les deux transformations e^{V} et e^{V_0} correspondront à une même substitution

$$L = \Lambda'\Lambda$$

du groupe adjoint. Si donc nous appelons ω_i et ω_i^0 les racines de KILLING relatives à V et V_0, les différences $\omega_i - \omega_i^0$ seront des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

De même, si nous appelons θ_i et θ_i^0 les racines de KILLING relatives à W et W_0, les différences $\theta_i - \theta_i^0$ seront aussi des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Si l'on fait varier U d'une manière continue, W et W_0 ne changeant pas, les différences $\omega_i - \omega_i^0$ devront varier d'une manière continue, et comme ce sont des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ elles demeureront constantes. Or, pour $U = 0$, ω_i et ω_i^0 se réduisent à θ_i et θ_i^0; on aura donc, quel que soit U,

$$(6) \qquad \omega_i - \omega_i^0 = \theta_i - \theta_i^0.$$

Une observation avant d'aller plus loin: tout à l'heure j'ai démontré l'égalité:

$$(6^{\text{bis}}) \qquad \omega_i' = \omega_i + \tau_i$$

en partant d'une identité analogue à (5):

$$(7) \qquad e^{U}e^{W} = e^{V},$$

où e^{W} était spéciale. Pourquoi n'ai-je pas comme ici pris, pour valeur initiale de U, $U = 0$, mais ai-je supposé pour ces valeurs initiales

$$\frac{u_1}{w_1} = \frac{u_2}{w_2} = \ldots = \frac{u_r}{w_r}?$$

C'est que, pour avoir le droit de prendre à l'origine $U = 0$, il faut être sûr que, quand les u sont très petits, les w diffèrent très peu des v; c'est-à-dire que les accroissements, subis par les v son très petits quand ceux des u sont très petits; c'est-à-dire que l'on n'est pas dans le voisinage d'un des points singuliers des équations différentielles auxquelles satisfont les v. C'est ce qu'on peut admettre pour l'identité (5) où e^W est quelconque, mais non pour l'identité (7) où e^W est spéciale.

Je me borne à ces rapides indications. Mais pour faire comprendre le parti qu'on pourra sans doute tirer des relations (6) et (6^{bis}), je me supposerai placé dans un cas simple, celui où l'équation de Killing a toutes ses racines simples. Soit l le rang du groupe. On pourra alors trouver l systèmes de valeurs des v, telles que les valeurs correspondantes des racines de Killing, que jappellerai

$$\begin{array}{llll} \tau_{11}, & \tau_{21}, & \ldots & \tau_{r1} \\ \tau_{12}, & \tau_{22}, & \ldots & \tau_{r2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{1l}, & \tau_{2l}, & \ldots & \tau_{rl}, \end{array}$$

soient linéairement indépendantes; je veux dire que les τ ne soient pas liés par des relations à coefficients constants de la forme:

$$a_1 \tau_{i1} + a_2 \tau_{i2} + \ldots + a_l \tau_{il} = 0,$$

de telle façon, en même temps, que les rapports des éléments d'une même ligne de ce tableau soient commensurables; ou mieux encore que tous les t soient des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Les racines étant simples, les transformations correspondantes seront spéciales, et alors nous verrons que les racines de Killing pour une transformation quelconque seront des combinaisons linéaires des τ; je veux dire que, si

$$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots \omega_r$$

sont les racines de Killing, on aura:

$$\omega_i = a_1 \tau_{i1} + a_2 \tau_{i2} + \ldots + a_l \tau_{il},$$

les a étant des fonctions des v.

Ce théorème est probablement vrai dans des cas beaucoup plus généraux, mais je me suis borné a un cas très simple parce que je ne voulais qu'indiquer une marche à suivre.

§ VI. — *Quelques mots sur les équations différentielles du groupe.*

Dans le § précédent nous avons envisagé les points singuliers des fonctions v regardées comme des fonctions des u et des w, définies par l'équation :

$$e^U e^W = e^V.$$

Pour cela nous nous sommes servis des relations finies qui relient les v aux u et aux w. Mais on pourrait également faire usage des équations différentielles qui définissent les v. Rappelons la forme de ces équations différentielles.

Si, par exemple, nous faisons varier les w en laissant les u invariables, si plus particulièrement nous posons

$$w_i = \varepsilon t_i, \qquad W = \varepsilon T,$$

en faisant varier ε et laissant les t invariables, de sorte que

$$e^U e^{\varepsilon T} = e^V, \quad e^U e^{(\varepsilon + d\varepsilon)T} = e^{V+dV},$$

on aura l'équation différentielle :

$$e^V e^{T d\varepsilon} = e^{V+dV},$$

ce qui peut s'écrire, d'après la formule (2) du § III :

$$\frac{dv_i}{d\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} \sum \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Les $\frac{dv_i}{d\varepsilon}$ seront donc une somme de termes de la forme suivante : chaque terme sera le produit de $\frac{1}{1 - e^{-\omega_k}}$ si ω_k est une racine de Killing (ou d'une puissance de $\frac{1}{1 - e^{-\omega_k}}$ si ω_k est une racine multiple) et d'une fonction rationnelle des v et de ω_k.

Comment l'un de ces termes peut-il cesser d'être une fonction holomorphe des v ?

1° Si ω_k devient un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, auquel cas le premier facteur devient infini.

2° Si l'équation de Killing a une racine multiple, outre celles qui existent toujours, auquel cas le second facteur cesse d'être une fonction uniforme des v, et d'ailleurs cesse également d'être fini.

C'est le premier cas auquel nous nous attacherons particulièrement.

Si nous égalons à des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ les différentes racines de KILLING, nous obtiendrons autant d'équations entre les v que l'équation de KILLING a de racines distinctes. Mais il ne s'ensuit pas que toutes les équations ainsi obtenues (et que j'appellerai les équations E) soient distinctes. Il y a, en effet, entre les racines de KILLING des relations linéaires, et il arrivera souvent que, quand une de ces racines deviendra égale à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, il en doit être de même, en vertu de ces relations linéaires, d'une ou de plusieurs autres racines. Si donc l'une de ces équations E est satisfaite, il pourra arriver qu'une ou plusieurs autres parmi ces équations E en soient des conséquences nécessaires. Nous supposerons donc que l'on donne aux v des valeurs qui satisfont à l'une des équations E et à toutes celles qui en sont des conséquences nécessaires, mais qui ne satisfont à aucune autre des équations E. Ces valeurs des v (si d'ailleurs l'équation de KILLING n'a pas plus de racines multiples que pour des valeurs *quelconques* des v) constitueront ce que j'appellerai un point singulier de 1ère espèce de nos équations différentielles.

Soient alors $v_1^0, v_2^0, \dots v_r^0$ les valeurs des v qui correspondent à un de ces points singuliers de 1ère espèce; soit ω_k^0 la valeur correspondante de ω_k. Parmi les ω_k^0 il y en aura un ou plusieurs qui seront multiples de $2\pi\sqrt{-1}$, soit par exemple $\omega_1^0, \omega_2^0, \dots \omega_q^0$. Les équations E:

$$\omega_i = \text{mult. } 2\pi\sqrt{-1} \qquad (i = 1, 2, \dots q)$$

devront (d'après l'hypothèse que nous venons de faire) être des conséquences les unes des autres. Cela veut dire que $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_q$ devront être des multiples d'une même quantité ω, de sorte que $\omega_1^0, \omega_2^0, \dots \omega_q^0$ seront des multiples de la quantité correspondante, ω_0, laquelle devra être un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

Dans le voisinage de ce point singulier, les $\frac{dv_i}{d\varepsilon}$ seront égaux à des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des $v_j - v_j^0$ divisées par une puissance de $\omega - \omega_0$. La présence de cette puissance de $\omega - \omega_0$ au dénominateur provient de l'existence dans les différents termes des $\frac{dv_i}{d\varepsilon}$ d'un facteur

$$\frac{1}{1 - e^{-\omega_k}},$$

lequel peut être élevé au carré ou à une puissance supérieure, si la racine de KILLING ω_k est double ou multiple.

Mais w est lié aux v par une relation algébrique :

$$f(\omega, v_1, v_2, \dots v_r) = 0,$$

laquelle se déduit immédiatement de l'équation de KILLING. On a alors :

$$\frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{d\varepsilon} = -\sum \frac{df}{dv_i}\frac{dv_i}{d\varepsilon}.$$

Les dérivées de f sont des polynômes entiers par rapport aux v et à ω. Le polynôme $\frac{df}{d\omega}$ n'est pas nul, sans quoi deux des racines de KILLING ordinairement distinctes viendraient à se confondre et le point singulier ne serai: plus de 1ère espèce. On a donc :

$$\frac{d\omega}{d\varepsilon} = \sum H_i \frac{dv_i}{d\varepsilon},$$

les H_i étant développables suivant les puissances des $v_j - v_j^0$ et de $\omega - \omega_0$.

Ainsi $\frac{d\omega}{d\varepsilon}$ $\left(\text{comme les } \frac{dv_j}{d\varepsilon}\right)$ est égal à une fonction holomorphe des $v_j - v_j^0$ et de $\omega - \omega_0$, divisée par une puissance de $\omega - \omega_0$.

Telle est la forme des équations différentielles dans le voisinage de notre point singulier.

Nous pouvons donc écrire :

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{\Omega}{(\omega - \omega_0)^p}, \qquad \frac{dv_i}{d\varepsilon} = \frac{V_i}{(\omega = \omega_0)^p},$$

les Ω et les V_i étant holomorphes. Soit maintenant :

$$d\tau = \frac{d\varepsilon}{(\omega - \omega_0)^p};$$

il viendra :

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \Omega, \qquad \frac{dv_i}{d\tau} = V_i.$$

On tirera de là, par un théorème bien connu, ω et les v_i en séries procédant suivant les puissances de τ et se réduisant à ω_0 et v_i^0 pour $\tau = 0$. Soit :

$$(2) \qquad \omega - \omega_0 = a_\mu \tau^\mu + a_{\mu+1}\tau^{\mu+1} + \dots$$

ce développement ; on en tirera :

$$d\varepsilon = d\tau(\omega - \omega_0)^p = a_\mu^p \tau^{p\mu} d\tau + \dots,$$

d'où :

$$\varepsilon = \frac{a_\mu^p}{p\mu + 1}\tau^{p\mu+1} + \dots,$$

$$\omega - \omega_0 = b\,\varepsilon^{\frac{\mu}{p\mu+1}} + \dots,$$

b étant un coefficient constant facile à calculer. Cela montre qu'en général ω (et par conséquent les v) n'est plus une fonction uniforme de ε dans le voisinage du point singulier.

Il y aurait exception seulement dans le cas où $a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots$ étant nuls, l'équation (2) se réduirait à $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire dans le cas où Ω serait divisible par $\omega - \omega_0$.

Mais dans ce cas, si V_i ne s'annule pas pour $\omega = \omega_0$, $v_k = v_k^0$, nos équations n'admettront pas de solution telle que l'on ait $\omega = \omega_0$, $v_k = v_k^0$ pour $\varepsilon = 0$.

Or revenons à la substitution L, qui est la substitution du groupe adjoint qui correspond à e^V; et étudions les équations différentielles auxquelles satisfont les coefficients l_{ij} de cette substitution; elles seront de la forme:

$$\frac{d l_{ij}}{d\varepsilon} = \Lambda_{ij}, \tag{3}$$

les Λ étant des fonctions linéaires des l. Les l sont, d'autre part, des fonctions entières des v; pour $v_k = v_k^0$ ces fonctions entières se réduisent à l_{ij}^0. Les équations (3) admettront une solution telle que $l_{ij} = l_{ij}^0$ pour $\varepsilon = 0$.

Considérons cette solution, où les l sont donnés comme des fonctions holomorphes de ε.

Nous savons d'autre part que les l sont des fonctions entières des v:

$$l_{ij} = \Phi_{ij}(v_k). \tag{4}$$

Les l_{ij} étant connus en fonctions de ε, on tirera les v_k des équations (4), lesquelles équations (4), comme nous le savons, sont satisfaites pour

$$l_{ij} = l_{ij}^0, \qquad v_k = v_k^0. \tag{5}$$

Pour discuter ces équations (4) je ferai usage d'un lemme que j'ai démontré au début de ma thèse inaugurale.

D'après ce lemme, dans le voisinage des valeurs (5):

1° Ou bien les v_k seront des fonctions algébroïdes des l, et tendront vers v_k^0 quand les l_{ij} tendront vers l_{ij}^0, et par conséquent quand ε tendra vers zéro. Ce cas doit être exclus puisque les équations (1) n'admettent pas de solution se réduisant à v_k^0 pour $\varepsilon = 0$.

2° Ou bien les équations (4) cessent d'être distinctes quand on y fait $l_{ij} = l_{ij}^0$. En d'autres termes, pour une infinité de valeurs des v_k, très voisines des v_k^0, les l_{ij} se réduisent à l_{ij}^0, de sorte qu'une infinité de transformations e^V correspondent à une même substitution du groupe adjoint. C'est le « cas d'indétermination », sur lequel nous aurons à revenir.

Nous avons laissé de côté le cas où tous les V_i s'annuleraient. Sans le discuter à fond, je me bornerai à remarquer que cela ne peut pas avoir lieu pour toutes les valeurs des v compatibles avec la condition

$$\omega = \omega_0 = \text{mult. } 2\pi\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, tous les V_i ne peuvent pas être divisibles par $\omega - \omega_0$.

Il résulte de là que, pour qu'une singularité se présente, il ne suffit pas que la différence de deux racines soit un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ (condition que nous avons trouvée à l'aide des relations finies), il faut encore qu'une racine soit un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ (afin que les équations différentielles présentent un point singulier).

Si donc la différence de deux racines devient égale à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, ou bien les v restent des fonctions holomorphes des u et des w, ou bien une troisième racine deviendra égale elle-même à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Quelle que soit celle de ces deux alternatives qui se présente, on pourra en déduire d'intéressantes conséquences. Si c'est la seconde, on pourra trouver des cas où la différence de deux racines devra être elle-même une racine ou un multiple d'une racine.

§ VII. — *Formules diverses.*

On pourrait évidemment faire, pour un groupe quelconque, quelque chose d'analogue à ce que nous avons fait pour les groupes de rang zéro.

Par exemple, les formules (1) et (2) du § III sont réciproques l'une de l'autre, puisque l'une nous donne les t en fonctions linéaires des dv, et l'autre les dv en fonctions linéaires des t. On pourrait déduire de cette réciprocité certaines propriétés du déterminant des équations linéaires qui donnent les t, par exemple, en fonctions des dv. C'est de cette manière que nous avons démontré plus haut que ce déterminant est égal à 1 dans le cas des groupes de rang zéro.

D'un autre côté, la formule (3) du § III nous montre que les coefficients des dérivées de f dans $X_i(f)$ sont d'une forme particulière. Ce sont des sommes de termes, chacun de ces termes est le quotient d'une fonction rationnelle des v et de ω_k (ω_k étant une des racines de KILLING) par une puissance de $1 - e^{-\omega_k}$.

Considérons maintenant les crochets

$$(X_i X_j).$$

Quelle sera leur forme ? Soit :

$$X_i = \sum Y_\alpha Z_\alpha \frac{df}{dv_h},$$

$$X_j = \sum Y'_\beta Z'_\beta \frac{df}{dv_k},$$

Z_α étant une fonction rationnelle des v et de ω_α, Z'_β une fonction rationnelle des v et de ω_β, Y_α une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$, Y'_β une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\beta}$. On trouvera :

$$(X_i X_j) = \sum \frac{df}{dv_k}\left(Y_\alpha Z_\alpha \frac{d\,Y'_\beta Z'_\beta}{dv_h} - Y'_\beta Z'_\beta \frac{d\,Y_\alpha Z_\alpha}{dv_h}\right).$$

Nous observerons que $\frac{dZ_\alpha}{dv_h}$ est comme Z_α une fonction rationnelle des v et de ω_α ; que $\frac{dY_\alpha}{dv_h}$ peut être regardée comme la somme de deux termes égaux, chacun à un facteur constant près, à une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$; et nous pourrons écrire :

(1) $$(X_i X_j) = \sum Y_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} \frac{df}{dv_h},$$

$Z_{\alpha\beta}$ étant une fonction rationnelle des v, de ω_α et de ω_β ; $Y_{\alpha\beta}$ étant le produit d'une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$ par une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\beta}$.

Mais d'autre part, ces crochet $(X_i X_j)$ doivent se réduire à des combinaisons linéaires des X_k. Ils sont donc réductibles à la forme :

(2) $$(X_i X_j) = \sum Y''_\gamma Z''_\gamma \frac{df}{dv_h},$$

Z''_γ étant une fonction rationnelle des v et d'une seule racine de KILLING ω_γ, tandis que Y''_γ est une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\gamma}$.

Dans quelles conditions une expression de la forme (1) peut-elle être réduite à la forme (2) ? C'est ce qu'il serait évidemment très intéressant d'étudier, car cette réduction n'est évidemment possible que s'il y a certaines relations entre les racines ω.

En égalant les expressions (1) et (2) du crochet $(X_i X_j)$ on obtiendra r relations de la forme :

(3) $$\sum Y_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} = \sum Y''_\gamma Z''_\gamma.$$

On pourrait évidemment dans ces relations (3) chasser les dénominateurs et les mettre sous la forme :

$$\Pi = 0,$$

Π étant un polynôme entier par rapport aux v, aux ω_α et aux exponentielles $e^{-\omega_\alpha}$. Mais une identité de cette forme, où figurent, d'une part des fonctions entières des v et des ω, et d'autre part des fonctions transcendantes, ne peut avoir lieu que si elle reste vraie quand on considère les exponentielles $e^{-\omega}$ comme des variables indépendantes des v et des ω.

Les relations (3) subsistent donc quand on y considère les $e^{-\omega}$ comme des variables indépendantes. Si donc $v_1^0, v_2^0, \ldots v_r^0$ sont des valeurs particulières quelconques des v ; si les valeurs correspondantes des ω_k sont ω_k^0 et si celles des $Z_{\alpha\beta}$ et Z''_γ sont $Z^0_{\alpha\beta}$ et Z''^0_γ, on aura :

$$(3^{\text{bis}}) \qquad \sum Y_{\alpha\beta} Z^0_{\alpha\beta} = \sum Y''_\gamma Z''^0_\gamma .$$

Ce sont des relations linéaires à coefficients constants entre les $Y_{\alpha\beta}$ et les Y''_γ. Ce sont donc des relations algébriques entre les exponentielles $e^{-\omega}$. On peut obtenir une infinité de relations de cette forme, puisque l'on peut donner aux v^0 des valeurs quelconques ; mais $r - l$ de ces relations au plus peuvent être distinctes (r étant l'ordre et l le rang).

L'étude de ces relations (3^{bis}) pourrait présenter quelque intérêt, elle pourrait nous renseigner sur les relations qui peuvent exister entre les racines de Killing et les valeurs que l'on peut attribuer à l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines. On peut observer, en effet, que si la racine ω_γ est d'ordre m, $1 - e^{-\omega_\gamma}$ figure au plus à la puissance $- m$ dans Y''_γ, à la puissance $-(m + 1)$ dans $Y_{\gamma\beta}$, à la puissance $-(2m + 1)$ dans $Y_{\gamma\gamma}$. Le degré des relations algébriques (3^{bis}) se trouve donc limité quand l'ordre de multiplicité de chaque racine est limité.

Mais on peut encore tirer de nos équations (1) et (2) du § III un parti différent. Soit :

$$e^{V+dV} = e^V e^T .$$

Nous avons vu que l'on peut tirer de là les t en fonctions linéaires des dv [relations (1) du § III]. Soient

$$t_i = \sum \varphi_{ik}\, dv_k$$

ces relations. Nous avons vu que les φ_{ik} sont des sommes de termes, chaque terme étant le produit d'une exponentielle $e^{-\omega}$ ou de l'unité par une fonction rationnelle des v et de ω.

Posons maintenant :

$$e^{V+dV+\delta V} = e^V e^T e^U = e^{V+dV} e^U;$$

les t, les u, les dv, les δv sont supposés très petits, tandis que les v sont supposés finis. Posons de même :

$$e^{V+\delta V} = e^V e^{U'}, \qquad e^{V+dV+\delta V} = e^V e^{U'} e^{T'},$$

d'où :

$$e^T e^U = e^{U'} e^{T'},$$

$$U + T + (TU) = U' + T'.$$

Nous aurons :

$$t_i = \sum \varphi_{ik}(v)\, dv_k.$$

La formule

$$e^{V+dV+\delta V} = e^{V+dV} e^U$$

nous montre qu'il y a entre les $v + dv$, les δv et les u, la même relation qu'entre les v, les dv et les t; nous avons donc :

$$u_i = \sum \varphi_{ik}(v+dv)\,\delta v_k = \sum \left(\varphi_{ik} + \sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} dv_s\right) \delta v_k.$$

D'un autre côté, la relation

$$e^{V+\delta V} = e^V e^{U'}$$

montre que nous avons encore la même relation entre les v, les δv et les u' ; d'où :

$$u'_i = \sum \varphi_{ik}\, \delta v_k.$$

Enfin, l'égalité

$$e^{V+dV+\delta V} = e^{V+\delta V} e^{T'}$$

montre qu'il y a encore la même relation entre les $v + \delta v$, les dv et les t' ; d'où :

$$t'_i = \sum \left(\varphi_{ik} + \sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} \delta v_s\right) dv_k.$$

En comparant les valeurs des t et des t', on trouve :

$$T' - T = \sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} \delta v_s\, dv_k X_i;$$

et de même, en comparant les valeurs des u et des u' :

$$U' - U = - \sum \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} dv_s\, \delta v_k X_i.$$

D'un autre côté on a :

$$\begin{aligned}(TU) &= \sum (t_i u_j - t_j u_i)(X_i X_j) \\ &= \sum (\varphi_{ik}\varphi_{js} - \varphi_{jk}\varphi_{is})(dv_k \delta v_s - dv_s \delta v_k)(X_i X_j).\end{aligned}$$

Dans la sommation du dernier membre, chacune des combinaisons des deux indices i et j, de même d'ailleurs que chacune des combinaisons des deux indices k et s, ne doit figurer qu'une fois.

Si maintenant dans

$$(T\,U) = T' - T + U' - U$$

nous égalons les coefficients de $dv_k \delta v_s$, il viendra :

$$(4) \qquad \sum^i X_i \left(\frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} - \frac{d\varphi_{is}}{dv_k} \right) = \sum^{ij} (\varphi_{ik}\varphi_{js} - \varphi_{jk}\varphi_{is})(X_i X_j).$$

Comparons les deux membres de cette égalité. Chaque terme du premier membre est le produit d'une exponentielle $e^{-\omega}$ par une fonction algébrique des v. Chaque terme du second membre est le produit de deux exponentielles $e^{-\omega}$ et $e^{-\omega'}$ (provenant, par exemple, l'une du facteur φ_{ik}, l'autre du facteur φ_{js}) par une fonction algebrique des v.

Il est clair, par exemple, que si $\omega + \omega'$ n'est pas une racine, le produit des deux exponentielles $e^{-\omega}$ et $e^{-\omega'}$ devra disparaître du second membre et son coefficient être nul.

On peut donc encore entrevoir là la source de relations intéressantes.

Palerme, 3 avril 1901.

H. POINCARÉ.

TABLE DES MATIÈRES.