

Alcune ricerche idrodinamiche sull'efflusso a stramazzo.

PIETRO ALIBRANDI.

1. Premesse.

Le poche questioni che mi propongo trattare nella presente Nota si riferiscono a moti irrotazionali in piani paralleli. Sebbene in tali ipotesi restrittive il campo di applicabilità dei risultati sia al certo limitato, pure spero mostrare che se ne possono trarre conclusioni di qualche importanza, soprattutto circa certi particolari di idrometria pratica, i quali fanno capo alla cosiddetta *estensione della chiamata allo sbocco*.

Richiamerò in prima rapidamente alcune proposizioni generali intorno alle funzioni armoniche coniugate.

Siano x, y le coordinate cartesiane ortogonali di un punto variabile del piano e sia ω una funzione monogena di

$$z = x + y\sqrt{-1} = x + iy,$$

cioè ammettente una derivata; allora dovrà aversi

$$(1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + i \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Potendosi mettere ω sotto la forma $\alpha + i\beta$ con α, β reali, la (1) si scinde nelle due scalari

$$(2) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Tal proprietà, donde segue che α, β soddisfano ambedue all'equazione di Laplace, che le curve $\alpha = \text{cost.}$ sono le traiettorie ortogonali delle curve $\beta = \text{cost.}$, ecc., ha fatto chiamare α e β funzioni *armoniche coniugate*. Diremo α *prima* e β *seconda*, mentre l'ordine non è indifferente. Si potrà bensì ri-

guardare β come prima, ma allora la seconda sarà $-\alpha$ (o cost. $-\alpha$), come emerge subito dalle (2).

Supposto poi di aver isolato z dalla $\omega = \omega(z)$, si avrà anche

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} + i \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0.$$

Sia ora Ω a sua volta funzione monogena di ω ; allora sarà

$$(3) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} + i \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = 0,$$

nonchè

$$(4) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + i \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0;$$

vale a dire, posto $\Omega = U + iV$, U e V saranno coniugate armoniche, in quest'ordine. E si avrà pure

$$\frac{\partial \omega}{\partial U} + i \frac{\partial \omega}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial U} + i \frac{\partial z}{\partial V} = 0.$$

Viceversa, soddisfatta una qualunque di queste due, ne segue (4).

Al pari di (1), ciascuna delle scritte formole equivale a due scalari. Per es. (3) importa

$$(5) \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}.$$

Ciò posto, per determinare una coppia coniugata U, V , basterebbe assumere una funzione arbitraria di z e poi ridurla alla forma $U + iV$. Ma senza seguire questa via, da quanto sopra scaturisce una infinità di modi per arrivare allo scopo, date o cognite che già sieno altre coppie coniugate $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \dots$, oltre l'ovvio mezzo di assumere funzioni lineari quali $U = A\alpha + B\alpha_1 + C, V = A\beta + B\beta_1 + D$, ecc.

Sieno date per es.

$$\alpha = f(x, y), \quad \beta = f_1(x, y); \quad \alpha_1 = F(x, y), \quad \beta_1 = F_1(x, y).$$

Allora possiamo porre

$$U = f(\alpha, \beta) \quad , \quad V = f_1(\alpha, \beta) \quad ,$$

oppure

$$U = F(\alpha, \beta) \quad , \quad V = F_1(\alpha, \beta) \quad , \text{ ecc. ;}$$

od anche individuare U, V mediante le posizioni

$$F(U, V) = f(\alpha, \beta) \quad , \quad F_1(U, V) = f_1(\alpha, \beta) \quad ,$$

oppure mediante le

$$f(U, V) = F(\alpha, \beta) \quad , \quad f_1(U, V) = F_1(\alpha, \beta) \quad , \text{ ecc.}$$

Non ne daremo le facili dimostrazioni. Si vedrebbe che da una coppia qualunque delle accennate posizioni seguono le (5) e perciò la (4) che stabilisce essere U, V armoniche coniugate.

Ma il processo è ripetibile all'infinito. Difatti per ottenere una ulteriore coppia U', V' , basterebbe mettere, in una qualunque delle posizioni già indicate, le ottenute U, V al posto di α, β , ed U', V' al posto di U, V . E così di seguito.

L'integrazione poi e la derivazione possono fornire nuove infinite coppie. Mi limiterò a notare che sono coniugate $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ (in quest'ordine) giacchè si ha

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad .$$

Così nel moto irrotazionale sono coniugate le componenti di velocità v, u (non u, v), mentre se φ è il potenziale, si ha

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad .$$

C'importa inoltre notare come, essendo subito verificabile che

$$\text{arctg} \frac{x}{y} \quad , \quad \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

sono coniugate, saranno tali anche le funzioni

$$\operatorname{arctg} \frac{v}{u} \quad , \quad \log \sqrt{u^2 + v^2} .$$

Passiamo un momento ad altro. La coppia

$$\alpha = k \operatorname{Ch} x \cos y \quad , \quad \beta = k \operatorname{Sh} x \operatorname{sen} y$$

(Sh e Ch indicano un seno e un coseno iperbolico) evidentemente soddisfa alle (2).

Potremo dunque porre:

$$(6) \quad \alpha_1 = k \operatorname{Ch} \alpha \cos \beta \quad , \quad \beta_1 = k \operatorname{Sh} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

dove sia: k una costante positiva; α_1, β_1 coniugate e date; incognite α, β , che quindi hanno significato diverso dalle omonime delle due precedenti formole.

Facciamo nelle (6) $\beta_1 = 0$. Allora sarà

$$\alpha = 0 \quad \text{ovvero} \quad \beta = 0, \pi .$$

Nella prima ipotesi sarà

$$\alpha_1 = k \cos \beta .$$

Atteso il valore frazionario del coseno, questa non può valere che per α_1 compresa fra $-k$ e $+k$.

Nella seconda ipotesi sarà

$$\alpha_1 = \pm k \operatorname{Ch} \alpha ,$$

ed essendo il coseno iperbolico > 1 , il valore assoluto di α_1 dev'esser maggiore di k .

Per $\alpha_1 = 0$ è $\beta = \frac{\pi}{2}$ ¹⁾.

¹⁾ Il lettore vede che noi veniamo tacitamente a supporre β variabile soltanto da 0 a π . Ma questa restrizione verrà giustificata dagli usi che faremo delle (3).

Riassumendo: 1.^o nell'intervallo da $\alpha_1 = -k$ ad $\alpha_1 = k$ la curva $\alpha = 0$ coincide con la $\rho_1 = 0$; 2.^o nel rimanente tratto la $\rho_1 = 0$ coincide da un lato con la $\beta = 0$ e dall'altro con la $\beta = \pi$; 3.^o per $\alpha_1 = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Altre condizioni di contorno naturalmente potranno emergere dalle espressioni particolari che saranno assegnate ai primi membri delle (6).

Risolviamo le (6) in α , ρ . A ciò possiamo osservare che

$$(\alpha_1 + k)^2 = k^2 (\text{Ch} \alpha \cos \beta + 1)^2 = k^2 (\text{Ch}^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \text{Ch} \alpha \cos \beta + 1)$$

$$(\alpha_1 - k)^2 = k^2 (\text{Ch} \alpha \cos \beta - 1)^2 = k^2 (\text{Ch}^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \text{Ch} \alpha \cos \beta + 1)$$

$$\rho_1^2 = k^2 \text{Sh}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta = k^2 (\text{Ch}^2 \alpha - 1)(1 - \cos^2 \beta)$$

$$\beta_1^2 = k^2 (\text{Ch}^2 \alpha + \cos^2 \beta - \text{Ch}^2 \alpha \cos^2 \beta - 1).$$

Dunque

$$(\alpha_1 + k)^2 + \rho_1^2 = k^2 (\text{Ch}^2 \alpha + 2 \text{Ch} \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta) = k^2 (\text{Ch} \alpha + \cos \beta)^2$$

$$(\alpha_1 - k)^2 + \beta_1^2 = k^2 (\text{Ch}^2 \alpha - 2 \text{Ch} \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta) = k^2 (\text{Ch} \alpha - \cos \beta)^2.$$

E pertanto, posto brevemente

$$(7) \quad \sqrt{(\alpha_1 + k)^2 + \rho_1^2} = R_1, \quad \sqrt{(\alpha_1 - k)^2 + \beta_1^2} = R_2,$$

avremo

$$R_1 + R_2 = 2k \text{Ch} \alpha, \quad R_1 - R_2 = 2k \cos \beta,$$

e quindi

$$(8) \quad \alpha = \text{Arg Ch} \frac{R_1 + R_2}{2k} = \text{lg} \left\{ \frac{R_1 + R_2}{2k} + \sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{2k} \right)^2 - 1} \right\}$$

$$(9) \quad \beta = \text{arc cos} \frac{R_1 - R_2}{2k}.$$

Quanto segue sarà qualche applicazione di queste formule.

2. Stramazzo libero in parete sottile con la soglia sul piano di fondo ed a contrazione perfetta sui lati.

Mi tratterò dapprima un istante sur un problema che si trova, si può dire, in tutti i trattati contenenti applicazioni dell'equazione di Laplace; ma la cosa mi sembra necessaria per certi richiami di formole.

Il liquido riempie un recipiente parallelepipedo, ma del quale due dimensioni l_1 l_2 sono infinite. La terza dimensione l_3 è finita, od anche infinitesima, e l'efflusso ha luogo da una luce o bocca rettangolare che attraversa totalmente la faccia l_1 l_3 nel senso l_3 : più precisamente questa bocca ha un lato uguale e parallelo ad l_3 , e l'altro lato, la cui lunghezza porremo uguale a $2k$, parallelo ad l_1 . Il moto è supposto avvenire in piani paralleli per guisa che, assunto il piano coordinato xy parallelo al piano l_1 l_3 , nessuna circostanza del moto dipenda dalla coordinata z .

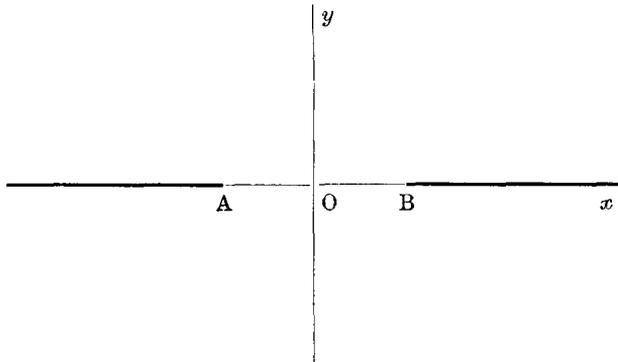


Fig. 1.

La fig. 1 rappresenta schematicamente la sezione del sistema fatta dal piano xy . AB è la sezione trasversale della bocca.

Partiamo dall'ipotesi (vedremo poi se sia ammissibile) che le linee di corrente escano tutte perpendicolari ad AB ($OA = OB = k$). Allora, se φ è il potenziale di velocità, una delle curve $\varphi = \text{cost.}$ sarà necessariamente il segmento

rettilineo AB . Essendo la cosa indifferente, possiamo assegnare alla costante il valore 0. A distanza infinita a monte (supporremo che il semipiano $(x, +y)$ sia dentro il recipiente) le linee di corrente dovranno avviarsi verso lo sbocco con moti radiali convergenti in O ed esser dotati di velocità assolute $V (= \sqrt{u^2 + v^2})$ evanescenti. Quindi un'altra delle curve $\varphi = \text{cost.}$ sarà una semicirconferenza di centro O e di raggio infinito.

Ciò premesso, facciamo nelle (6) semplicemente $\alpha_1 = x$, $\varrho_1 = y$, cioè consideriamo le

$$(10) \quad x = k \operatorname{Ch} \alpha \cos \beta, \quad y = k \operatorname{Sh} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

Allora le (7) divengono

$$(11) \quad R_1 = \sqrt{(x+k)^2 + y^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x-k)^2 + y^2},$$

cioè R_1 ed R_2 non sono che i due raggi vettori condotti da A, B al punto variabile (x, y) . Con ciò le $\alpha = \text{cost.}$ sono ellissi omofocali, le $\beta = \text{cost.}$ iperboli omofocali, ed $A(0, -k)$, $B(0, +k)$ i due fuochi comuni ad ambedue le famiglie.

Ad $\alpha = 0$ corrisponde la AB , ad $\alpha = \infty$ la semicirconferenza di centro O e di raggio infinito; a $\beta = 0$ la parte di Ox che è a destra di B , a $\beta = \pi$ la parte di Ox a sinistra di A .

Ne viene che nel presente caso il potenziale φ di velocità e la funzione ψ di corrente sono semplicemente delle forme $\varphi = -C\alpha$, $\psi = -C\beta$, essendo C una costante positiva. Così

$$x = k \operatorname{Ch} \frac{\varphi}{C} \cos \frac{\psi}{C}, \quad y = k \operatorname{Sh} \frac{\varphi}{C} \operatorname{sen} \frac{\psi}{C}.$$

C' interessa esprimere la velocità che è

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Ad ottenerla non ci occorre qui ricavare prima φ , essendo noto che

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Ora emerge senza difficoltà

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{k}{C} \sqrt{\text{Ch}^2 \frac{\varphi}{C} - \cos^2 \frac{\psi}{C}}.$$

Perciò consegue

$$V = \frac{C}{k \sqrt{\text{Ch}^2 \frac{\varphi}{C} - \cos^2 \frac{\psi}{C}}}.$$

Se non che è manifesta l'impossibilità fisica di tale soluzione. Infatti ai punti B, A corrisponde $\alpha = 0$, $\beta = 0, \pi$. In quei due punti sarebbe pertanto $V = \infty$, il che porta poi una pressione negativa ed infinita, inammissibile. Per tal guisa il caso considerato non può corrispondere a nessun problema idraulico: tutto al più costituisce un caso limite per C piccolissima. Insomma le linee di corrente non possono uscire tutte normali ad AB, che era l'ipotesi da cui s'era partiti.

Imponiamoci pertanto differenti condizioni di contorno, tenendo presenti le vere condizioni del problema che noi abbiamo in vista.

Facciamo intanto che si tratti di un velo liquido scorrente sul piano xy e sboccante per AB, la quale rappresenti una bocca a stramazzo rettangolare libero, in parete sottile. Necessariamente qui è ritenuto che la soglia giaccia sul piano del fondo. Dalle esperienze risulta che la depressione del pelo libero sotto il piano di carico, piano secondo cui si dispone il pelo libero infinitamente a monte, è massima sulla soglia e nondimeno molto piccola rispetto all'altezza di carico H , che qui è lo spessore del velo liquido cioè che sta a luogo della l_3 del problema precedente. Siccome ora H è

piccolissima, possiamo trattare quella depressione, almeno provvisoriamente, come infinitesima del 2.^o ordine, e quindi tutto il velo di spessore uniforme H . Le velocità V allo sbocco (intendiamo sempre per V un modulo, non un vettore) saranno poi prossimamente costanti. Il loro valore comune o medio lo diremo V_0 .

Al dato di contorno lungo la AB sostituiamo così $V=V_0$ costante. I rimanenti dati, che poi equivalgono all'annullamento di V all'infinito, alla convergenza radiale quivi verso O , ed all'annullamento della componente v lungo i due tratti impermeabili indefiniti di parete a destra e a sinistra di AB , restano inalterati, come occorre.

Per vedere allora quali diverranno le circostanze del flusso nel punto generico (x, y) del semipiano delle y positive, basterà osservare che la funzione β o $-\frac{\psi}{C}$ del problema antecedente soddisfa alle condizioni di divenire $\text{arc tg } \frac{y}{x}$ non solo a distanza infinita da O , ma anche su tutta la parte impermeabile della parete, dove è 0 a destra e π a sinistra, condizioni che debbono ora restar soddisfatte da $\text{arc tg } \frac{v}{u}$; mentre d'altra parte $\lg V$ deve soddisfare, a parte il segno ed una costante additiva, alle condizioni soddisfatte prima dalla α , cioè divenir zero su AB ed infinita ad infinita distanza da O . Senz'altro si scorge dunque che per tuttociò basta fare le sostituzioni

$$\text{arc tg } \frac{v}{u} = \beta \quad , \quad \lg V = -\alpha + \text{cost.}$$

legittimate dal fatto che i due primi membri sono coniugati fra loro e corrispondentemente coniugati i secondi. La costante della seconda formola non è altro che il logaritmo del valore fisso V_0 . Pertanto sarà

$$\frac{v}{u} = \text{tg } \beta \quad , \quad V = V_0 e^{-\alpha} .$$

Così $V = \text{cost.}$ per $\alpha = \text{cost.}$, cioè su ciascuna delle ellissi omofocali. E ne emerge facilmente

$$u = -V_0 e^{-\alpha} \cos \beta, \quad v = -V_0 e^{-\alpha} \sin \beta.$$

Ora per (8), (9) si ha

$$e^{-\alpha} = \frac{2k}{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 4k^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{2k} (R_1 - R_2), \quad \sin \beta = \frac{1}{2k} \sqrt{4k^2 - (R_1 - R_2)^2}.$$

dove R_1, R_2 conservano i valori (11), cioè sono le coordinate bipolari di (x, y) coi poli in A, B.

Dunque, sostituendo

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -V_0 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 4k^2}} \\ v = -V_0 \frac{\sqrt{4k^2 - (R_1 - R_2)^2}}{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 4k^2}} \\ V = \frac{2V_0 k}{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 4k^2}}. \end{array} \right.$$

Così qui le velocità sono funzioni algebriche di x, y .

Passiamo adesso all'ipotesi che lo strato liquido corrente non sia più un velo sottilissimo, ma di spessore H finito. Se la bocca è parimenti a stramazzo libero (sempre colla soglia sul fondo) le velocità V_0 saranno variabili, ed alla profondità z_0 si avrà $V_0 = \sqrt{2g z_0}$, o meglio $V_0 = \theta \sqrt{2g z_0}$, essendo θ un certo fattore di riduzione non precisamente uguale all'unità, in generale, ma che porremo funzione di z_0 . Allora possiamo ritenere, con discreta approssimazione, applicabili le formole precedenti a ciascun piano $z = z_0$. Per ognuno di essi si avrà

$$V = \frac{2\theta k \sqrt{2g z_0}}{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 4k^2}}$$

$$u = -\frac{V}{2k} (R_1 - R_2), \quad v = -\frac{V}{2k} \sqrt{4k^2 - (R_1 - R_2)^2}.$$

In questo caso però la depressione del pelo libero allo sbocco sarà non più nulla, ma una certa più o meno piccola quantità δ . Su quei punti del pelo libero è $\theta = 1$ e con ciò $V_0 = \sqrt{2g\delta}$; e poichè, detta z l'ordinata variabile del pelo libero misurata dal livello dei punti di questo ove V è evanescente, punti il cui luogo è rigorosamente un piano, si ha $V = \sqrt{2gz}$, possiamo ricavare dalla prima approssimazione già ottenuta l'equazione del pelo libero:

$$\sqrt{z} = \frac{2k\sqrt{\delta}}{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 4k^2}}$$

Questa superficie ha per curve orizzontali le $R_1 + R_2 = \text{cost.}$, vale a dire le ellissi omofocali $\alpha = \text{cost.}$, ed è asintotica al piano $z = 0$.

Lungo la parete $R_1 + R_2 = 2x$; quindi ivi

$$\sqrt{z} = \frac{k\sqrt{\delta}}{x + \sqrt{x^2 - k^2}}$$

oppure, chiamando $\frac{x}{k} = \gamma$:

$$\sqrt{z} = \frac{\sqrt{\delta}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

Invece sul piano yz di simmetria del sistema si ha $R_1 = R_2 = \sqrt{y^2 + k^2}$; ivi risulta

$$\sqrt{z} = \frac{k\sqrt{\delta}}{y + \sqrt{y^2 + k^2}}$$

oppure, chiamando $\frac{y}{k} = \lambda$

$$\sqrt{z} = \frac{\sqrt{\delta}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

Teoricamente parlando, la chiamata allo sbocco si estende all'infinito, in ogni direzione. Ma, anche per le più precise

misure, non è possibile garantire H con precisione maggiore di $\frac{1}{10}$ di mm. Per tal guisa la curva orizzontale $z = 0^{\text{mm}},1$ segnerà il limite pratico più ampio della chiamata allo sbocco.

Come ben sanno gl'idraulici, un mezzo volentieri adoperato per determinare la portata di un mediocre corso a pelo libero, è quello di sbarrarlo con una lamina dove sia intagliata una luce rettangolare a stramazzo. Sui fianchi è segnata una serie di rette orizzontali alla mutua equidistanza di uno o più millimetri, le quali rette si estendono lateralmente, in generale, non più di un decimetro e forse meno (almeno per luci di mezzana misura) a partire dai bordi verticali dell'apertura. Ora basterà leggere a tanto poca distanza dallo sbocco (eliminando poi beninteso l'alterazione capillare) l'altezza del carico H onde averlo con la dovuta precisione?

Per intanto possiamo rispondere alla domanda restando nelle ipotesi fin qui adottate, cioè che lo specchio dell'acqua invasata sia molto esteso in larghezza e lunghezza e che la soglia dello stramazzo sia a livello del fondo.

Dopo il detto di sopra, basterà all'uopo fare un esempio numerico. Supponiamo $\delta = 20^{\text{mm}}$, che corrisponde ad una H di 10 cent. circa. Allora si potrà misurare bene H lateralmente alla bocca ad una distanza dall'asse data dall'espressione

$$\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\frac{20}{0,1}} = 14,14 .$$

Risolvendola, ne viene fuori

$$\gamma = 7,10 \quad , \quad x = 7,10 k .$$

Ma nelle ordinarie misure basterà contentarsi d'una valutazione più grossolana, specialmente se si tratta di rilievi da prendere in campagna. Ammettendovi la precisione del $\frac{1}{2}$ mm. viene $\gamma = 3,24$. Di guisa che per una luce larga 0,20 bisognerà misurare il carico H ad una distanza dal più prossimo bordo verticale di m. 0,22 almeno. E ciò sarà ancora insufficiente se δ supererà i 2 cm.

3. Stramazzo libero con la soglia sul fondo, a contrazione imperfetta sui lati e con velocità di arrivo.

Vogliamo adesso studiare un problema meno semplice e che contenga il precedente come caso particolare. Immagineremo un canale a sezione rettangolare (dato planimetricamente in $CDEF$, fig. 2), indefinito a monte e sulla cui testata a valle (CD) sia aperto lo stramazzo rettangolare (AB)

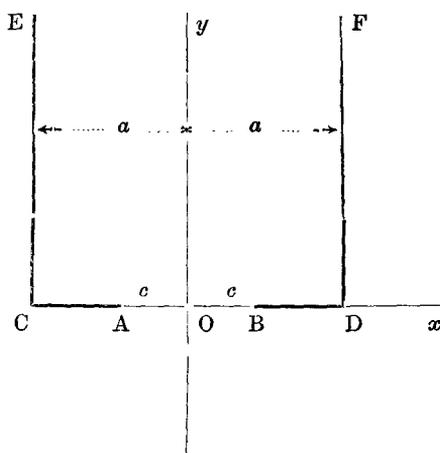


Fig. 2.

di larghezza $2c$ ($OA = OB = c$). La larghezza del canale sia $2a$. La bocca avrà la soglia sul fondo, come sopra; tutto il sistema poi sarà supposto simmetrico rispetto al piano normale alla figura, di traccia Oy .

Incominciamo, al solito, dal supporre la corrente, proveniente da $y = \infty$ con velocità costante e parallela ad Oy , ridotta ad un velo liquido d'uniforme grossezza.

Il campo idrodinamico sarà compreso fra $x = -a$, $x = +a$, $y = 0$, $y = \infty$.

Proseguiamo a servirci dalle (6), ma assegnando ora ad α_1 , β_1 i valori indicati dai due primi membri delle equazioni seguenti, subito riconoscibili come coniugati:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{\operatorname{Ch} \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}} = k \operatorname{Ch} \alpha \cos \beta \\ \frac{\operatorname{Sh} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{Ch} \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}} = k \operatorname{Sh} \alpha \operatorname{sen} \beta. \end{array} \right.$$

Allora vediamo che per $y=0$ si ha $\alpha=0$ oppure $\beta=0, \pi$. Nella prima ipotesi

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{1 + \cos \frac{\pi x}{a}} \text{ ha valore assoluto } < k,$$

cioè a dire

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right| < k, \quad \text{donde } |x| < \frac{2a}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} k.$$

Invece se per $y=0$ si ha $\beta=0, \pi$, avremo che

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right| > k, \quad |x| > \frac{2a}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} k.$$

La k ha finora valore indeterminato. Determiniamola con la condizione

$$\frac{2a}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} k = c,$$

cioè a dire poniamo

$$(14) \quad k = \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2a}.$$

Per tal modo su Ox sarà $\alpha=0$ per x compreso fra $-c$ e c ; sulla parte a destra di quest'intervallo sarà $\beta=0$, sulla sinistra $\beta=\pi$.

Ma nello stesso tempo si avrà $\cos \beta = 0$: 1.^o per $x = 0$; 2.^o per $x = \pm a$; 3.^o per $y = \infty$.

Per $y = \infty$ si ha anche

$$k \operatorname{Sh} \alpha = 1$$

ossia

$$\alpha = \operatorname{Arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{k} = \lg \left(\frac{1}{k} + \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} \right),$$

cioè a dire

$$(15) \quad \alpha = \lg \left\{ \cot \frac{\pi c}{2a} + \sqrt{1 + \cot^2 \frac{\pi c}{2a}} \right\} = - \lg \operatorname{tg} \frac{\pi c}{4a}.$$

Com'è naturale, per a grandissimo, ma per x, y finite, le (13) vengono a coincidere con le (10) però con c a luogo di k . Difatti per un argomento piccolissimo i seni e le tangenti, sia circolari che iperbolici, possono farsi uguali all'argomento stesso e i coseni uguali all'unità. Allora i due primi membri delle (13) divengono rispettivamente $\frac{\pi x}{2a}, \frac{\pi y}{2a}$, mentre k diviene $\frac{\pi c}{2a}$, per (14). E le equazioni tornano ad essere

$$x = c \operatorname{Ch} \alpha \cos \beta, \quad y = c \operatorname{Sh} \alpha \sin \beta.$$

Ciò premesso, se poniamo nelle (13), come è lecito:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{u} \text{ per } \beta, \quad \lg \frac{V}{V_0} \text{ per } \alpha,$$

avremo soddisfatte le condizioni di contorno seguenti:

1.^o: $V = V_0$ per $y = 0$, ma solo per x compreso fra $-c$ e $+c$, vale a dire sull'apertura AB ;

2.^o: $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{u} = 0, \pi$, cioè $v = 0$ sui lembi di parete AC, BD contigui ad AB ;

3.°: $\text{arc tg } \frac{v}{u} = \pm \frac{\pi}{2}$, cioè $u = 0$ sulle due pareti longitudinali CE, DF, nonchè per $y = \infty$, cioè infinitamente a monte dello sbocco.

4.°: $V = |v| = \text{costante per } y = \infty$.

Le espressioni di u , v , V sono ancor qui le (12); ma ora si ha, oltre lo speciale valore (14) di k :

$$R_1 = \sqrt{\left(\frac{\text{sen } \frac{\pi x}{a}}{\text{Ch } \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}} + k \right)^2 + \left(\frac{\text{Sh } \frac{\pi y}{a}}{\text{Ch } \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}} \right)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{\left(\frac{\text{sen } \frac{\pi x}{a}}{\text{Ch } \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}} - k \right)^2 + \left(\frac{\text{Sh } \frac{\pi y}{a}}{\text{Ch } \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}} \right)^2}.$$

Le curve $V = \text{cost.}$ sono le $R_1 + R_2 = \text{cost.}$

Per passare, dopo ciò, all'ipotesi che lo strato liquido sia di altezza finita H_1 , non abbiamo che a ripetere all'incirca quanto abbiamo detto in proposito alla posizione $a = \infty$; cioè si potranno ritenere applicabili le formole relative ad H_1 piccolissimo salvo a ritenere V_0 variabile con la legge

$$V_0 = \theta \sqrt{2 g z_0 + v_0^2}.$$

essendo le z_0 misurate dal piano p_1 secondo cui si dispone il pelo libero a gran distanza e a monte dello sbocco, e v_0 la velocità d'arrivo (V per $y = \infty$), il cui valore è dato per (15) dalla

$$v_0 = V_0 \text{tg } \frac{\pi c}{4 a},$$

sicchè sarà

$$V_0 = \theta \sqrt{2 g z_0 + V_0^2 \text{tg}^2 \frac{\pi c}{4 a}},$$

donde, isolata V_0 , emerge

$$V_0 = \theta \sqrt{\frac{2 g z_0}{1 - \theta^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi c}{4 a}}}$$

Detta poi δ_1 la depressione (sotto p_1) del pelo libero nel piano della luce, è ivi $z_0 = \delta_1$, $\theta = 1$, sicchè V_0 e v_0 superficiali prenderanno gli speciali valori V_{0s} , v_{0s} dati dalle

$$I_{0s} = \sqrt{\frac{2 g \delta_1}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi c}{4 a}}} = \cos \frac{\pi c}{4 a} \sqrt{\frac{2 g \delta_1}{\cos \frac{\pi c}{2 a}}},$$

$$v_{0s} = \operatorname{sen} \frac{\pi c}{2 a} \sqrt{\frac{2 g \delta_1}{\cos \frac{\pi c}{2 a}}}$$

L'equazione del pelo libero si otterrebbe dalla 3.^a delle (12) (beninteso cogli attuali valori di R_1 , R_2) sostituendo a V l'espressione $\sqrt{2 g z + v_{0s}^2}$ ed a V_0 la V_{0s} . Però l'equazione suddetta riesce più semplice se si assume per piano $z = 0$ il piano orizzontale p_0 passante pei punti superficiali di velocità nulla. Questi punti esistono e si trovano negli angoli C, D se essi sono angoli vivi, quali appunto li abbiamo supposti. In tal caso le V superficiali essendo date senz'altro da $V = \sqrt{2 g z}$, l'equazione del pelo sarà evidentemente

$$(16) \quad \sqrt{z} = \frac{2 k \sqrt{\delta}}{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 4 k^2}}$$

dove δ è la solita depressione, ma misurata dal piano p_0 .

Fra δ e δ_1 corre la relazione

$$\delta = \delta_1 + \frac{v_{0s}^2}{2 g}.$$

Lungo l'asse mediano Oy si ha

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\left(\frac{\text{Sh } \frac{\pi y}{a}}{\text{Ch } \frac{\pi y}{a} + 1} \right)^2 + k^2} = \sqrt{\text{Th}^2 \frac{\pi y}{2a} + k^2}.$$

Quindi, posto brevemente

$$\Lambda = \text{Th } \frac{\pi y}{2a} : \text{tg } \frac{\pi c}{2a},$$

si riesce facilmente alla formola

$$\sqrt{z} = \frac{\sqrt{\delta}}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + 1}}.$$

Ora sia η la minima altezza apprezzabile coi mezzi di misura che si adottano; allora pel valore Λ determinato dall'equazione

$$\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + 1} = \sqrt{\frac{\delta}{\eta + \frac{v^2_{os}}{2g}}} = \sqrt{\frac{\delta}{\eta + \delta \text{tg}^2 \frac{\pi c}{4a}}}$$

si avrà sensibilmente $z = \frac{v^2_{os}}{2g}$, cioè l'ordinata del piano p_1 .

Ottenuta Λ , si passerà a calcolare la corrispondente y mediante la

$$y = \frac{2a}{\pi} \text{Arg Th} \left(\Lambda \text{tg } \frac{\pi c}{2a} \right).$$

Con $c = 0,10$, $a = 0,50$, $\delta = 0,02$, $\eta = 0,0005$ si otterrebbe circa $\Lambda = 2,10$ e quindi $y = 0,26$. A tal distanza da O su Oy si può dunque rilevare praticamente H_1 .

Lungo le due pareti AC , BD coplanari alla luce si ha

$$R_1 + R_2 = \frac{2 \text{sen } \frac{\pi x}{a}}{1 + \cos \frac{\pi x}{a}} = 2 \text{tg } \frac{\pi x}{2a}.$$

Sostituendo in (16) e dicendo brevemente

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} : \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2a} = \Gamma$$

si riesce all'equazione

$$\sqrt{z} = \frac{\sqrt{\delta}}{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 1}}.$$

Qui però giova avvertire che non è possibile, almeno in pratica, rilevare H_1 sul pelo di fianco alla luce, quivi esistendo un punto intersezione col piano p_1 . Difatti l'ordinata v_{os}^2 di p_1 è compresa fra 0, ordinata del pelo in D, e δ , ordinata del pelo in B. In questo senso almeno sarebbe preferibile che le formole empiriche della portata si riferissero al carico H, voglio dire all'altezza di p_0 sulla soglia, anzichè al carico H_1 , altezza di p_1 sulla soglia, come ordinariamente si suole. Si avrebbe inoltre il vantaggio di risparmiare la tenuta in conto della velocità di arrivo. L'ultima formola scritta ci dà il mezzo di trovare la minima distanza x a cui poter misurare H senza dover arrivare in D (o in C). Allo scopo si comincerà dal risolvere in Γ l'equazione

$$\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 1} = \sqrt{\frac{\delta}{\eta}}$$

dopo di che si avrà

$$x = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\Gamma \operatorname{tg} \frac{\pi c}{2a} \right).$$

Coi dati numerici già indicati si ottiene $\Gamma = 3,24$ e finalmente $x = 0,26$, cioè il rilievo dovrà farsi a m. 0,16 dal bordo più prossimo.

Vedemmo che in un caso pel resto uguale, ma a contrazione laterale perfetta, quest'ultima distanza doveva esser 0,22 epperò maggiore. Ciò non può destar meraviglia: il lettore sa oramai che l'esatta misura di H si ottiene sempre per $x = a$, la quale a è infinita se la contrazione laterale è perfetta.

Se teoricamente parlando la contrazione laterale è perfetta soltanto quando a è infinita, in pratica lo è quando l'influenza delle pareti CE, DF è trascurabile. Per vedere a qual valore minimo di a ciò accade, porremo a confronto le portate elementari di due strisce uguali poste alla stessa profondità z_0 ed appartenenti l'una ad una bocca quale la considerata al § 2 e l'altra ad una come le attualmente studiate, ma pel resto uguale alla prima. Sceglieremo in ambedue i casi p_0 per piano di carico, cioè quello passante pei punti del pelo dove il liquido è in quiete. Nel caso più semplice vedemmo che la componente v è data da $v = -V_0 e^{-\alpha z} \operatorname{sen} \beta$. Dunque sul piano della bocca sarà $v = -V_0 \operatorname{sen} \beta$. Ora la portata Δq uscente da una striscia $2c \Delta z_0$ di altezza Δz_0 è in valore assoluto

$$\Delta q = 2 \Delta z_0 \int_0^c v dx = 2c V_0 \Delta z_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \beta d\beta$$

$$\Delta q = c V_0 \Delta z_0 \frac{\pi}{2}.$$

Invece nel caso della fig. 2 la portata della striscia $2c \Delta z_0$ equivarrebbe evidentemente a

$$\Delta q' = 2a v_0 \Delta z_0 = 2a V_0 \Delta z_0 \operatorname{tg} \frac{\pi c}{4a},$$

dove V_0 non differisce praticamente dalla omonima della formula precedente.

Così abbiamo il rapporto

$$\frac{\Delta q'}{\Delta q} = \frac{4a}{\pi c} \operatorname{tg} \frac{\pi c}{4a}.$$

Il secondo membro è sempre > 1 , e precisamente il coefficiente d'efflusso cresce al diminuire di a . Ma si potrà trascurare l'influenza delle pareti longitudinali se il sopra scritto rapporto non supera per es. 1,004, cioè se quell'influenza non

arriva a cagionare un incremento nella portata del $\frac{1}{2}$ per % . Ora si ha

$$\frac{4 a}{\pi c} \operatorname{tg} \frac{\pi c}{4 a} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi c}{4 a} \right)^2 + \frac{2}{3.5} \left(\frac{\pi c}{4 a} \right)^4 + \dots$$

Ponendo ciò uguale ad 1,004, se ne ricava

$$\frac{\pi c}{4 a} = 0,11 \text{ circa}$$

donde $a = 7,13 c$.

L'influenza di CE, DF sarà dunque praticamente nulla se la larghezza del canale uguaglia o supera, in cifra tonda, 7 volte quella dello stramazzo.

Noi ponemmo già

$$V_0 = \theta \sqrt{2 g z_0},$$

trattando θ come funzione di z_0 ; $\theta = 1$ solo per $z_0 = \delta$ e per $z_0 = H$. Sarà utile vedere qual sia il valor medio generale θ_0 di θ . Esso è tale che la portata q dello stramazzo è espressa da

$$q = \frac{\pi c \theta_0}{2} \int_{\delta}^H \sqrt{2 g z_0} dz_0 = \frac{\pi c \theta_0}{3} H \sqrt{2 g H} \left\{ 1 - \left(\frac{\delta}{H} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

La formola comune è $q = 2 \mu c H \sqrt{2 g H}$ con μ coefficiente d'efflusso. Ora anche se la soglia è sul fondo, μ oscilla poco attorno al valore 0,40, e così anche si potrà tenere mediamente $\frac{\delta}{H} = 0,20$. Allora le due espressioni di q danno luogo all'equazione

$$\frac{0,91}{3} \pi c \theta_0 = 2 \times 0,4 c,$$

donde

$$\theta_0 = \frac{6 \times 0,4}{0,91 \pi} = 0,84 \text{ circa.}$$

Così certamente θ è minore dell'unità nei punti interni della sezione liquida in A B, cosa che potevasi prevedere.

Un'espressione di θ soddisfacente alle condizioni estreme e media sarebbe la seguente

$$\theta = 1 - 0,97 \left\{ \frac{z_0 - \delta}{H - \delta} - \left(\frac{z_0 - \delta}{H - \delta} \right)^2 \right\}$$

il cui valor minimo è 0,76 o corrisponderebbe alla orizzontale mediana della sezione suddetta ¹⁾.

Le formole che danno le velocità pel caso contemplato nel presente paragrafo sono abbastanza complicate, come s'è potuto vedere. Si semplificano però nell'ipotesi di una luce strettissima. Allora, essendo k piccolissimo, possiamo scrivere le (7):

$$R_1 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left(1 + \frac{k \alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right), \quad R_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left(1 - \frac{k \alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \right)$$

e quindi

$$R_1 + R_2 = 2 \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad R_1 - R_2 = \frac{2 k \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}.$$

Perlochè (8) e (9) divengono

$$\alpha = \lg \frac{R_1 + R_2}{k} = \lg \frac{2 \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}{k}$$

$$\beta = \arccos \frac{R_1 - R_2}{2k} = \arccos \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}.$$

¹⁾ La relativa piccolezza degli scartamenti di θ dall'unità rende, se non andiamo errati, il nostro metodo preferibile a quello di assumere come dato, sul piano della luce A, la componente di velocità V_a (qui sarebbe v) normale ad A. Con questo dato sarebbe facile trattare anche il problema idrodinamico più generale, cioè dipendente da 3 coordinate, seguendo la via tenuta dal Boussinesq (*Essai sur la théorie des eaux courantes-Notes complémentaires*). Se non che il forte ostacolo è l'ignoranza in cui ci si trova circa il supposto dato, la legge di variazione delle V_a . Sarebbe bensì ovvio stabilire il valor medio delle medesime, ma l'assumerlo a luogo delle V_a variabili condurrebbe a risultati illusorii, attese le enormi differenze che corrono fra il detto valor medio ed i valori estremi, massimo e minimo, di V_a .

Posto ora, secondo il consueto, $\lg \frac{V}{V_0}$ per α ed $\text{arctg} \frac{v}{u}$ per β , avremo

$$V = \frac{k V_0}{2 \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$$

$$u = -\frac{k V_0}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad v = -\frac{k V_0}{2} \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}.$$

Poichè α_1 e β_1 sono i due primi membri delle (13), si ha

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \frac{\text{sen}^2 \frac{\pi x}{a} + \text{Sh}^2 \frac{\pi x}{a}}{\left(\text{Ch} \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a} \right)^2},$$

cioè a dire, per facile riduzione:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \frac{\text{Ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi x}{a}}{\text{Ch} \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}}.$$

E si otterrà

$$V = \frac{k V_0}{2} \sqrt{\frac{\text{Ch} \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}}{\text{Ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi x}{a}}}$$

$$u = -\frac{k V_0}{2} \frac{\text{sen} \frac{\pi x}{a}}{\text{Ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi x}{a}}, \quad v = -\frac{k V_0}{2} \frac{\text{Sh} \frac{\pi y}{a}}{\text{Ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi x}{a}},$$

Lungo l'asse Ox si ha

$$V = |u| = \frac{k V_0}{2} \frac{\text{sen} \frac{\pi x}{a}}{1 - \cos \frac{\pi x}{a}} = \frac{k V_0}{2} \cot \frac{\pi x}{2a}.$$

Luogo l'asse Oy si ha

$$V = |v| = \frac{k V_0}{2} \frac{\text{Sh} \frac{\pi y}{a}}{\text{Ch} \frac{\pi y}{a} - 1} = \frac{h V_0}{2} \text{Coth} \frac{\pi y}{2a}.$$

Però in immediata vicinanza della bocca queste formole non sono più valide, mentre allora k è dello stesso ordine di grandezza di $\sqrt{\alpha_1^2 + \rho_1^2}$.

4. Utilizzazione delle formole per certi casi più comuni.

Girando la fig. 2 di 90° e riguardando in prima approssimazione Oy come pelo libero, salvo poi a determinarlo meglio mediante le V ivi calcolabili, potremmo cercare di applicare la teoria ad uno stramazzo *tipo* (contrazione soppressa sui fianchi) e con altezza di traversa (A C) finita o no. Ma preferiamo por termine qui ai nostri calcoli accennando solo brevemente come il poco finora esposto possa venir utilizzato pel caso più generale in cui anche la soglia sia in parete sottile vale a dire elevata sul fondo del recipiente o canale donde ha luogo l'efflusso a stramazzo, libero ed a contrazione perfetta o imperfetta su tutti i lati: caso per la cui analisi diretta occorrerebbe l'uso di tre coordinate.

Nel moto permanente (qui sempre supposto) il pelo libero (p) è una superficie di flusso, vale a dire dove la componente normale di velocità è nulla. Il pelo libero taglia la luce A presso a poco secondo la retta $z_0 = \delta$, conservando i noti significati dei simboli. Consideriamo un momento la superficie di flusso (p') infinitamente vicina al pelo libero e che passa per la retta $z_0 = \delta + dz_0$ tracciata su A. Fra le due superficie (p, p') scorre un velo liquido, il cui spessore in A è dz_0 . Nei casi fin qui trattati lo spessore del velo fu ritenuto costante dappertutto, come era ammissibile, fino a distanze infinite a monte di A. Nel caso però della soglia sovrappresa sul fondo l'ipotesi diverrebbe decisamente erronea. I filetti liquidi s'avviano da ogni parte del campo verso lo

sbocco convergendovi non soltanto planimetricamente, ma anche altimetricamente cioè con moti ascensionali. Ne deriva che la distanza fra le due superficie (p, p') cresce a misura che si risalisce la corrente stratiforme o velo liquido verso a monte. Per la continuità quindi le velocità diminuiscono in proporzione maggiore di quella che si verificava quando la convergenza dei filetti era soltanto planimetrica. Con le velocità vanno di pari passo le ordinate z del pelo libero: sicchè tal superficie tende ad avvicinarsi al piano $z=0$ più rapidamente che nel caso della soglia giacente sul fondo. Dunque se, avendo la soglia elavata, ma le restanti condizioni (luce, larghezza $2a$) pari, noi applicheremo le regole già trovate per determinare sul pelo la curva, a monte della quale la chiamata allo sbocco è praticamente nulla, od anche se applicheremo la regola per determinare la larghezza minima che deve avere il canale affinchè la contrazione sui fianchi si possa chiamare perfetta, riusciremo certo a risultati inesatti, ma l'errore non sarà dannoso, anzi giovevole, in quanto che porterà ad eccedere in sicurezza, non a difettarvi. Per meglio dire, applicando le precedenti regole si avranno determinazioni del confine della chiamata ecc. relative a mezzi di misura più precisi di quelli supposti. Ad es., riferendoci ad un risultato numerico sopra ricavato, se pel caso della soglia alta sul fondo e dove abbiassi $c=0^m,10$, $a=0^m,50$, $\delta=0^m,02$ noi ci atterremo a rilevare il carico H a 16 cm. di distanza dal lato verticale della luce (su Ox) oppure il carico H_1 a 26 cm. a monte della luce stessa (su Oy), potremo star tranquilli che, per quanto dipende dall'ubicazione, i rilievi saranno affetti da errori *minori* di mezzo millimetro.

Così i criterii esposti possono servire a dare, nel senso detto, norme di buona attendibilità anche pei comuni efflussi a stramazzo in parete sottile, lo studio diretto dei quali offrirebbe difficoltà analitiche forse insormontabili.

Roma, R. Scuola d' Applicazione per gl' Ingegneri.
