

Min. $e = 0.018942$ und Max. $e = 0.036298$.

Die Lage des Perihels kann sich um höchstens $\pm 18^\circ 0'$ von der des Jupiter unterscheiden. Die Phase der Libration von e und ϖ ist genau um 90° verschieden, sodaß, wenn e seine größte Abweichung zeigt, ϖ mit ϖ' koinzidiert. Die Librationsperiode beträgt ungefähr 32000 jul. Jahre. Zur Zeit liegt die Exzentrizität in unmittelbarer Nähe ihres Maximums.

Unsere Untersuchung bedarf noch einer Erweiterung, indem die bisherige Betrachtung die Unveränderlichkeit der Jupiterelemente voraussetzte. Zu diesem Zwecke bringen wir Gleichung (7) in eine andre Form. Da e und ϖ eine Librationsbewegung mit der gemeinsamen Periode $2\pi/s$ vollführen, so gilt dies auch von den Elementen $h = e \sin \varpi$ und $k = e \cos \varpi$. Um dies zu zeigen, substituieren wir hierin $e = e_0 + Ae$ und $\varpi = \varpi' + A\varpi$, wo e_0 den Wert der Exzentrizität in der periodischen Lösung, ϖ' die Perihellänge Jupiters bedeutet. Dann erhält man, bei Beschränkung auf die linearen Glieder

$$\begin{aligned} h &= A \sin(s t + B + \varpi') + e_0 \sin \varpi' \\ k &= A \cos(s t + B + \varpi') + e_0 \cos \varpi' \end{aligned}$$

Aus der Bedingungsgleichung $(\partial \Omega / \partial e)_0 = 0$ folgt wie oben $e_0 = e' B_2 / B_1$, während die auf Jupiter bezogenen Lagrange'schen Paranthesen $[0,7]$ bzw. $(0,7) = s$ der Beziehung $B_2 : B_1 = [0,7] : (0,7)$ gehorchen, sodaß jetzt

$$\begin{aligned} h &= A \sin(s t + B') + [0,7] h' / (0,7) \\ k &= A \cos(s t + B') + [0,7] k' / (0,7) \end{aligned} \quad (8)$$

deren Differentialgleichungen

$$dh/dt = k s - [0,7] k' \quad dk/dt = -h s + [0,7] h'$$

mit den Differentialgleichungen der Säkularstörungen, Gleichung (1), identisch sind, und zwar ist auch der Grad der Annäherung derselbe wie dort. Wir erkennen also, daß die Säkularstörungen niedrigster Ordnung identisch sind mit der 1. Variation einer Poincaréschen periodischen Lösung hochzahliger Kommensurabilität.

Wir berücksichtigen vorerst nur die mittlere Säkularbewegung des Jupiterperihels, indem wir setzen $\varpi' = \varpi_0' + s_1 t$, wo ϖ_0' eine Konstante ist. Es ergeben sich Integrale von

Sternwarte Breslau, 1921 März 1.

Die Quantenzahlen der Saturnmonde.

In AN 5113 hat *E. Dittrich* die Gesetze der Elektronik auf das Sonnensystem angewendet. Unter anderem hat er die Gleichung $\dot{V} T_n = c \cdot n$ für die Saturntrabanten geprüft und den 10 Begleitern Quantenzahlen von $n=8$ bis $n=65$ zugewiesen. Ich finde aber, daß man mit kleineren Quantenzahlen $\nu=7$ bis $\nu=59$ auskommt und sogar eine bessere Darstellung erreicht. In der Gestalt $c = \dot{V} T_n / n$ bzw. $c' = \dot{V} T_\nu / \nu$ seien die beiden Zahlenreihen in der nebenstehenden Tabelle miteinander verglichen. Die kleineren Quantenzahlen ergeben also die kleinere Quadratsumme der Abweichungen; es kann mithin kein Zweifel bleiben, welche Quantenzahlen vorzuziehen sind. *Dittrich* setzt für n auch Werte unter 8 ein und vergleicht die Ergebnisse mit den Dimensionen der Ringe. Da die beiden Gleichungen $\dot{V} T_n = c \cdot n$ bzw. $\dot{V} T_\nu = c' \cdot \nu$, wie eine kurze Umrechnung ergibt, mit den folgenden: $a = 0.0501 \cdot n^2$ bzw. $a' = 0.0615 \cdot \nu^2$ gleichwertig sind, findet man:

n	a	ν	a'	n	a	ν	a'
7	2.45	6	2.21	5	1.25	4	0.984
6	1.80	5	1.54	4	0.80		

der Form $h = A_1 \sin(s t + B') + A_2 \sin(s_1 t + \varpi_0')$
 $k = A_1 \cos(s t + B') + A_2 \cos(s_1 t + \varpi_0')$

wo $A_2 = [0,7] \cdot e' / (s - s_1)$. Die Librationsbewegung um das Jupiterperihel bleibt erhalten, solange $|A_2| > |A_1|$, oder, was dasselbe ist, wenn $e < 2[0,7] e' / (s - s_1)$. Dann können wir auch durch die Substitution

$$h = h_0 \cos s_1 t + k_0 \sin s_1 t \quad k = -h_0 \sin s_1 t + k_0 \cos s_1 t$$

wieder auf die Integrale der Form (8) zurückgehen, indem dann

$$\begin{aligned} h_0 &= A_1 \sin[(s - s_1) t + B'] + C \\ k_0 &= A_1 \cos[(s - s_1) t + B'] + D \end{aligned} \quad (9)$$

wird, worin $C = [0,7] h_0' / (s - s_1)$ und $D = [0,7] k_0' / (s - s_1)$. Geometrisch gedeutet, drücken die Gleichungen (9) eine gleichförmige Rotation des Koordinatensystems um die Sonne aus. h_0 und k_0 sind die auf die beweglichen Achsen bezogenen Elemente. Die zu Jupiter gehörigen Konstanten h_0' und k_0' sind definiert durch $h_0' = e' \sin \varpi_0'$ und $k_0' = e' \cos \varpi_0'$. Die Librationsperiode beträgt jetzt $2\pi / (s - s_1)$. Dieses Resultat wird auch nur ganz unwesentlich modifiziert, wenn h' und k' in der allgemeinen Form angesetzt werden, wie sie sich aus der Störungstheorie der großen Planeten ergeben:

$$h' = \sum M_r' \sin(s_r t + \beta_r) \quad k' = \sum M_r' \cos(s_r t + \beta_r).$$

Sofern nur die Koeffizienten M_r' gewissen, früher fixierten Bedingungen genügen, behalten die Integrale (9) ihre Form, nur treten an Stelle der Konstanten C und D periodische Funktionen mit kleiner Amplitude. Wir erkennen also: Existiert bei einem Kleinen Planeten Libration des Perihels um dasjenige Jupiters in dem von Herrn *Charlier* definierten Sinne, so sind die Säkularstörungen, die der Planet unter dem Einflusse Jupiters erfährt, identisch mit der auf ein gleichförmig um die Sonne rotierendes Koordinatensystem bezogenen ersten Variation einer Poincaréschen periodischen Lösung hochzahliger Kommensurabilität. Die Rotationsgeschwindigkeit ist gleich der mittleren säkularen Perihelbewegung Jupiters zu wählen. Umgekehrt können wir jetzt schließen, daß sich in diesen Fällen der Planet dauernd in der Nachbarschaft einer Poincaréschen periodischen Lösung aufhalten wird.

A. Klose.

Nun liegt der äußere Rand des Ringsystems bei 2.25 und der innere bei 1.45. Demnach schließen sich auch hier die ν -Werte besser als die n -Werte an; $\nu=4$ führt unter Berücksichtigung der Abplattung auf die Oberfläche des Planeten.

	$\dot{V} T^1)$	$n^1)$	c	Abw. Δ	Δ^2	ν	c	Abw. δ	δ^2
Mimas	0.9804	8	0.1225	-28	784	7	0.1401	+14	196
Encel.	1.1107	9	0.1234	-19	361	8	0.1388	+1	1
Tethys	1.2359	10	0.1236	-17	289	9	0.1373	-14	196
Dione	1.3988	11	0.1272	+19	361	10	0.1399	+12	144
Rhea	1.653	13	0.1272	+19	361	12	0.1377	-10	100
Titan	2.517	20	0.1258	+5	25	18	0.1398	+11	121
Themis	2.752	22	0.1251	-2	4	20	0.1376	-11	121
Hyp.	2.771	22	0.1259	+6	36	20	0.1385	-2	4
Jap.	4.297	34	0.1264	+11	121	31	0.1386	-1	1
Phoebe	8.195	65	0.1261	+8	64	59	0.1389	+2	4

$$\text{Mittel} = 0.1253 \quad \Sigma = 2406 \text{ M.} = 0.1387 \quad \Sigma = 888$$

¹⁾ Werte nach *Dittrich*.

Berlin, im Oktober 1921.

R. Sommer.