Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.

(Di Tullio Levi-Civita, *a Padova.)*

INTRODUZIONE.

Accanto al problema classico della trasformabilità di due forme differenziali quadratiche è stato posto in questi ultimi anni dal sig. Appell (*) il problema analogo più generale della trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche fra uno stesso numero di variabili.

Varii autori hanno dopo di allora istituito ricerche su questo soggetto, segnatamente i sigg. Painlévé e R. Liouville, cui spetta il merito di aver scoperto alcune interessanti proprietà generali. Per aver modo di farne un breve cenno, conviene fin d'ora precisar la questione, indicando altresì l'aspetto definitivo, sotto cui essa può venire formulata.

Ecco in primo luogo l'enunciato del sig. Appell.

Dati due sistemi materiali S ed S_1 a legami indipendenti dal tempo e collo stesso grado di libertà, e dette rispettivamente x_i e y_i $(i=1, 2,\ldots, n)$ le coordinate lagrangiane, che fissano la posizione dei due sistemi, X_i, Y_i le forze, che li sollecitano secondo queste coordinate, saranno:

$$T=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, x'_r\, x'_s, \qquad T_1=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_{rs}\, b_{rs}\, \overline{y}'_r\, \overline{y}'_s$$

$$\frac{d\,\dfrac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial x_i}=X_i \tag{A}$$

$$(i=1, 2,\ldots, n)$$

$$\frac{d\,\dfrac{\partial T_1}{\partial \overline{y}'_i}}{dt_1}-\frac{\partial T}{\partial y_i}=Y_i, \tag{B}$$

(*) *Sur des transformations de mouvements.* Crelle, Bd. 109, 1892. Si trovano in questa Nota molte indicazioni di lavori aventi attinenza collo stesso argomento o relativi ad alcuni casi particolari.

le forze vive e le equazioni del moto dei due sistemi; essendosi designata al solito con x'_i la derivata di x_i rispetto a t, e, per evitare ambiguità, con $\bar{y}'_i$ la derivata di y_i rispetto a t_1:

Si domanda sotto quali condizioni esista e come si possa assegnare una trasformazione del tipo:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ d t_1 &= \frac{d t}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

atta a far coincidere il sistema di equazioni (B) col sistema (A), supponendo:

1.° Che sieno date tanto le forze X_i, quanto le Y_i.

2.° Che sieno date le sole forze X_i e si possano assegnare a piacimento le Y_i.

La seconda parte della questione, come ha osservato lo stesso sig. Appell, è sempre risolubile, se le forze si risguardano dipendenti anche dalle velocità; si può cioè, e in infiniti modi, con opportuna scelta delle Y_i, far corrispondere a ogni movimento del sistema S, dovuto a forze dipendenti dalle coordinate e dalle velocità, un movimento analogo del sistema S_1, le cui equazioni differenziali (B) sieno, mediante trasformazione del tipo (C), riconducibili alle (A).

In vista di ciò e del minor interesse, che può essere annesso al caso di forze, dipendenti eziandio dalle velocità, giova addirittura, anche per la prima parte della questione, limitarsi all'ipotesi che le forze sieno indipendenti dalle velocità stesse.

Il problema, ristretto sotto questo punto di vista, venne ripreso dal signor Painlévé, che lo presenta (*) tuttavia con una felice modificazione: Egli richiede soltanto che le traiettorie del sistema (B) si possano ricondurre a quelle di (A), o, in altri termini, che gli $n-1$ integrali di (B) indipendenti da t_1 si possano, mediante trasformazioni del tipo:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{D}$$

far coincidere cogli $n-1$ integrali di (A) indipendenti da t; di più egli ha fatto notare come convenga scindere la ricerca in due parti, di cui la prima soltanto è essenziale, riducendosi la seconda ad una trasformazione di forme

(*) *Sur la transformation des équations de la dynamique.* Journal de Liouville, tom. 10, 1894.

differenziali quadratiche. Per stabilire questo punto, si immagini di sostituire in (B) le y_i coi loro valori $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e si ponga:

$$T_1 = \sum_1^n{}_{rs} b_{rs} \overline{y}'_r \overline{y}'_s = \sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} \overline{x}'_r \overline{x}'_s$$

$$\Xi_i = \sum_1^n{}_k Y_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i};$$

le equazioni:

$$\frac{d \dfrac{\partial T_1}{\partial \overline{x}'_i}}{d t_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{A_1}$$

che sono, come è noto, le trasformate delle (B), dovranno ammettere *le stesse traiettorie* di (A), il che mostra in primo luogo che da ogni coppia di sistemi (A), (B), le cui traiettorie si possono far coincidere per mezzo di una trasformazione (D), si deduce una coppia di sistemi (A), (A_1), pure d'equazioni dinamiche, e *aventi le stesse traiettorie*. D'altra parte poi, se si conoscono, per ogni sistema (A), tutti gli (A_1) aventi le stesse traiettorie, cioè secondo la denominazione del sig. PAINLÉVÉ, tutti i sistemi *corrispondenti*, la questione originariamente proposta, di decidere se e come si possa assegnare una trasformazione (D) atta a ricondurre le traiettorie di (B) in quelle di (A), si può risguardare risoluta; poichè una tale trasformazione esisterà allora e solo allora che sia possibile stabilire una identità del tipo:

$$\sum_1^n{}_{rs} b_{rs} d y_r d y_s = \sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} d x_r d x_s,$$

le b_{rs} essendo i coefficienti della forza viva di (B) e le α_{rs} essendo i coefficienti della forza viva in un sistema (A_1) corrispondente ad (A).

Se si suppone adunque che tutti i sistemi (A_1) sieno conosciuti, non ci resta che da esaminare, per ciascuno di essi, se le forme differenziali quadratiche $\sum_1^n{}_{rs} b_{rs} d y_r d y_s$, $\sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} d x_r d x_s$ sono equivalenti nel senso ordinario e da determinare in caso affermativo le formule di trasformazione. Affinchè codesto criterio sia in fatto applicabile, si esige manifestamente che le espressioni possibili per le α_{rs} si riducano ad un numero finito di tipi, e questo precisamente ha luogo nel caso nostro, poichè, come vedremo e come del resto ha già osservato il sig. PAINLÉVÉ, il problema della determinazione di tutti i corrispondenti ad un dato (A) è di quelli, il cui integrale generale dipende soltanto da un numero finito di costanti arbitrarie.

Concludiamo pertanto che, senza ledere la generalità della ricerca, basta limitarla alla questione di *determinare, per un dato sistema* (A), *tutti i corrispondenti* (A_1).

I risultati più notevoli raggiunti finora si possono riassumere come segue (*):

1.° Ogni qual volta un sistema (A) ammette un corrispondente (A_1) *non ordinario* (cioè non di un certo tipo assai facilmente assegnabile, che compete ad ogni (A) fissato ad arbitrio), esiste per entrambi un integrale primo quadratico.

2.° Se nel sistema (A) si suppone che le forze sieno nulle, lo stesso deve accadere per ogni suo corrispondente (A_1), quindi, posto $ds^2 = 2\,T\,dt^2$, $ds_1^2 = 2\,T_1\,dt_1^2$, la ricerca dei sistemi corrispondenti ad (A) equivale in questo caso alla determinazione di tutte le varietà ds_1, che hanno le medesime geodetiche di ds. (Per $n=2$, il problema, come è ben noto, è stato risoluto dal prof. Dini.)

3.° *Teorema di* R. Liouville (**). Due sistemi (A) ed (A_1) privi di forze, i quali definiscano le medesime geodetiche, ammettono entrambi n integrali quadratici, che possono però coincidere ed anche ridursi al solo integrale delle forze vive.

4.° La trasformazione, che permette di ricondurre un sistema (A_1) al suo corrispondente (A), è del tipo $dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, quando non agiscono forze, e più generalmente del tipo $dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2}\left\{1 - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r\, x'_s\right\}$ (la μ e le c_{rs} essendo funzioni delle x) in tutti gli altri casi. Apparisce da ciò come in generale la condizione di ammettere le medesime traiettorie sia per due sistemi di equazioni dinamiche alquanto meno restrittiva che non la loro trasformabilità secondo il sig. Appell (veggasi la seconda delle equazioni (C)); le due condizioni si equivalgono, solo quando mancano le forze.

Malgrado queste notevoli proposizioni, il problema generale della determinazione di tutti i corrispondenti ad un dato (A), non venne ancora trat-

(*) Io ho esposto questi risultati nel modo, che mi parve più semplice, però il loro ordine, come avremo occasione di constatare più innanzi, non rispecchia la successione naturale, secondo cui si presentano.

(**) *Sur les équations de la dynamique.* Acta Math., tom. 19, 1895; è notevole l'estensione ivi indicata di alcuni risultati ad una classe di equazioni più generali delle dinamiche.

tato: Il sig. LIOUVILLE ne ha stabilite le equazioni differenziali (di cui si vale per stabilire in modo diverso da quello del sig. PAINLÉVÉ le proprietà accennate), senza tuttavia proporsene la effettiva integrazione, ciò, che per verità, prendendo direttamente le sue formule, non sarebbe punto agevole.

Lo studio di tale questione costituisce all'incontro l'oggetto principale delle mie ricerche.

Io prendo le mosse ab initio dalla definizione di sistemi corrispondenti e mostro in primo luogo come *l'integrazione di un sistema equivale a meno di quadrature a quella d'ogni suo corrispondente;* discuto quindi le relazioni che debbono passare tra le variabili t e t_1 e ritrovo per via diretta le forme già note: $dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, quando non agiscono forze e più generalmente $dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2}\left\{1 - \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s\right\}$ negli altri casi (secondo e quarto dei risultati sopra riferiti). Ho dovuto limitarmi nella presente Memoria a considerare il caso, in cui non agiscono forze, cioè, con linguaggio geometrico, il problema della conservazione delle geodetiche.

Si può attribuire ad esso il seguente aspetto generale:

Data una varietà φ, il cui elemento lineare sia $ds = dt\sqrt{2T}$, determinare tutte le varietà Φ rappresentabili (almeno in una certa regione) *univocamente su φ, in modo che ad ogni geodetica di Φ corrisponda una geodetica di φ.*

È manifesto infatti che, se si risguardano equivalenti le varietà applicabili (e si suppone quindi sostituibile ciascuna categoria di varietà applicabili con un solo individuo), la determinazione delle Φ si riduce a quella di tutte le varietà, che hanno le stesse geodetiche di φ, cioè effettivamente alla determinazione di tutti i $ds_1^2 = \sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} dx_r dx_s$, che rendono, supposte nulle le forze, il sistema (A_1) corrispondente al sistema (A).

Questo problema trovasi qui risoluto completamente (*).

Fissate nel § 4 le equazioni, che legano le α_{rs} alle a_{rs}, mi occupo nel § 6 di trasformarle, introducendo le derivate covarianti del prof. RICCI, che sono prezioso quanto elegante stromento in tutte le ricerche, che hanno ca-

(*) Conviene aggiungere nel campo reale, poichè non solo noi ci riferiremo sempre (come è naturale, trattandosi di equazioni dinamiche) a forme ds^2, ds_1^2 essenzialmente positive, ma non sarebbe nemmeno possibile col nostro procedimento prescindere dall'ipotesi (cfr. § 7) che una almeno di esse conservi sempre il medesimo segno.

rattere invariantivo: Dalle equazioni differenziali, in tal guisa trasformate, deduco immediatamente l'esistenza di un integrale primo quadratico (primo dei risultati sopra riferiti).

Estesi quindi (§§ 7 ed 8) (colla scorta di una Nota recente (*) dello stesso prof. Ricci) al caso di n variabili taluni procedimenti di calcolo, immaginati dal medesimo autore nelle sue ricerche sulla teoria delle superficie (**), me ne valgo (§ 9) per attribuire alle mie equazioni un aspetto molto più semplice e sotto cui l'interpretazione geometrica si presenta spontanea. Il successo del metodo da me adottato si deve a questa interpretazione; essa rivela infatti l'esistenza nelle coppie di varietà corrispondenti (chiamando per brevità varietà corrispondenti quelle, le cui geodetiche coincidono) di speciali famiglie di superfici, che, assunte a sistema coordinato, attribuiscono forme particolari ai quadrati degli elementi lineari. Ciò permette la riduzione di una coppia qualsivoglia di sistemi corrispondenti a n tipi perfettamente determinati $t_1)$, $t_2), \ldots, t_n)$, ciascun tipo essendo caratterizzato dalla trasformabilità dei ds e ds_1 a certe forme canoniche, rese esplicite a § 12.

Di più, dato ad arbitrio un sistema (A) privo di forze, o ciò, che è lo stesso, un ds e fissato un tipo $t_m)$, si possono formare, se esistono tutti i ds_1 corrispondenti (cioè spettanti a sistemi corrispondenti di quel tipo): La loro espressione generale dipende da due costanti arbitrarie per $t_1)$, $t_2), \ldots, t_{n-1})$, da una costante sola pel tipo $t_n)$.

Due sistemi corrispondenti di tipo $t_m)$ ammettono ciascuno $n - m + 1$ integrali primi *quadratici* distinti, con che riesce completato in un punto importante il teorema di Liouville.

Pongo ormai termine a questa introduzione, esprimendo la speranza di poter presentare in un prossimo articolo alcuni risultati relativi ai sistemi sollecitati da forze.

(*) *Sulla teoria degli iperspazii.* Rendiconti dei Lincei, 1895.
(**) Si veggano gli Atti dell'Ist. Veneto, 1893, 1894 e 1895.

§ 1. Sistemi corrispondenti. Loro equivalenza a meno di quadrature.

Sieno:

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i \tag{A}$$

$$(i = 1,\ 2, \dots,\ n)$$

$$\frac{d\frac{\partial T_1}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i, \tag{A$_1$}$$

le equazioni differenziali spettanti a due problemi dinamici collo stesso grado di libertà, ma in generale distinti, sì per la natura del sistema in movimento, che per le forze. Se, ogni qualvolta si attribuiscono alle coordinate e alle velocità gli stessi valori iniziali, i due movimenti hanno nello spazio rappresentativo $(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)$ la stessa traiettoria (potendo però differire per il modo, con cui, al variare del tempo, tale comune traiettoria viene percorsa), i sistemi (A) ed (A$_1$), secondo una denominazione proposta dal sig. Painlévé, si dicono *corrispondenti.*

Giova mostrare prima di tutto che: *L'integrazione delle equazioni differenziali di due problemi corrispondenti, presenta, a meno di quadrature, la stessa difficoltà.* Infatti, integrato uno dei due sistemi, poniamo il primo, si hanno, eliminando il tempo, $n-1$ relazioni tra le coordinate e le costanti arbitrarie, le quali, per ipotesi, debbono essere altresì integrali del secondo sistema. Da esse si potranno ricavare $x_2,\ x_3, \dots,\ x_n$ in funzione di x_1, e, derivando rapporto a t_1, $\bar{x}'_2,\ \bar{x}'_3, \dots,\ \bar{x}'_n$ in funzione di x_1 e di $\bar{x}'_1$: Si immagini ora di risolvere il sistema (A$_1$) rispetto ad $\bar{x}''_1$ e di sostituire nel secondo membro per $x_2,\ x_3, \dots,\ x_n$; $\bar{x}'_2,\ \bar{x}'_3, \dots,\ \bar{x}'_n$ le loro espressioni, otterremo, come è agevole riconoscere una equazione della forma:

$$\bar{x}''_1 = P\bar{x}'^2_1 + Q,$$

P e Q essendo funzioni della sola x_1; ed è manifesto che basterà integrare tale equazione, per determinare completamente il moto del sistema (A$_1$). Consideriamo x_1 come variabile indipendente, $y = \bar{x}'^2_1$ come funzione incognita; avendosi $\bar{x}'_1 = \frac{dx_1}{dt_1}$, $\bar{x}''_1 = \frac{d\bar{x}'_1}{dt_1}$, risulterà $\bar{x}''_1 = \bar{x}'_1 \frac{d\bar{x}'_1}{dx_1} = \frac{1}{2}\frac{dy}{dx_1}$ e per conseguenza $\frac{1}{2}\frac{dy}{dx_1} = Py + Q$: Tale equazione, lineare in y, si integra per quadrature, e, nota y, si ha con una nuova quadratura da $dt_1 = \frac{dx_1}{x'_1} = \frac{dx_1}{\sqrt{y}}$, la richiesta relazione fra x_1 e t_1.

La proposizione enunciata si potrebbe del resto ovviamente dedurre dalla nota teoria dell'ultimo moltiplicatore (*).

§ 2. Modo di passare dall'uno all'altro di due sistemi corrispondenti.

Il precedente teorema mette in evidenza l'interesse, che si riattacca alla considerazione dei sistemi corrispondenti, poichè un problema dinamico potrà riguardarsi risoluto, le quante volte si giunga a stabilire che esso è il corrispondente di un caso noto. Sorge quindi spontanea la questione di determinare per un sistema (A) tutti i corrispondenti.

Affine di poter anche soltanto abbordare una questione siffatta, occorre manifestamente conoscere quali condizioni leghino tra loro le forze e i coefficienti della forza viva di due sistemi corrispondenti: Noi dovremo pertanto in primo luogo avviarci a stabilire codeste condizioni.

Sia:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0;\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ldots,\ x_n'^0) \\ x_2 = \varphi_2(t,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0;\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ldots,\ x_n'^0) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = \varphi_n(t,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0;\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ldots,\ x_n'^0), \end{array}\right\} \quad (1)$$

il sistema integrale delle (A), dove si suppone, come è sempre possibile, che le $2n$ costanti di integrazione sieno i valori delle coordinate e della velocità per un generico valore del tempo t^0.

Il sistema integrale delle (A_1) sarà:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \psi_1(t_1,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0;\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ldots,\ x_n'^0) \\ x_2 = \psi_2(t_1,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0;\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ldots,\ x_n'^0) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = \psi_n(t_1,\ x_1^0,\ x_2^0,\ldots,\ x_n^0;\ x_1'^0,\ x_2'^0,\ldots,\ x_n'^0), \end{array}\right\} \quad (2)$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Lez. 18.

nelle quali pure $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \dots, x'^0_n$ rappresentano i valori delle coordinate e delle velocità relativi ad un generico valore t_1^0 di t_1. Se si immagina che tali valori iniziali, pur restando affatto arbitrarii, coincidano con quelli, che compaiono nelle (1), si esprimerà immediatamente la condizione di corrispondenza pei sistemi (A) ed (A_1), dicendo che l'eliminazione di t dalle (1), e di t_1 dalle (2) deve portare *alle stesse relazioni* fra le coordinate.

Ciò equivale ad esigere che, sostituendo nelle (2), t_1 in funzione di t, per mezzo, poniamo, della relazione:

$$\varphi_1(t, x_1^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, \dots, x'^0_n) = \psi_1(t_1, x_1^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, \dots, x'^0_n), \tag{3}$$

le (2) stesse *si riducano identicamente alle* (1). In tal caso avviene altresì che le equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \dfrac{d\varphi_1}{dt} \\ x'_2 = \dfrac{d\varphi_2}{dt} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ x'_n = \dfrac{d\varphi_n}{dt}, \end{array}\right\} \tag{1'}$$

derivate delle (1) rapporto a t e le:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}'_1 = \dfrac{d\psi_1}{dt_1} \\ \bar{x}'_2 = \dfrac{d\psi_2}{dt_1} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \bar{x}'_n = \dfrac{d\psi_n}{dt_1}, \end{array}\right\} \tag{2'}$$

derivate delle (2) rapporto a t_1, si riconducono le une alle altre, mediante la (3) e la conseguente relazione differenziale:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}dt = \frac{d\psi_1}{dt_1}dt_1. \tag{4}$$

Valendo codesta proprietà per ogni sistema di valori delle costanti arbitrarie $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \dots, x'^0_n$, è manifesto che, se nelle (3) e (4), a mezzo delle (1), (1'), si sostituiscono le $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \dots, x'^0_n$ colle $x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, e poi tali espressioni di t_1 e dt_1 si portano nelle (2) (2'), il risultato deve sostanzialmente esser sempre quello di ricondurre le (2) (2') alle (1) (1'). In conseguenza, esprimendo le (3), (4), dopo eseguita l'accennata sostituzione, nella forma:

$$t_1 = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \tag{3'}$$

$$d t_1 = \frac{d t}{f(t, x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}, \tag{4'}$$

possiamo concludere che, per la corrispondenza tra (A) e (A_1) è necessario e basta che un cambiamento di variabile indipendente del tipo (3'), (4') riconduca il sistema integrale delle (A_1) a quello delle (A): Messa sotto questo aspetto, la condizione di corrispondenza si traduce assai facilmente in relazione fra gli stessi sistemi differenziali (A), (A_1); poichè, se esiste un cambiamento di variabile indipendente, che ne fa coincidere i sistemi integrali, il cambiamento stesso deve evidentemente trasformarli l'uno nell'altro.

La variabile t_1 non entrando esplicitamente nelle (A_1), deduciamo il seguente risultato fondamentale:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due sistemi (A) ed (A_1) *di equazioni dinamiche ammettano le medesime traiettorie, si è che il sistema* (A_1) *possa identicamente trasformarsi in* (A), *mediante un cambiamento di variabile indipendente del tipo:*

$$d t_1 = \frac{d t}{f(t, x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}.$$

§ 3. Caratteri della funzione f.

Nei riguardi della funzione f è bene notare che essa, in un certo intorno di $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \dots, x'_n = 0$, almeno per qualche valore delle coordinate e del tempo, è regolare (*) *e diversa da zero.*

(*) Noi supponiamo implicitamente in questo paragrafo e nei due successivi che i coefficienti a_{rs} e α_{rs}, nelle espressioni di T e di T_1, sieno funzioni analitiche delle x_i. Non sarà per altro difficile riconoscere che i risultati finali dei paragrafi 4 e 5 sono indipendenti da questa ipotesi restrittiva, quantunque lo stabilirli con rigore riuscirebbe inutilmente penoso.

Per stabilire questa proprietà, giova dapprima risolvere i sistemi (A) ed (A_1), rispetto alle derivate seconde, ciò, che, se si pone:

$$a = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}, \qquad \alpha = \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}$$

$$a^{(ij)} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{ij}}, \qquad \alpha^{(ij)} = \frac{\partial \log \alpha}{\partial \alpha_{ij}}$$

$$a_{rs,i} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial a_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}\right\}, \qquad \alpha_{rs,i} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i}\right\}$$

$$a^j{}_{rs} = \sum_1^n{}_i a^{(ij)} a_{rs,i}, \qquad \alpha^j{}_{rs} = \sum_1^n{}_i \alpha^{(ij)} \alpha_{rs,i}$$

$$X^j = \sum_1^n{}_i a^{(ij)} X_i, \qquad \Xi^j = \sum_1^n{}_i \alpha^{(ij)} \Xi_i,$$

conduce, come è noto, alle equazioni:

$$x''_j = X^j - \sum_1^n{}_{rs} a^j{}_{rs} x'_r x'_s \tag{A'}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\bar{x}''_j = \Xi^j - \sum_1^n{}_{rs} \alpha^j{}_{rs} \bar{x}'_r \bar{x}'_s. \tag{A'$_1$}$$

Immaginando di sostituire col solito metodo alle (A′) il sistema di equazioni di prim'ordine:

$$\frac{dx_j}{dt} = x'_j$$

$$\frac{dx'_j}{dt} = X^j - \sum_1^n{}_{rs} a^j{}_{rs} x'_r x'_s,$$

apparisce che i valori $x'_1 = x'^0_1$, $x'_2 = x'^0_2, \ldots, x'_n = x'^0_n$, presi comunque, purchè finiti, almeno in un certo campo C delle variabili x_i e t (in cui supporremo presi i valori iniziali $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n, t^0$), non sono singolari pei secondi membri. Si può quindi asserire (*) che le funzioni integrali φ sono regolari in C per ogni sistema di valori delle $x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n$ e in particolare pel valor zero di queste quantità.

Analoga proprietà compete naturalmente alle funzioni ψ, nonchè alle derivate delle φ e delle ψ. Se si prende ora ad esaminare il sistema (1) (1′)

(*) Niccoletti, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali.* Rend. dei Lincei, 1895.

e lo si immagina risoluto rispetto ai valori iniziali, questi ci si presentano, nel campo C sopra detto come funzioni analitiche delle x', regolari per tutti i valori finiti delle x' stesse: Sostituendo così i valori iniziali, la relazione (3) $\varphi_1 = \psi_1$ definisce t come una funzione τ_1 di $t_1, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$, la quale si mantiene certamente regolare, dovunque non sia $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$. Considerando infine la (4), se vi si sostituisce t per mezzo di τ_1 e i valori iniziali mediante le loro espressioni desunte dalle (1) (1'), $\frac{d\ _1}{dt}$ diviene x'_1 e $\frac{d\psi_1}{dt_1}$ una certa funzione $\chi_1(t_1, x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n)$, la quale nel campo C è regolare per valori finiti delle x', escluso al più il valore $x'_1 = 0$ (*).

Ne viene che il rapporto $\frac{\chi_1(t_1, x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n)}{x'_1}$, considerato come funzione dei suoi argomenti, può avere nel campo C e per valori finiti delle x', il solo punto singolare $x'_1 = 0$.

Le osservazioni precedenti permettono di togliere questa restrizione e di stabilire che il detto rapporto è, anche nel punto $x'_1 = 0$, regolare e non identicamente nullo.

Infatti si noti che, assumendo a punto di partenza un'altra (**) relazione del tipo $\varphi_i - \psi_i$ $(i > 1)$, per es. la $\varphi_2 = \psi_2$ e operando, come si è fatto sulla $\varphi_1 = \psi_1$, si trova che il rapporto $\dfrac{\frac{d\psi_2}{dt_1}}{\frac{d\varphi_2}{dt}}$, sostituitivi τ_2 (***) per t e i valori iniziali mediante le loro espressioni ricavate dalle (1) (1'), si riduce a: $\frac{\chi_2(t_1, x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n)}{x'_2}$, che è una funzione intera rispetto alla varia-

(*) Tale eccezione proviene dalla circostanza che la funzione t di $t_1, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0;$ $x'^0_1, x'^0_2, \dots, x'^0_n$ definita dalla (3) $\varphi_1 = \psi_1$ non può asserirsi regolare, quando $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$ e quindi, fatte le debite sostituzioni, il medesimo dubbio si presenta per la funzione τ_1, quando $x'_1 = 0$.

(**) Siccome le relazioni $\varphi_i = \psi_i$ sono in numero di n e $n > 1$ (poichè, per $n = 1$, tutti i sistemi si possono riguardare come corrispondenti), così è sempre lecito considerare, oltre alla relazione $\varphi_1 = \psi_1$, almeno la $\varphi_2 = \psi_2$.

(***) La funzione τ_2 si comporta di fronte alla relazione $\varphi_2 = \psi_2$ come τ_1 di fronte alla $\varphi_1 = \psi_1$ e sarà dunque l'espressione di t, desunta dalla $\varphi_2 = \psi_2$, quando si sieno eliminati i valori iniziali a mezzo delle (1) (1').

bile x'_1. D'altra parte le relazioni $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$ definiscono, in virtù della proprietà caratteristica dei sistemi corrispondenti, la *medesima* funzione t_1 di t, talchè i due rapporti $\frac{\chi_1}{x'_1}$ e $\frac{\chi_2}{x'_2}$, i quali esprimono, per mezzo delle stesse quantità, la derivata di t_1 rapporto a t, debbono coincidere e, siccome il secondo è, almeno in un certo campo, funzione intera di x'_1, lo sarà del pari $\frac{\chi_1}{x'_1}$, come avevamo asserito. Si riconosce che esso non si annulla identicamente per $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$ colla semplice considerazione seguente. La funzione $\frac{d\psi_1}{dt_1}$, per $t_1 = t_1^0$, si riduce per ipotesi a x'^0_1; tale sarà adunque anche il valore di χ_1, quando si faccia $t_1 = t_1^0$, $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots,$ $x_n = x_n^0$; $x'_1 = x'^0_1$, $x'_2 = x'^0_2, \ldots,$ $x'_n = x'^0_n$: Siccome questa circostanza si presenta comunque si immaginino scelti i valori iniziali delle coordinate e delle velocità (purchè soltanto le x^0 sieno in C e le x'^0 finite e diverse da zero), così la funzione χ_1 deve per $t_1 = t_1^0$ ridursi *identicamente* (quindi anche se tutte le x' sono nulle) all'unità. Ciò esclude manifestamente che $\frac{\chi_1}{x'_1}$ sia sempre zero per $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$. Assodato questo punto, facilmente si conclude che la funzione f della (4') è, nell'intorno di $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$, almeno per qualche valore delle coordinate e del tempo, regolare e diversa da zero. E per verità tale funzione f non differisce dalla $\frac{\chi_1}{x'_1}$, se non perchè (oltre alle x e alle x'), nell'una compare come variabile t, nell'altra t_1: Ove quindi t_1 si possa (anche per valori tutti nulli delle velocità) esprimere in funzione regolare delle x, x' e t, le proprietà già dimostrate per la $\frac{\chi_1}{x'_1}$ si riportano senz'altro alla f.

Ora dalla relazione $\varphi_1 = \psi_1$, t_1 risulta funzione regolare di t, per tutti quei valori di t e delle $x_1^0, \ldots, x_n^0$; $x'^0_1, \ldots, x'^0_n$, che appartengono a C, e per cui resta finito il rapporto $\dfrac{\frac{d\varphi_1}{dt}}{\frac{d\psi_1}{dt_1}}$, cioè non nullo l'altro rapporto $\dfrac{\frac{d\psi_1}{dt_1}}{\frac{d\varphi_1}{dt}}$: Sostituendo al solito per i valori iniziali le loro espressioni, ricavate dalle (1) (1'), potremo anche dire che t_1 è funzione regolare di t e delle $x_1, \ldots, x_n$; $x'_1, \ldots, x'_n$ per tutti i valori di queste quantità, che appartengono a C e non annullano $\frac{\chi_1}{x'_1}$: Ma tale rapporto non è sempre zero per $x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_n = 0$, dunque t_1 si può esprimere, almeno in qualche porzione di C, come funzione delle x, x' e t, regolare nell'intorno di $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$.

Il teorema è così dimostrato.

§ 4. Dimostrazione che in due sistemi corrispondenti le forze devono essere contemporaneamente nulle. Forma della relazione fra t e t_1, quando non agiscono forze. Equazioni, che legano in questo caso, le α_{rs} alle a_{rs}.

Si è visto al § 2 che, sostituendo nel sistema (A_1), $\frac{dt}{f(t;\, x;\, x')}$ al posto di dt_1, si deve ritrovare il sistema (A): Lo stesso può evidentemente affermarsi relativamente ai due sistemi (A'_1) e (A'), e sarà appunto, nell'esprimere questa circostanza, che ci verrà fatta di precisare la forma della funzione f e di stabilire le relazioni fondamentali tra le α_{rs} e le a_{rs}.

Scrivendo le equazioni (A'_1) sotto la forma:

$$\frac{d^2 x_j\, dt_1 - d^2 t_1\, dx_j}{dt_1^3} = \Xi^j - \sum_1^n {}_{rs}\, \alpha^j{}_{rs} \frac{dx_r}{dt_1} \frac{dx_s}{dt_1},$$

e, notando che da $dt_1 = \frac{dt}{f}$ segue $-d^2 t_1 = \frac{dt}{f^2} df$, se ne trae agevolmente (qualora si indichino al solito mediante apici le derivazioni rispetto a t):

$$x''_j = \frac{\Xi^j}{f^2} - \sum_1^n {}_{rs}\, \alpha^j{}_{rs}\, x'_r x'_s - x'_j \frac{d \log f}{dt},$$

le quali potranno coincidere colle (A') allora e solo allora che le n relazioni:

$$\left(X^j - \frac{\Xi^j}{f^2}\right) + x'_j \frac{d \log f}{dt} + \sum_1^n {}_{rs} \left\{ \alpha^j{}_{rs} - a^j{}_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (5)$$

sieno soddisfatte *identicamente,* cioè per ogni sistema di valori delle $2n+1$ quantità $t;\, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$.

Supposto (§ 3) di sostituire ad f il suo sviluppo in serie di potenze di $t - t_0$, e, detto f_0 il primo termine di questo sviluppo (che, come sappiamo, nemmeno per valori tutti nulli delle velocità è identicamente nullo) le (5) dovranno in particolare rimanere identità, quando vi si faccia $t = t_0$, cioè $f = f_0$. Esse esprimono allora le condizioni necessarie e sufficienti affinchè si possa passare dal sistema (A_1) al suo corrispondente (A), mediante la trasformazione $dt_1 = \frac{dt}{f_0}$, di guisa che si vede che, ogniqualvolta esiste una trasformazione $dt_1 = \frac{dt}{f_0}$, dove f_0 non contiene il tempo esplicitamente. Basta per conseguenza riferirsi a quest' ultimo caso. Senza trascrivere le (5) col porre $f = f_0$, come equazione di condizione per la corrispondenza fra (A) e (A_1) terremo sempre le (5); *solo f sarà a ritenersi indipendente da t.*

Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato come f sia sviluppabile in serie di potenze delle velocità nell'intorno di $x'_1 = 0,\ x'_2 = 0, \ldots,\ x'_n = 0$ e come il primo termine di questo sviluppo, che chiameremo μ, *non sia identicamente nullo.* Potremo porre pertanto:

$$f = \mu \left\{ 1 + \sum_1^n {}_r\, c_r x'_r + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x'_r x'_s + \mathbf{3} \right\},$$

dove le c sono funzioni delle x e si designa per brevità con $\mathbf{k}$ un insieme di termini, almeno d'ordine k (nelle velocità).

Avremo per conseguenza:

$$f^{-1} = \mu^{-1} \left\{ 1 - \sum_1^n {}_r\, c_r x'_r + \mathbf{2} \right\}$$

$$f^{-2} = \mu^{-2} \left\{ 1 - 2 \sum_1^n {}_r\, c_r x'_r - \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x'_r x'_s + 3 \left(\sum_1^n {}_r\, c_r x'_r \right)^2 + \mathbf{3} \right\}. \tag{6}$$

Derivando rispetto a t l'espressione di f e immaginando di sostituirvi le derivate seconde, mediante i loro valori (A'), si ottiene:

$$\frac{df}{dt} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} x'_r + \mu \left\{ \sum_1^n {}_r\, c_r X^r + \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x'_r X^s \right\} + \mathbf{2},$$

la quale, moltiplicata per la precedente $f^{-1} = \mu^{-1} \left\{ 1 - \sum_1^n {}_r\, c_r x'_r + \mathbf{2} \right\}$, ci dà:

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \sum_1^n {}_r\, c_r X^r - \left(\sum_1^n {}_r\, c_r X^r \right) \left(\sum_1^n {}_r\, c_r x'_r \right) + \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x'_r X^s + .\, \mathbf{2} \tag{7}$$

Portando nelle (5), per f^{-2} e $\frac{d \log f}{dt}$ le loro espressioni offerte dalle (6), (7), i termini indipendenti dalle velocità si ridurranno in ciascuna di esse a:

$X^j - \Xi^j \mu^{-2}$, talchè, per il carattere identico delle (5) stesse, dovrà essere:

$$\Xi^j = \mu^2 X^j \qquad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{8}$$

da cui apparisce, per essere μ diverso da zero, che le X^j e le Ξ^j possono annullarsi solo contemporaneamente; lo stesso può dirsi quindi delle forze $X_i = \sum_1^n{}_{ij}\, a_{ij} X^j$, $\Xi_i = \sum_1^n{}_j\, a_{ij} \Xi^j$, relative a una coppia di sistemi corrispondenti.

Assodato questo punto, cominciamo dal supporre che tutte le forze sieno eguali a zero.

Le (5) danno in questo caso:

$$x'_j \frac{d \log f}{dt} + \sum_1^n{}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0,$$

e la (7) si riduce a:

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_1^n{}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \boldsymbol{\mathfrak{Z}},$$

con che la (5') può essere scritta:

$$x'_j \sum_1^n{}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + x'_j \boldsymbol{\mathfrak{Z}} + \sum_1^n{}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0.$$

Vediamo subito che si deve avere separatamente:

$$x'_j \sum_1^n{}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \sum_1^n{}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0, \qquad (5'')$$

è $x'_j \boldsymbol{\mathfrak{Z}} \equiv 0$, cioè $\boldsymbol{\mathfrak{Z}} \equiv 0$.

Dal confronto delle (5') colle (5'') apparisce che le seconde si deducono dalle prime collo scambio di f in μ; esse mostrano quindi come dall'esistenza di una trasformazione $dt_1 = \frac{dt}{f}$ atta a far coincidere il sistema (A_1) col sistema (A) segue necessariamente l'esistenza di una trasformazione $dt_1 = \frac{dt}{\mu}$ dotata della medesima proprietà. Ne viene che le condizioni (5''), le quali a priori ci si presentano soltanto come necessarie (poichè, appena insieme alle $\boldsymbol{\mathfrak{Z}} \equiv 0$, equivalgono alle (5')) sono effettivamente, nell'ipotesi ammessa che manchino le forze, necessarie e sufficienti per la corrispondenza fra i due sistemi (A) ed (A_1).

Le identità (5'') equivalgono alle relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^j_{rs} = a^j_{rs} \qquad (\text{per } j \gtrless r,\ s) \\ &\alpha^r_{rs} = a^r_{rs} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s} \qquad (\text{per } r \gtrless s), \qquad (r,\ s,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n) \\ &\alpha^r_{rr} = a^r_{rr} - \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s}, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

le quali, tenuto conto delle espressioni effettive spettanti alle α^j_{rs}, a^j_{rs}, *sono* *precisamente le equazioni differenziali, che legano i coefficienti della forza viva di due sistemi corrispondenti, quando non agiscono forze: Si passa in questo caso dall'uno all'altro di essi mediante la trasformazione* $d\,t_1 = \frac{dt}{\mu}$, *la funzione* μ *essendo quella stessa, che compare nelle* (8).

§ 5. Sistemi corrispondenti, in cui non tutte le forze sono nulle.

Riprendiamo le equazioni (5), il cui identico sussistere porge nel caso generale la condizione di corrispondenza fra i due sistemi (A) ed (A_1): Ponendo in esse per f^{-2} e $\frac{df}{dt}$ i loro valori (6) e (7) ed esprimendo che si annullano i termini indipendenti dalle velocità, ne abbiamo già ricavato le (8): Ora ci gioverà, tenuto conto delle (8), esprimere che si debbono annullare i termini lineari nelle velocità. Solo quando, a mezzo di queste equazioni, avremo un po' semplificate le (6) e (7), riescirà vantaggiosa la effettiva sostituzione dei valori di f^{-2} e $\frac{df}{dt}$ per dedurre le relazioni definitive.

I termini lineari di una generica (5) sono: $2\,\Xi^j \mu^{-2} \sum_1^n{}_r c_r\, x'_r + x'_j \sum_1^n{}_r c_r X^r$, e, se usando come s'è detto delle (8), si esprimerà che sono identicamente nulli, avremo:

$$2\,X^j \sum_1^n{}_r c_r\, x'_r + x'_j \sum_1^n{}_r c_r X^r \equiv 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde:

$$2\,X^j c_r = 0 \qquad (j \gtrless r)$$

$$2\,X^j c_j + \sum_1^n{}_r c_r X^r = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Siccome non tutte le forze sono nulle, una almeno delle X^j, poniamo X^i dovrà essere differente da zero; ma allora da $X^i c_r = 0 (i \gtrless r)$, segue che tutte le c_r, ad eccezione forse di c_i, si annullano; dopo ciò le equazioni del secondo gruppo si riducono unicamente a $c_i X^i = 0$, donde $c_i = 0$ e quindi effettivamente le singole c_r sono nulle. Tenendo conto di questa semplificazione, la (6) e la (7) divengono:

$$f^{-2} = \mu^{-2} \left\{ 1 - \sum_1^n{}_{rs} c_{rs}\, x'_r x'_s + \mathfrak{Z} \right\} \tag{6'}$$

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_1^n{}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \sum_1^n{}_{rs} c_{rs}\, x'_r X^s + \mathfrak{P}; \tag{7'}$$

le (5), portandovi ormai questi valori di f^{-2} e $\frac{df}{dt}$, e intendendo sostituite le Ξ^j con $\mu^2 X^j$, si scindono nelle:

$$x'_j \sum_1^n{}_r\, x'_r \left\{ \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} + \sum_1^n{}_s\, c_{rs} X^s \right\} + \sum_1^n{}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} + X^j c_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0 \qquad (9)$$

$$(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

$$x'_j \mathbf{2} - X^j \mathbf{3} \equiv 0,$$

e quest'ultime (si constata agevolmente), equivalgono alla lor volta a:

$$\mathbf{2} \equiv 0, \qquad \mathbf{3} \equiv 0,$$

di guisa che le condizioni necessarie e sufficienti per la corrispondenza fra i sistemi (A) ed (A_1) si trovano ora espresse dalle (9), $\mathbf{2} \equiv 0$, $\mathbf{3} \equiv 0$.

Vogliamo proporci di attribuire ad esse una forma più utile. Cominciamo per ciò dall'osservare che le (6'), (7'), in causa delle $\mathbf{2} \equiv 0$, $\mathbf{3} \equiv 0$, divengono:

$$f^{-2} = \mu^{-2} \left\{ 1 - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r x'_s \right\} \qquad (10)$$

$$\frac{d \log f}{dt} = \frac{d \log \mu}{dt} + \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r X^s, \qquad (11)$$

e che la funzione f delle $2n$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, definita dalla (10), non soddisfa (come si vedrebbe derivando e rimpiazzando le derivate seconde coi loro valori (A')) identicamente alla (11), per modo che, esprimendo appunto che la (11) è conseguenza della (10), si troverebbero alcune relazioni tra le funzioni c_{rs}, X^s e μ.

D'altra parte, *supposte queste relazioni*, le (3) esprimono precisamente che, per la funzione f definita dalla (10), il cambiamento di variabile $dt_1 = \frac{dt}{f}$ riconduce il sistema (A_1) al sistema (A). Dunque: *l'insieme delle relazioni risultanti dal confronto delle* (10), (11) *e l'identico sussistere delle* (9) *sono condizioni non solo necessarie, ma altresì sufficienti per la corrispondenza fra i sistemi* (A) *ed* (A_1): *Di più si passa da* (A_1) *ad* (A) *mediante il cambiamento di variabile:* $dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2} \left\{ 1 - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r x'_s \right\}$.

Io non posso ora intrattenermi a stabilire la forma effettiva delle accennate condizioni, volendo dedicare il presente lavoro allo studio dei sistemi corrispondenti privi di forze: Ho voluto però dedurre questo primo risultato, perchè, se, come ebbi ad esprimere il desiderio, mi sarà dato di tornare sull'argomento, potrò addirittura prendere le mosse dalle equazioni (9), (10), (11).

§ 6. Forma invariantiva delle equazioni (8). Integrale quadratico.

Considereremo d'ora innanzi esclusivamente il caso, in cui non agiscono forze.

Una prima conseguenza utile a ricavarsi dalle equazioni (8) è l'espressione della funzione μ, per mezzo dei discriminanti a e α relativi alle forze vive dei due sistemi.

Ricordando le posizioni del § 3, si ha:

$$\alpha^r{}_{rs} = \sum_1^n{}_i \alpha^{(ri)} \alpha_{rs,i} = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \alpha^{(ri)} \left\{ \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i} \right\};$$

quindi, sommando rispetto ad r:

$$\sum_1^n{}_r \alpha^r{}_{rs} = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_{ir} \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{1}{2} \sum_1^n{}_{ir} \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{1}{2} \sum_1^n{}_{ir} \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i},$$

e, siccome il secondo e il terzo termine si elidono, così resterà:

$$\sum_1^n{}_r \alpha^r{}_{rs} = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_{ir} \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \alpha}{\partial x_s};$$

in modo analogo: $\sum_1^n{}_r a^r{}_{rs} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log a}{\partial x_s}$, e per conseguenza:

$$\sum_1^n{}_r \left\{ a^r{}_{rs} - \alpha^r{}_{rs} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \log\left(\frac{a}{\alpha}\right).$$

Ora il primo membro, tenendo conto dei due ultimi gruppi delle equazioni (8), si riduce a $\frac{n+1}{2} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s}$, per cui si ottiene:

$$\frac{n+1}{2} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \log\left(\frac{a}{\alpha}\right) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

e da queste:

$$\mu = C \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{12}$$

dove C designa una costante arbitraria.

Il valore (12) di μ, quantunque notevole per la sua semplicità, non presenta dal nostro punto di vista un particolare interesse, poichè noi intendiamo di riprendere le (8), come stanno, senza sostituirvi per μ il suo valore; la (12) vi si trova del resto implicitamente compresa.

Prima di passare alla effettiva trasformazione delle equazioni (8), sarà opportuno che io ricordi come, data una forma differenziale quadratica fondamentale $\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ e un sistema qualsiasi

$$A_{r_1 r_2 \ldots r_m}, \quad (r_1, r_2, \ldots, r_m = 1, 2, \ldots, n),$$

(che si dice d'ordine m) di n^m funzioni (distinte o no) dalle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il sistema d'ordine $m+1$:

$$A_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial A_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_j a^j_{r_l r_{m+1}} A_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} j r_{l+1} \ldots r_m}, \tag{Ω}$$

$$(r_1, r_2, \ldots, r_m, r_{m+1} = 1, 2, \ldots, n),$$

venne chiamato dal prof. Ricci (*) *derivato covariante del primo, secondo la forma fondamentale* φ: L'operazione, per cui da un sistema d'ordine m $A_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ si passa al sistema $A_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ d'ordine $m+1$, definito da (Ω), dicesi *derivazione covariante secondo* φ (rispetto alla generica variabile $x_{r_{m+1}}$); *essa possiede le caratteristiche esteriori della derivazione ordinaria (in quanto ciascuna funzione di qualunque sistema dà luogo a n derivate) e, come ha mostrato il prof.* Ricci *anche tutte le proprietà algoritmiche, tranne la permutabilità degli indici, cioè delle derivazioni.*

Segue in particolare dalle (Ω) che, se il sistema si riduce ad un'unica funzione μ, le sue derivate covarianti μ_r coincidono colle derivate ordinarie $\frac{\partial \mu}{\partial x_r}$; di più, derivando covariantemente il sistema μ_r, non si trovano in generale le derivate seconde ordinarie della funzione μ, ma valgono però le relazioni $\mu_{rs} = \mu_{sr}$.

Si ha, per le derivate covarianti α_{rst} (da non confondersi colle $\alpha_{rs,t}$) di un sistema doppio α_{rs}:

$$\alpha_{rst} = \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n {}_j \left\{ a^j_{rt} \alpha_{js} + a^j_{ts} \alpha_{rj} \right\}, \tag{Ω'}$$

(*) Veggasi in particolare il suo *Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique.* Bulletin des Sciences Mathématiques, 1892.

le quali, applicate al caso speciale dei coefficienti di φ, permetterebbero dopo facile calcolo di concludere che le loro derivate covarianti sono identicamente nulle.

Questo breve richiamo ci pone in grado di adoperare con maggior disinvoltura talune denominazioni e taluni procedimenti, che non sono forse finora, come sarebbe desiderabile, divenuti abbastanza d'uso comune.

Intenderemo assunta come forma fondamentale φ la

$$ds^2 = 2\,T\,d\,t^2 = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, d\,x_r\, d\,x_s,$$

e designeremo talvolta ancora con φ una qualunque varietà, di cui

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, d\,x_r\, d\,x_s,$$

rappresenti il quadrato dell'elemento lineare.

Ritenuto ciò, notiamo che dalle posizioni del § 3 si ricava senza difficoltà:

$$\alpha_{rt,s} + \alpha_{ts,r} = \frac{\partial\,\alpha_{rs}}{\partial\,x_t}$$

$$\alpha_{rt,s} = \sum_1^n {}_j\, \alpha^j{}_{rt}\, \alpha_{js}$$

$$\alpha_{st,r} = \sum_1^n {}_j\, \alpha^j{}_{st}\, \alpha_{rj},$$

e quindi:

$$\frac{\partial\,\alpha_{rs}}{\partial\,x_t} - \sum_1^n {}_j \left\{ \alpha^j{}_{rt}\, \alpha_{js} + \alpha^j{}_{st}\, \alpha_{rj} \right\} = 0.$$

Se in queste identità si sostituiscono per $\alpha^j{}_{rt}$ e $\alpha^j{}_{st}$ i loro valori offerti dalle (8), si trae (*):

$$\frac{\partial\,\alpha_{rs}}{\partial\,x_t} - \sum_1^n {}_j \left\{ a^j{}_{rt}\, \alpha_{js} + a^j{}_{st}\, \alpha_{rj} \right\} + \alpha_{rs}\, \frac{\partial \log \mu}{\partial\,x_t} + \frac{1}{2}\, \alpha_{rt}\, \frac{\partial \log \mu}{\partial\,x_s} + \frac{1}{2}\, \alpha_{ts}\, \frac{\partial \log \mu}{\partial\,x_r} = 0,$$

ossia, in virtù delle (Ω') e di osservazioni fatte testè:

$$\mu\,\alpha_{rst} + \mu_t\,\alpha_{rs} + \frac{1}{2}\left\{ \mu_r\,\alpha_{ts} + \mu_s\,\alpha_{rt} \right\} = 0, \qquad (r,\ s,\ t = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{13}$$

(*) Nell'eseguire la sostituzione, conviene considerare separatamente i vari casi: r ed s entrambi diversi da t; $r = t$, ma $s \gtrless t$, o viceversa; $r = s = t$. Il risultato si può però sempre rappresentare mediante la formula sopra riportata.

Queste equazioni di forma invariantiva equivalgono completamente alle (8), perchè seguono da esse, sono in egual numero e certamente indipendenti, in quanto porgono tutte le derivate prime delle α_{rs} definite per mezzo delle α_{rs} stesse, della funzione ausiliaria μ e, si intende, dei coefficienti della forma fondamentale. Del resto dalle (13) si può immediatamente risalire alle (8).

Le (13), moltiplicate per μ, ricordando quanto si è detto circa i calcoli con derivate covarianti, possono essere scritte:

$$(\mu^2 \alpha_{rs})_t + \frac{1}{2}\left\{\mu^2 \alpha_{ts}\frac{\mu_r}{\mu} + \mu^2 \alpha_{rt}\frac{\mu_s}{\mu} - \mu^2 \alpha_{rs}\frac{\mu_t}{\mu}\right\} = 0,$$

ovvero, col porre $\mu^2 \alpha_{rs} = A_{rs}$:

$$A_{rst} + \frac{1}{2}\left\{A_{ts}\frac{\mu_r}{\mu} + A_{rt}\frac{\mu_s}{\mu} - A_{rs}\frac{\mu_t}{\mu}\right\} = 0;$$

eseguendo sugli indici r, s, t le due permutazioni circolari $\begin{pmatrix} s\,t\,r \\ r\,s\,t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t\,r\,s \\ r\,s\,t \end{pmatrix}$ e sommando le equazioni relative, si ottiene:

$$A_{rst} + A_{str} + A_{trs} = 0, \tag{14}$$

le quali ci dicono che il sistema A_{rst}, derivato covariante di A_{rs} secondo φ, è *emisimmetrico*, e quindi (*) che:

$$\sum_1^n {}_{rs} A_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$$

è un integrale primo per il sistema (A).

Di qua il teorema (**):

Se un sistema (A) *privo di forze ammette un corrispondente* (A_1), *la cui forza viva sia*: $T_1 = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} \bar{x}'_r \bar{x}'_s$, *l'equazione* $\sum_1^n {}_{rs} A_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$, *cioè per la* (12):

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.},$$

porge un integrale primo per il sistema (A).

È manifesto che, assumendo a forma fondamentale $ds_1^2 = \sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} dx_r dx_s$,

---

(*) Cfr. la mia Nota: *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche.*

(**) PAINLÉVÉ, Mem. cit., pag. 43.

si troverebbe in modo analogo l'integrale primo:

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, \bar{x}'_r\, \bar{x}'_s = \text{cost.},$$

per il sistema (A_1).

Possiamo aggiungere col sig. Painlévé che, se (A_1) *non è un corrispondente ordinario di* (A), se cioè le α_{rs} *non* hanno la forma $\alpha_{rs} = C a_{rs}$, (con C costante), l'integrale $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$, è certamente distinto dall'integrale delle forze vive $\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$ Basta osservare perciò che, qualora questi due integrali coincidessero, dovrebbe essere $a_{rs} = C_1 \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \alpha_{rs}$ (con C_1 costante), da cui: $a = C_1^n \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2n}{n+1}} \alpha$; ossia sarebbe costante $\frac{a}{\alpha}$ e quindi costanti altresì i singoli rapporti $\frac{\alpha_{rs}}{a_{rs}}$.

Non sarà inopportuno avvertire che i risultati di questo paragrafo e alcune altre osservazioni (*), ommesse per brevità, si potranno a suo tempo ricavare come ovvie conseguenze della riduzione a tipi delle coppie di sistemi corrispondenti.

§ 7. Considerazioni algebriche sul sistema di due forme quadratiche.

Associamo ai coefficienti a_{rs} della nostra forma fondamentale φ un altro sistema di funzioni α_{rs} parimenti doppio e simmetrico, come ad esempio (sarà, si prevede, il caso, cui dovremo più innanzi riferirci) i coefficienti della forza viva T_1.

L'equazione:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \rho a_{11} & \alpha_{12} - \rho a_{12} \dots & \alpha_{1n} - \rho a_{1n} \\ \alpha_{21} - \rho a_{21} & \alpha_{22} - \rho a_{22} \dots & \alpha_{2n} - \rho a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} - \rho a_{n1} & \alpha_{n2} - \rho a_{n2} \dots & \alpha_{nn} - \rho a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)$$

(*) Painlévé, Mem. cit., pag. 43.

ammette, come si sa, per essere positiva la forma quadratica $\sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$, n radici essenzialmente reali $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, che possono però non essere tutte distinte: Comunque, corrispondentemente ad ogni radice semplice ρ_h della (15), esiste uno ed un solo sistema $\lambda_h^{(s)} (s = 1, 2, \ldots, n)$, che soddisfa alle equazioni lineari ed omogenee:

$$\sum_1^n{}_s (\alpha_{rs} - \rho\, a_{rs}) z_s = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

e di più alla condizione:

$$\sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, z^r z^s = 1.$$

Se invece alcune ρ, poniamo $\rho_{q_1}, \rho_{q_2}, \ldots, \rho_{q_m}$, in nùmero di m, coincidono tra loro ed hanno il valore comune σ, considerando ancora il sistema di equazioni lineari $\sum_1^n{}_s (\alpha_{rs} - \rho\, a_{rs}) z^s = 0$, sempre per essere positiva la forma φ, si può stabilire (*) che esso, quando vi si faccia $\rho = \sigma$, ammette m sistemi $z_i^s (i = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots, n)$ di soluzioni indipendenti. Ne viene che anche le:

$$\lambda_h^{(s)} = \sum_1^m{}_i\, \partial_{hi}\, z_i^s, \qquad (h = q_1, q_2, \ldots, q_m),$$

(dove le ∂ sono quantità arbitrarie a determinante non nullo) porgono m sistemi di soluzioni indipendenti ed è chiaro che le ∂ si possono (e in $\infty^{\frac{m(m-1)}{2}}$ modi) prendere in maniera che le $\lambda_h^{(s)}$ soddisfacciano alle $\frac{m(m+1)}{2}$ condizioni:

$$\sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} = \varepsilon_{hk}, \qquad (h, k = q_1, q_2, \ldots, q_m),$$

dove il simbolo ε_{hk} rappresenta lo zero o l'unità, secondochè gli indici h e k sono distinti, o coincidono.

Supponendo di fissare effettivamente per le ∂ un sistema qualunque (ma determinato una volta per sempre) di valori, che verifichino le accennate condizioni, e intendendo di ripetere la stessa cosa per ogni radice multipla

(*) Weierstrass, *Ueber ein Theorem die homogenen Functionen der 2ten Grades betreffend, ecc.* Monatsberichte der Ak. zu Berlin, 1858, pag. 207.

della (15), ci troveremo infine a possedere n sistemi semplici di funzioni $\lambda_h^{(s)}(h=1,2,\ldots,n;\ s=1,2,\ldots,n)$ tali che:

1.° Ciascun sistema $\lambda_h^{(s)}(s=1,2,\ldots,n)$, per $\rho=\rho_h$, soddisfa alle equazioni (16).

2.° Si hanno le relazioni simultanee:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\lambda_h^{(s)}\lambda_k^{(r)}=\varepsilon_{hk}, \qquad (h,\ k=1,2,\ldots,n). \tag{17}$$

Quest' ultima asserzione è giustificata da condizioni imposte esplicitamente alle λ, quando $h=k$ e quando h e k sono indici di radici coincidenti; se poi h e k corrispondono a due radici distinte della (15), allora si mostra, come di solito, che $\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\lambda_h^{(s)}\lambda_k^{(r)}=0$, partendo dalle:

$$\sum_1^n {}_s(\alpha_{rs}-\rho_h a_{rs})\lambda_h^{(s)}=0$$

$$\sum_1^n {}_s(\alpha_{rs}-\rho_k a_{rs})\lambda_k^{(s)}=0,$$

e sottraendole l'una dall'altra, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\lambda_k^{(r)}$, $\lambda_h^{(r)}$ e sommate rispetto all'indice r.

Pongasi ora:

$$\lambda_{h|r}=\sum_1^n {}_s\, a_{rs}\lambda_h^{(s)}; \qquad (h,\ r=1,2,\ldots,n), \tag{18}$$

potremo scrivere le (17) sotto la forma:

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_k^{(r)}\lambda_{h|r}=\varepsilon_{hk}, \qquad (h,\ k=1,2,\ldots,n), \tag{17'}$$

da cui si deduce in primo luogo che il determinante:

$$\Lambda=\begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \lambda_1^{(n)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \lambda_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n^{(1)} & \lambda_n^{(2)} & \lambda_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

non è zero e quindi che le $\lambda_{h|r}$, testè definite, sono gli elementi reciproci (*) delle $\lambda_h^{(r)}$ in Λ.

(*) Cioè i minori complementari divisi pel valore del determinante.

Ne consegue che, insieme alle (17'), sussistono pure le relazioni:

$$\sum_1^n{}_h \lambda_h^{(s)} \lambda_{h|r} = \varepsilon_{rs}, \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{17''}$$

le quali, confrontate colle (18), danno:

$$a_{rs} = \sum_1^n{}_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|s}, \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{18'}$$

e permettono di ricavare dalle (16) le:

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n{}_h \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|s}\ (*), \qquad (r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{16'}$$

Quest'ultimo gruppo di equazioni costituirà il nostro punto di partenza per l'ulteriore trasformazione del sistema (13). Occorre tuttavia qualche sviluppo preliminare, inteso ad introdurre quegli elementi geometrici, che ci saranno precipuo mezzo di indagine.

§ 8. Cenno di una interpretazione geometrica nel campo differenziale (**).

Gli n sistemi di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dx_1}{\lambda_h^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda_h^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{\lambda_h^{(n)}}, \qquad (h = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

definiscono nella varietà φ altrettante congruenze di linee, ciascuna delle quali si può perciò risguardare individuata dal sistema di funzioni $\lambda_h^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ o, ciò, che è poi lo stesso, in causa delle (18), dal sistema $\lambda_{h|r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, che chiameremo *sistema coordinato covariante della congruenza stessa.* Le (17) esprimono che *le n congruenze, così introdotte, sono ortogonali fra loro nella varietà φ.*

(*) Avremmo potuto dedurre immediatamente le formule (16') e (18') da note proposizioni di Weierstrass sull'equivalenza dei sistemi di forme quadratiche; abbiamo tuttavia preferita una concisione minore, per mettere in evidenza il legame tra le λ e l'equazione (15).

(**) Le nozioni sommarie di questo paragrafo (limitate a quanto ci parve indispensabile per l'intelligenza dei successivi) sono tolte per intero dalla Nota del prof. Ricci *Sulla teoria degli iperspazii*, accennata già nell'introduzione.

Per poterne rilevare i caratteri geometrici più salienti (curvature, torsioni, ecc.), conviene però prendere in esame anche i differenziali di secondo ordine, e quindi le derivate delle funzioni λ. Ciò si farà nel modo migliore, derivando covariantemente ciascun sistema $\lambda_{h|r}$ e ponendo:

$$\lambda_{h|rs} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \gamma_{hij} \lambda_{i|r} \lambda_{j|s}, \qquad (h, r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

la qual cosa è certamente possibile, perchè (in causa delle (17')) le (19) equivalgono a:

$$\gamma_{hij} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_{h|rs} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)}, \qquad (h, i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{19'}$$

Le n^3 funzioni γ si riducono a $n \dfrac{n(n-1)}{2}$ algebricamente distinte, poichè, derivando le (17) (o se si vuole le (17')), che sono in numero di $\dfrac{n(n+1)}{2}$, scaturiscano $n \dfrac{n(n+1)}{2}$ relazioni, che legano le $\lambda_{h|r}$, $\lambda_{h|rs}$, e quindi le $\lambda_{h|r}$ alle γ.

Queste relazioni tra le γ si possono stabilire immediatamente, applicando, secondo i cánoni del calcolo differenziale assoluto (*), la derivazione covariante alle (17'), e confrontando colle (19). Si trova (appunto per il modo felice, con cui le γ vennero scelte) la forma semplicissima:

$$\gamma_{hkj} + \gamma_{khj} = 0, \tag{20}$$

da cui in particolare:

$$\gamma_{hhj} = 0.$$

Le γ hanno ciascuna un significato cinematico molto notevole, che io lascierò tuttavia di rilevare, non dovendone far uso. Per lo scopo nostro ha invece importanza capitale la proposizione seguente:

Affinchè la congruenza $\lambda_{h|r} (r = 1, 2, \ldots, n)$ *sia normale, affinchè cioè le linee della congruenza sieno le traiettorie ortogonali di una famiglia di superfici* (ad $n-1$ dimensioni della varietà φ) *è necessario e basta che sieno soddisfatte le* $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ *condizioni:*

$$\gamma_{hkj} = \gamma_{hjk}, \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n).$$

(*) Ricci, *Résumé, etc.*, o, per maggior dettaglio: *Di alcune applicazioni del calcolo differenziale assoluto.* Atti dell'Istituto Veneto, 1893.

Ommetteremo anche la dimostrazione di questo teorema, per non dilungarci soverchiamente in particolari, solo indirettamente collegati colla nostra ricerca; notiamo piuttosto il corollario:

Se le condizioni $\gamma_{hkj} = \gamma_{hjk} (j, k = 1, 2, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n)$ *sono soddisfatte per qualunque valore di h, nella quale ipotesi, a causa delle* (20), *le* γ *con tre indici distinti sono tutte nulle, le* n *congruenze* $\lambda_{h|r}$ *risultano dalle mutue intersezioni di un sistema ennuplo ortogonale di superficî.*

§ 9. Trasformazione delle equazioni (13). Classificazione delle coppie di sistemi corrispondenti.

Come abbiamo già accennato, prenderemo le mosse dalle equazioni (16'): Derivandole covariantemente e designando con $\rho_{h|t} (t = 1, 2, \ldots, n)$ le derivate (covarianti o, se si vuole, ordinarie) della funzione ρ_h, si trae:

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n {}_h \left\{ \rho_{h|t} \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \rho_h \lambda_{h|rt} \lambda_{h|s} + \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|st} \right\},$$

cioè, approfittando delle (19):

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n {}_h \rho_{h|t} \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|s} \lambda_{i|r} \lambda_{j|t} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|r} \lambda_{i|s} \lambda_{j|t}.$$

Se ora si portano nelle (13) questi valori delle α_{rst} e si sostituiscono parimenti alle α_{rs} le loro espressioni (16'), si ottiene il sistema di equazioni:

$$\mu \left\{ \sum_1^n {}_h \rho_{h|t} \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|s} \lambda_{i|r} \lambda_{j|t} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|r} \lambda_{i|s} \lambda_{j|t} \right\} +$$

$$+ \mu_t \sum_1^n {}_h \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \frac{1}{2} \left\{ \mu_r \sum_1^n {}_h \rho_h \lambda_{h|t} \lambda_{h|s} + \mu_s \sum_1^n {}_h \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|t} \right\} = 0,$$

apparentemente molto complicato, ma che, a mezzo delle (17'), si riconduce, con calcoli ovvii, alla comoda forma seguente:

$$\left. \begin{array}{lr} (\rho_h - \rho_i) \gamma_{hij} = 0 \quad \text{(per ogni terna } h, i, j \text{ di indici distinti)} & (21) \\ (\rho_i - \rho_j) \gamma_{iji} = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_r \frac{\partial \rho_i}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} \quad \text{(per ogni coppia } i, j \text{ di indici distinti)} & (22) \\ \qquad (h, i, j = 1, 2, \ldots, n) & \\ \sum_1^n {}_r \frac{\partial (\mu \rho_i)}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} = 0 \quad \text{(per ogni coppia } i, j \text{ di indici distinti)} & (23) \\ \sum_1^n {}_r \frac{\partial (\mu \rho_i)}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)} = - \rho_i \sum_1^n {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)}. & (24) \end{array} \right\} \text{(E)}$$

Le (21), tenuto conto delle (20), sono $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ distinte, le (22) $n(n-1)$, altrettante le (23), infine le (24) sono n, onde complessivamente abbiamo $\frac{n(n+1)}{2}n$ equazioni, il cui numero coincide intanto con quello delle equazioni (13); non solo, ma il sistema complessivo delle equazioni (E) equivale completamente alle equazioni (13), poichè, come queste, esprime le condizioni necessarie e sufficienti, per la corrispondenza dei due sistemi (A) ed (A_1). E per verità, qualora le a_{rs} e le α_{rs}, che sono gli elementi del problema primitivo, in numero di $n(n+1)$, si risguardino, a tenore delle (16′) e (18′), sostituite dalle ρ_h, $\lambda_{h|r}$ $\Big($che sono $n+n^2$, ma legate dalle $\frac{n(n+1}{2}$ relazioni (17)$\Big)$, e ci si proponga di tradurre in equazioni differenziali tra le ρ e le λ le condizioni di corrispondenza tra i sistemi (A) ed (A_1), si è naturalmente condotti ad adottare il procedimento, testè seguito, e si perviene quindi al sistema (E). D'altra parte poi, ammesse le equazioni (E), si può risalire via via fino alle (13), onde effettivamente i due sistemi si equivalgono, ma si ha per le (E) il duplice vantaggio di una semplicità notevolmente maggiore e di una forma, che meglio si presta all'interpretazione geometrica.

Accingiamoci ormai a classificare le coppie di sistemi corrispondenti.

Assumeremo come criterio di classificazione il numero di radici distinte, possedute dall'equazione (15); si vedrà a suo tempo che questo criterio riesce giustificato da un carattere saliente, proprio di tutte le coppie, per cui l'equazione in ρ ammette uno stesso numero di radici distinte.

Più precisamente converremo di dire che due sistemi corrispondenti (A) ed (A_1) appartengono alla classe o tipo t_m), se l'equazione (15) ad essi relativa possiede $n-m+1$ radici distinte.

Uno sguardo alle equazioni (E) (e più particolarmente alle (21)) ci avverte di questa circostanza notevole che il loro numero non è costante, ma varia da tipo a tipo, anzi più generalmante nell'ambito di ciascun tipo, secondo il modo, con cui sono aggruppate le radici multiple dell'equazione (15). Difatti, quelle tra le (21), che si riferiscono a coppie di radici coincidenti riescono soddisfatte identicamente, quelle invece, che si riferiscono a coppie di radici distinte, portano l'annullarsi delle corrispondenti γ.

Sembrerebbe da ciò che fosse necessario, per lo studio del sistema (E), di considerare separatamente ogni singolo caso; potremo limitarci tuttavia all'esame particolareggiato del tipo t_1) (§ 10) e di una sottoclasse assai semplice del tipo generale t_m) (§ 11), poichè, dopo questi esempi, anche senza sviluppi prolissi e poco istruttivi, si coglie nettamente il risultato definitivo.

§ 10. Sistemi corrispondenti di tipo t_1). Forma canonica. Deduzione degli n integrali quadratici da essi posseduti.

Sieno le n radici $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ dell'equazione (15) tutte diseguali: Le (21) esprimono allora che le singole γ con tre indici distinti sono nulle e quindi (§ 8) che le congruenze $\lambda_{h|r}$ sono normali nella varietà φ. L'esistenza di questa speciale ennupla di famiglie ortogonali di superficie fa sorgere spontaneo il pensiero di servirsene come sistema di riferimento, per indagare a quali sue caratteristiche conduca l'ipotesi della corrispondenza fra (A) ed (A_1). Noi vedremo che, rispetto a quest'ennupla di superficie, il ds^2 di φ e così pure il $ds_1^2 = 2\,T_1\,dt_1^2$ posseggono una forma molto particolare; inoltre che reciprocamente, ammessa la riducibilità di ds e di ds_1 a quella forma, i due sistemi (A) ed (A_1) riescono corrispondenti. Ne verrà che siffatte espressioni degli elementi lineari si potranno risguardare come canoniche per le coppie di sistemi corrispondenti di tipo t_1), nel senso che tutti e soli i ds, ds_1, riducibili simultaneamente (mediante una scelta conveniente del sistema coordinato, cioè mediante un cambiamento di variabili) a quelle forme, saranno tra loro corrispondenti.

Si immagini pertanto di assumere come sistema di riferimento l'ennupla ortogonale sopra menzionata; in luogo dell'espressione generale

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

per la forma fondamentale φ, avremo in questo caso più semplicemente:

$$ds^2 = \sum_1^n {}_i\, H_i^2\, dx_i^2;$$

di più, siccome le linee $\lambda_{h|r}$ coincidono colle intersezioni delle superficie coordinate $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_{h-1} = 0$, $x_{h+1} = 0, \ldots, x_n = 0$, così, tenuto conto delle equazioni differenziali (§ 8), che definiscono la congruenza e delle (17), troveremo immediatamente:

$$\lambda_h^{(r)} = \frac{\varepsilon_{hr}}{H_h}, \qquad (h,\ r = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

e quindi, per le (18):

$$\lambda_{h|r} = \varepsilon_{hr} H_h, \qquad (h,\ r = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Derivando covariantemente queste espressioni delle $\lambda_{h|r}$ rispetto alla forma fondamentale φ (che è ora $\sum_1^n i\, H_i^2\, dx_i^2$) e calcolando le γ per mezzo delle (19'), si può intanto verificare che, come è necessario per le premesse, le γ con tre indici distinti sono tutte nulle e si ottiene poi subito:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \qquad (i \gtrless j).$$

Dopo ciò, il primo gruppo delle (E) riesce identicamente soddisfatto e gli altri divengono ordinatamente:

$$(\rho_i - \rho_j) \frac{\partial \log H_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j) \tag{22$_1$}$$

$$\frac{\partial (\mu \rho_i)}{\partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j) \qquad (i,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{23$_1$}$$

$$\frac{\partial (\mu \rho_i)}{\partial x_i} = -\rho_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i}. \tag{24$_1$}$$

Se si nota che, in causa delle (16'), la espressione del ds_1^2 del sistema (A_1), rispetto all'ennupla ortogonale, cui ora ci riferiamo, è:

$$ds_1^2 = \sum_1^n i\, \rho_i H_i^2\, dx_i^2,$$

potremo dire che le (22$_1$), (23$_1$), (24$_1$) determinano quali relazioni (per una conveniente scelta delle superficie coordinate) debbono passare fra i coefficienti delle forze vive di due sistemi (A) ed (A_1), affinchè essi appartengono al tipo t_1).

Le equazioni, scritte or ora, si integrano senza difficoltà; in primo luogo le (23$_1$) equivalgono a:

$$\mu \rho_i = \frac{1}{\psi_i}, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{23$'_1$}$$

designandosi con ψ_i una funzione della sola variabile x_i (*); mediante le $(23'_i)$, si ha poi dalle (24_i):

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \log \psi_i}{\partial x_i},$$

ossia:

$$\mu = \frac{\psi_1 . \psi_2 \ldots \psi_n}{C}, \tag{24'_1}$$

con C costante.

Per integrare le (22_i), sostituiamovi al posto di ρ_i, ρ_j i loro valori

$$\frac{C}{\psi_i(\psi_1 . \psi_2 \ldots \psi_n)}, \qquad \frac{C}{\psi_j(\psi_1 . \psi_2 \ldots \psi_n)};$$

esse diverranno:

$$(\psi_j - \psi_i)\frac{\partial \log H_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} = 0,$$

da cui:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j} \text{ (**)},$$

e per conseguenza:

$$H_i^2 = F_i \prod_1^n{}'_j (\psi_j - \psi_i),$$

dove F_i rappresenta una funzione della sola x_i e nel fattoriale $\prod_1^n{}'_j$ si esclude il valore i dell'indice j. Non sarà male osservare che, essendo H_i^2 quantità essenzialmente positiva, lo stesso deve accadere del prodotto $F_i \prod_1^n{}'_j(\psi_j - \psi_i)$ e che quindi si può senz'altro attribuirgli la forma:

$$H_i^2 = V_i^2 \prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|,$$

(*) Per la natura del problema, che noi studiamo, è lecito scrivere $\frac{1}{\psi_i}$, senza lasciarci sfuggire alcun caso particolare. Infatti il prodotto $\mu \rho_i$ è essenzialmente diverso da zero, poichè nè $\mu = \frac{dt}{dt_1}$, ne ρ_i possono annullarsi (quest'ultima in quanto il termine noto della (15) è $\alpha > 0$).

(**) Passando dalla formula precedente a questa, abbiamo potuto dividere senza riserve per $\psi_j - \psi_i$, poichè, nel caso, che ora consideriamo, tutte le radici sono diseguali e, per le $(23'_1)$, da $\rho_i \gtrless \rho_j$ segue necessariamente $\psi_i \gtrless \psi_j$.

essendo evidentemente $V_i^2 = \pm F_i$, secondochè il prodotto $\prod_1^n{}'_j(\psi_j - \psi_i)$ è positivo o negativo.

Se si immagina di eseguire nei parametri x_i delle superficie coordinate la trasformazione: $\xi_i = \int V_i dx_i$ e si ripone poi x_i e dx_i per ξ_i e $d\xi_i$, si perviene agevolmente alla conclusione che agli elementi lineari ds, ds_1 di due sistemi (A), (A$_1$) corrispondenti di tipo t_1) è possibile attribuire simultaneamente le espressioni:

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i \left(\prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2, \tag{25}$$

$$ds_1^2 = \frac{C}{\psi_1 . \psi_2 \dots \psi_n} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\psi_i} \left(\prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2. \tag{26}$$

D'altra parte poi, se i coefficienti delle (25) (26) si sostituiscono nelle originarie equazioni di condizione (8) (cfr. § 4), si prova nel modo più spiccio che due sistemi (A) (A$_1$), i cui elementi lineari sieno riducibili alle forme (25) (26), sono corrispondenti (e, si intende, di tipo t_1)). Dunque le espressioni (25) (26) sono canoniche e si può, nel caso considerato, riportare ad esse esclusivamente lo studio dei sistemi corrispondenti.

Una prima circostanza degna di nota è che, per ogni forza viva del tipo (25) $T = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \left(\prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) x'^2_i$, le equazioni delle geodetiche (A) (e quindi analogamente le (A')) si sanno integrare per sole quadrature col metodo classico della separazione delle variabili.

Altro fatto, che vogliamo porre in rilievo si è che, dato un ds della forma (25), le funzioni ψ si possono ritenere determinate *solo a meno di una costante additiva* c, talchè, quando si vogliono invece considerare le ψ come funzioni completamente individuate, le (25) (26) vanno interpretate come segue: *Per la corrispondenza di tipo* t_1) *fra* (A) *ed* (A$_1$) *è necessario e basta che i rispettivi* ds, ds_1 *equivalgano* (cioè sieno riconducibili mediante trasformazione di variabili) *a:*

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i \left(\prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2, \tag{25}$$

$$ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)(\psi_2 + c) \dots (\psi_n + c)} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\psi_i + c} \left(\prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2, \tag{26'}$$

dove le ψ sono funzioni della sola variabile accennata dall' indice, C e c costanti arbitrarie (*).

Questa osservazione che ogni ds della forma (25) ammette come corrispondenti tutti i ds_1, che rientrano nel tipo (26'), *qualunque sia il valore della costante* c, reca immediatamente una conseguenza importante per *ogni* coppia di sistemi corrispondenti t_1), permettendo di stabilire per ciascuno di essi la esistenza di n integrali quadratici distinti.

Si ricordi a tale proposito (§ 6) che in generale:

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, x'_r x'_s = \text{cost.},$$

è un integrale primo del sistema (A), onde, applicando il teorema al caso presente, si può senz'altro asserire che, *per ogni valore di* c, l'equazione:

$$\sum_{1}^{n}{}_i (\psi_1 + c)\ldots(\psi_{i-1} + c)(\psi_{i+1} + c)\ldots(\psi_n + c)\left(\prod_{1}^{n}{}'_j \,|\psi_j - \psi_i|\right) x'^2_i = \text{cost.},$$

è integral primo del sistema (A).

Ne viene che i coefficienti delle singole potenze di c sono costanti ciascuno separatamente e quindi dan luogo ad altrettanti integrali: Entrando la c al grado $n-1$, nascono così n integrali quadratici, i quali, come si può verificare, per essere le ψ tutte distinte, sono effettivamente tra loro indipendenti.

Riassumendo adunque, le coppie di sistemi corrispondenti di tipo t_1) sono caratterizzate dalla riducibilità dei loro elementi lineari alle forme canoniche (25) (26'); ciascuno dei due sistemi possiede n integrali quadratici indipendenti: Inoltre, per ogni dato sistema (A), se ne possono trovare tutti i corrispondenti (A_1) di tipo t_1), poichè, determinate, quando esistono, tutte le forme (25) (che si possono chiamare *forme generalizzate di* LIOUVILLE), di

(*) Le forme (25) (26') di due sistemi corrispondenti sono già state considerate a titolo di esempio dal signor R. LIOUVILLE nella Memoria citata e dai signori G. DI PIRRO e G. PICCIATI nelle Note: *Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica,* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1895; e *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica in alcuni casi particolari,* Atti dell'Ist. Veneto, 1896: Tutti e tre questi autori arrivano alle forme (25) (26'), studiando il caso particolare della corrispondenza fra due sistemi ortogonali (chiamando così due (A), (A_1), le cui forze vive contengono soltanto i quadrati delle velocità). Il punto di vista, sotto cui noi le abbiamo ritrovate, è manifestamente molto più generale.

cui è suscettibile l'elemento lineare ds del sistema proposto (A), per ciascuna di esse, la (26') porge in modo esplicito tutti i ds_1 corrispondenti e mostra che essi dipendono da due costanti arbitrarie.

Resterebbe a studiare quante e quali forme di Liouville competono effettivamente ad una data varietà secondo la natura del suo elemento lineare, problema, che, per $n = 2$, è stato risoluto completamente dal prof. Ricci (*), e per la cui trattazione si hanno oramai nel sistema (E) i necessari elementi.

Non è però nostro proposito di imprendere ricerche di tal natura, perciocchè, malgrado il loro grande interesse e la natura, quasi direi, più intrinseca, rimangono estranee all'intento, che noi abbiamo di mira. È infatti ben naturale, come ho avvertito fin da principio, che si debba ritenere risoluto un problema concernente la trasformazione di equazioni dinamiche, ogniqualvolta lo si sia ricondotto a questioni concrete dell'ordinaria teoria delle forme differenziali quadratiche.

§ 11. Sistemi corrispondenti di tipo t_m) in un caso particolare.

Nell'ipotesi che le radici dell'equazione (15) si riducano a $n - m + 1$ fra loro distinte, vi è ancora un carattere da prendere in considerazione, il modo cioè, con cui sono distribuite le molteplicità delle radici stesse. Noi vogliamo ora riferirci con qualche dettaglio al caso più semplice, quello cioè, in cui $n - m$ tra le radici, poniamo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-m}$ sono semplici e quindi

---

(*) Non sarà forse superfluo di rilevare in qual modo i risultati di questo autore esauriscano, per $n = 2$, il problema della conservazione delle geodetiche.

Il prof. Ricci ha infatti stabilito i criteri per riconoscere se un dato elemento lineare binario è riducibile alla forma di Liouville e più in particolare per riconoscere se esso ammette ∞^4, ∞^2, ∞^1 od anche un solo sistema di Liouville, avendo dimostrato che questi sono i soli casi possibili. Per ciascuno di essi, supposte soddisfatte le volute condizioni, è inoltre indicato in qual modo si possano effettivamente determinare i relativi sistemi di Liouville. La ricerca esige l'integrazione di un sistema completo, quando i sistemi di Liouville sono ∞^4, ∞^2 od ∞^1, appena quadrature nel caso di un solo sistema.

Non parrà strano che io non abbia fatto cenno dell'importante e fondamentale Memoria del signor Koenigs sulle linee geodetiche, quando si pensi che in tutte le sue investigazioni, egli suppone in sostanza l'elemento lineare già ridotto alla forma di Liouville e solo allora ne scruta i caratteri più riposti e ne determina proprietà, per quanto notevoli, estranee pur sempre al problema, che qui ci intrattiene.

la rimanente σ è multipla d'ordine m. Per brevità designeremo con t'_m) una tale sottoclasse del tipo t_m).

Dalle (21) non si potrà, come precedentemente, dedurre che tutte le γ con tre indici distinti sono zero, ma si avrà soltanto:

$$\gamma_{hij} = 0, \tag{27}$$

(per h, i, j distinti e h, i non contemporaneamente maggiori di $n-m$).

Le (27) esprimono intanto immediatamente (§ 8) che le $n-m$ congruenze $\lambda_{h|r}(h=1, 2, \ldots, n-m)$ sono normali. Io dico di più che le famiglie di superficî $f_1 = \text{cost}$, $f_2 = \text{cost}, \ldots, f_{n-m} = \text{cost}$ (di cui le linee λ sono ordinatamente le traiettorie ortogonali) ne ammettono ∞^m, che le tagliano ortogonalmente.

Cominciamo ad osservare che la condizione di ortogonalità (entro la varietà φ) fra due famiglie di superficie $f_h = \text{cost}$, $u = \text{cost}$, ove se ne designino con $f_{h|r}$, $u_r(r=1, 2, \ldots, n)$ le derivate, e si ponga $f_h^{(r)} = \sum_1^n {}_s a^{(rs)} f_{h|s}$, è espressa da:

$$\sum_1^n {}_r f_h^{(r)} u_r = 0,$$

la quale è manifestamente una equazione a derivate parziali del prim'ordine lineare ed omogenea rispetto al parametro u: Per essere le linee $\lambda_{h|r}$ traiettorie ortogonali delle superficie $f_h = \text{cost.}$ e quindi le $\lambda_h^{(r)}$ proporzionali alle $f_h^{(r)}$, si può anche attribuirle la forma:

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0.$$

Ne segue che il sistema simultaneo delle $n-m$ equazioni:

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{28}$$

ammette come integrali tutti e soli i parametri di superficie, che tagliano le $f_h(h=1, 2, \ldots, n-m)$ ortogonalmente.

Per provare il nostro asserto, basterà quindi far vedere che le equazioni (28) costituiscono un sistema completo.

Prendiamo a tale scopo due generiche (28):

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0, \qquad \sum_1^n {}_r \lambda_k^{(r)} u_r = 0,$$

e formiamone la risultante jacobiana, usando però, ciò, che sostanzialmente non reca differenza, la derivazione covariante invece che l'ordinaria. Verrà, secondo le regole del calcolo differenziale assoluto:

$$\sum_1^n{}_r\left(\lambda_{h/rs}\,u^{(r)}+\lambda_h^{(r)}\,u_{rs}\right)=0,\qquad \sum_1^n{}_r\left(\lambda_{k/rs}\,u^{(r)}+\lambda_k^{(r)}\,u_{rs}\right)=0;$$

moltiplicando la prima equazione per $\lambda_k^{(s)}$, la seconda per $\lambda_h^{(s)}$ e sommando rispetto ad s:

$$\sum_1^n{}_{rs}\left\{\lambda_{h/rs}\,\lambda_k^{(s)}\,u^{(r)}+u_{rs}\,\lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\right\}=0$$

$$\sum_1^n{}_{rs}\left\{\lambda_{k/rs}\,\lambda_h^{(s)}\,u^{(r)}+u_{rs}\,\lambda_k^{(r)}\,\lambda_h^{(s)}\right\}=0,$$

da cui, per sottrazione, ove si tenga conto (§ 6) che $u_{rs}=u_{sr}$:

$$\sum_1^n{}_r\,u^{(r)}\left\{\sum_1^n{}_s\,\lambda_{h/rs}\,\lambda_k^{(s)}-\sum_1^n{}_s\,\lambda_{k/rs}\,\lambda_h^{(s)}\right\}=0.$$

Sostituendo per le $\lambda_{h/rs}$, $\lambda_{k/rs}$ i loro valori (19), si passa, dopo facili riduzioni, alla:

$$\sum_1^n{}_r\,u_r\sum_1^n{}_i\left(\gamma_{hik}-\gamma_{kih}\right)\lambda_i^{(r)}=0,$$

e, siccome le γ, che appariscono nella sommatoria interna, hanno il primo indice (h o k) non maggiore di $n-m$, così, in causa delle (27), la risultante jacobiana di $\sum_1^n{}_r\,\lambda_h^{(r)}\,u_r=0$, $\sum_1^n{}_k\,\lambda_k^{(r)}\,u_r=0$ assume l'aspetto definitivo:

$$\gamma_{hkk}\sum_1^n{}_r\,\lambda_h^{(r)}\,u_r-\gamma_{khh}\sum_1^n{}_r\,\lambda_k^{(r)}\,u_r=0,$$

e, riescendo una combinazione lineare delle equazioni primitive, mostra che il sistema (28) è completo.

Esiste dunque nella varietà φ [ogniqualvolta $ds^2=\sum_1^n{}_{rs}\,a_{rs}\,dx_r\,dx_s$ è elemento lineare di un sistema (A), che ammette un corrispondente di tipo t'_m)] un sistema ennuplo di superfici

$$f_1=\text{cost.},\ f_2=\text{cost.},\ldots,\ f_{n-m}=\text{cost.};\ f_{n-m+1}=\text{cost.},\ldots,\ f_n=\text{cost.},$$

così fatto che le prime $n-m$ sono ortogonali fra loro e a ciascuna delle m rimanenti.

Assumendolo a sistema coordinato, avremo per ds una espressione della forma:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m} {}_i H_i^2 dx_i^2 + \sum_{n-m+1}^{n} {}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s;$$

di più $\lambda_h^{(r)} = \frac{\varepsilon_{hr}}{H_h} (h = 1, 2, \ldots, n-m)$, mentre delle $\lambda_{h'}^{(r)} (h' = n - m + 1, \ldots, n)$ potrà dirsi soltanto che $\lambda_{h'}^{(r)} = 0 (r \leqq n - m)$; in ogni modo le (16′) (18′) danno:

$$ds_1^2 = \sum_1^{n-m} {}_i \rho_i H_i^2 dx_i^2 + \sigma \sum_{n-m+1}^{n} {}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s,$$

dove le a'_{rs} coincidono con quelle, che appariscono nell'espressione di ds.

Cerchiamo che cosa divengono le (E) rispetto a questo particolare sistema di riferimento.

Le (23) ci danno in primo luogo, per $i > n - m$:

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial (\mu \sigma)}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde, moltiplicando per $\lambda_{j/s}$ e sommando rispetto ad j:

$$\frac{\partial (\mu \sigma)}{\partial x_s} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

ossia $\mu \sigma = \text{cost.}$; per ragioni di simmetria, designeremo il valore di $\mu \sigma$, che è essenzialmente diverso da zero, con $\frac{1}{\psi_n}$.

Usufruendo di questo primo risultato e tenendo presente che $\lambda_i^{(r)} = 0$ per $r \leqq n - m$, le (24) si riducono, quando $i > n - m$, a:

$$\sum_{n-m+1}^{n} {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)} = 0;$$

moltiplicandole per $\lambda_{i/s}$ e sommando rispetto ad i fra $n - m + 1$ ed n, otteniamo:

$$\sum_{n-m+1}^{n} {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \sum_{n-m+1}^{n} {}_i \lambda_i^{(r)} \lambda_{i/s} = 0.$$

Ma $\lambda_i^{(r)} = 0$, per $i \leqq n - m$, dunque potremo scrivere, al posto della sommatoria interna, $\sum_1^n {}_i \lambda_i^{(r)} \lambda_{i/s} = \varepsilon_{rs}$ e così finalmente deduciamo:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_s} = 0, \qquad (s = n - m + 1, n - m + 2, \ldots, n).$$

Consideriamo ora le rimanenti equazioni (23) e (24), quelle cioè, in cui l'indice i non supera $n-m$. Esse si possono scrivere compendiosamente:

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_r}\lambda_j^{(r)} = -\varepsilon_{ij}\rho_i \sum_1^n {}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_r}\lambda_i^{(r)}, \qquad (i \leq n-m;\ j=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

od anche, moltiplicando per $\lambda_{j|s}$ e sommando rispetto a j:

$$\frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_s} = -\lambda_{i|s}\rho_i \sum_1^n {}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_i}\lambda_i^{(r)}, \qquad (i \leq n-m;\ s=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Come abbiamo già notato, per $i \leq n-m$, $\lambda_i^{(r)} = \frac{\varepsilon_{ir}}{H_i}$; si vede subito che $\lambda_{i|s} = \varepsilon_{is} H_i$, talchè le precedenti equazioni si riducono a:

$$\frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_s} = 0, \qquad (i \leq n-m;\ s \gtrless i),$$

e:

$$\frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_i} = -\rho_i\frac{\partial\mu}{\partial x_i}, \qquad (i \leq n-m).$$

Il primo gruppo porge:

$$\mu\rho_i = \frac{1}{\psi_i}, \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n-m),$$

essendo al solito ogni ψ_i funzione della sola variabile x_i.

Il secondo gruppo, usufruendo delle relazioni $\mu\rho_i = \frac{1}{\psi_i}$, equivale a:

$$\frac{\partial\log\mu}{\partial x_i} = \frac{\partial\log\psi_i}{\partial x_i}, \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n-m),$$

e queste, insieme alle:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_s} = 0, \qquad (s=n-m+1,\ n-m+2,\ldots,\ n),$$

ci conducono all'espressione definitiva del sistema delle (23) (24), cioè:

$$\mu = \frac{1}{C}\psi_1\,.\,\psi_2\ldots\psi_{n-m}\psi_n,$$

$$\rho_i = \frac{C}{\psi_i(\psi_1\,.\,\psi_2\ldots\psi_{n-m}\psi_n)}, \qquad (i \leq n-m),$$

$$\sigma = \frac{C}{\psi_n(\psi_1\,.\,\psi_2\ldots\psi_{n-m}\psi_n)}.$$

Passando ormai alle equazioni (22), sarà bene scinderle in quattro gruppi, secondo i valori degli indici i e j. Per i e j entrambi non superiori ad $n-m$, si ha: $\gamma_{iji} = \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_{i|rs} \lambda_j^{(r)} \lambda_i^{(s)} = \frac{\lambda_{i|ji}}{H_i H_j}$, e, siccome, per definizione:

$$\lambda_{i|ji} = \frac{\partial \lambda_{i|j}}{\partial x_i} - \sum_1^n {}_p\, a_{ij.p}\, \lambda_i^{(p)},$$

ricordando che la forma fondamentale, è:

$$d s^2 = \sum_1^{n-m} {}_i\, H_i^2\, d x_i^2 + \sum_{n-m+1}^n {}_{rs}\, a'_{rs}\, d x_r\, d x_s,$$

si trova subito per $i \gtrless j$:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Le (22) corrispondenti si riducono agevolmente alla forma:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m;\ j \leqq n-m).$$

Supponendo ancora $i \leqq n-m$, ma $j > n-m$, i secondi membri delle (22) si annullano e si ottiene:

$$\gamma_{iji} = 0,$$

ossia, per essere

$$\gamma_{iji} = \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_{i|rs} \lambda_j^{(r)} \lambda_i^{(s)},$$

$\left(\text{eguale nel caso presente a } \frac{1}{H_i} \sum_1^n {}_r\, \lambda_{i|ri} \lambda_j^{(r)}\right)$:

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_{i|ri} \lambda_j^{(r)} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m;\ j > n-m).$$

Coll'artificio già adoperato di moltiplicare per $\lambda_{j|s}$ e sommare rispetto ad j fra $n-m+1$ ed n, osservando poi che la sommatoria si può ritenere estesa fra 1 ed n, deduciamo:

$$\lambda_{i|si} = -\frac{\partial H_i^2}{\partial x_s} = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m;\ s > n-m),$$

in definitiva le equazioni (22) ci danno per $i \leqq n-m$:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j}, \qquad (j \leqq n-m \text{ e diverso da } i),$$

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = 0, \qquad (j > n-m),$$

e quindi, ricordando le osservazioni del precedente paragrafo:

$$H_i^2 = V_i^2 \Pi_1^{n-m}{}'_j \,|\psi_j - \psi_i|, \qquad (i \leqq n-m).$$

Per i e j entrambi maggiori di $n-m$, si hanno dalle equazioni (22) altrettante identità; per $i > n-m$ e $j \leqq n-m$, si trova subito:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{2}\frac{1}{H_j}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j},$$

cui gioverà associare le:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = 0, \qquad (i > n-m;\ j \leqq n-m;\ h > n-m \text{ e diverso da } i),$$

che sono una conseguenza delle (21).

Questi due sistemi di equazioni si possono raccogliere, scrivendo:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = -\varepsilon_{ih}\frac{1}{H_j}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j}, \qquad (i,\ h > n-m;\ j \leqq n-m).$$

D'altra parte:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = \sum_1^n{}_{rs}\left\{\frac{\partial \lambda_{i|r}}{\partial x_s} - \sum_1^n{}_p a_{rs,p}\lambda_i^{(p)}\right\}\lambda_j^{(r)}\lambda_h^{(s)} +$$
$$+ \sum_1^n{}_{rs}\left\{\frac{\partial \lambda_{h|r}}{\partial x_s} - \sum_1^n{}_p a_{rs,p}\lambda_h^{(p)}\right\}\lambda_j^{(r)}\lambda_i^{(s)} =$$
$$= \frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_s\left(\frac{\partial \lambda_{i|j}}{\partial x_s} - \sum_{n-m+1}^n{}_p a_{js,p}\lambda_i^{(p)}\right)\lambda_h^{(s)} +$$
$$+ \frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_s\left(\frac{\partial \lambda_{h|j}}{\partial x_s} - \sum_{n-m+1}^n{}_p a_{js,p}\lambda_h^{(p)}\right)\lambda_i^{(s)},$$

e, siccome $\lambda_{i|j}$, $\lambda_{h|j}$ (per i, $h > n-m$ e $j \leqq n-m$) sono nulli, rimarrà:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = -\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}(a_{js,p} + a_{jp,s}) =$$
$$-\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}\frac{\partial a_{sp}}{\partial x_j} = -\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}\frac{\partial a'_{sp}}{\partial x_j},$$

le a'_{sp} essendo i coefficienti tuttora incogniti dell'attuale

$$ds^2 = \sum_1^{n-m}{}_i H_i^2 dx_i^2 + \sum_{n-m+1}^n{}_{rs} a'_{rs}dx_r dx_s.$$

Abbiamo così:

$$\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\frac{\partial a'_{sp}}{\partial x_j}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)} = \varepsilon_{ih}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j}, \qquad (i,\ h > n-m;\ j \leqq n-m),$$

e da queste col solito artificio:

$$\frac{\partial a'_{rq}}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j} \sum_{n-m+1}^{n}{}_{ih}\, \varepsilon_{ih}\, \lambda_{i|r}\, \lambda_{h|q} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j} a'_{rq};$$

integrando (e riscrivendo s per q) abbiamo le espressioni cercate dei coefficienti a', cioè:

$$a'_{rs} = K_{rs} \prod_1^{n-m}{}_j\, |\psi_j - \psi_n|, \qquad (r,\ s = n-m+1,\ n-m+2, \ldots, n),$$

le K_{rs} designando funzioni delle m variabili $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n$: Tali funzioni $\left(\text{oltre alla ovvia restrizione di rendere essenzialmente positiva la forma } \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s\right)$ non sono ulteriormente vincolate. Possiamo infatti ritenere di aver esaurite le condizioni (E), in quanto quelle tra le (21), che non abbiamo ancora considerate, si riducono oramai, come è facile convincersi, ad altrettante identità.

Col solito cambiamento di parametro per le superficie coordinate $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}, \ldots, x_{n-m} = \text{cost.}$, si possono ridurre le funzioni V_i $(i \leqq n-m)$, che appariscono nell'espressione di H_i, all'unità, oppure (ciò, che apparirà giustificato dal confronto colle formule generali (32) e (33)) si può porre $V_i^2 = |\psi_n - \psi_i|$; si perviene così, tenendo conto dell'opportunità di mettere in evidenza una costante nell'espressione di ds_1 $\left(\text{e scrivendo } \frac{C}{\psi_n + c} \text{ invece di } C\right)$ alle forme canoniche:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m}{}_i \left\{ |\psi_n - \psi_i| \prod_1^{n-m}{}'_j\, |\psi_j - \psi_i| \right\} dx_i^2 + \prod_1^{n-m}{}_j\, |\psi_j - \psi_n| \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)\ldots(\psi_{n-m} + c)(\psi_n + c)} \Bigg[& \sum_1^{n-m}{}_i \frac{1}{\psi_i + c} \left(\prod_1^{n-m}{}'_j\, |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2 + \\ & + \frac{1}{\psi_n + c} \prod_1^{n-m}{}_j\, |\psi_j - \psi_n| \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s \Bigg] (^*). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

(*) I sigg. Di Pirro e Picciati (loc. cit.), proponendosi la ricerca di *tutte le coppie di corrispondenti ortogonali*, hanno trovato soltanto le forme (25_1) e ($26'_1$), mentre per es. le (29) e (30) (quando $\sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s$ sia riducibile alla forma ortogonale), sono coppie di corrispondenti, che non rientrano nel tipo da essi assegnato. Questa divergenza va at-

Il sistema (A) possiede evidentemente (ψ_n essendo una costante, ma determinata) $n-m+1$ integrali quadratici distinti, compresi tutti nella formula:

$$(\psi_1+c)\dots(\psi_{n-m}+c)(\psi_n+c)\left\{\sum_1^{n-m}{}_i\left(\frac{1}{\psi_i+c}\prod_1^{n-m}{}'_j\,|\,\psi_j-\psi_i\,|\right)x'^2_i+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\psi_n+c}\prod_1^{n-m}{}_j\,|\,\psi_j-\psi_n\,|\sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs}K_{rs}\,x'_r\,x'_s\right\}=\text{cost.},$$

da cui potrebbero direttamente essere calcolati i relativi primi membri, come coefficienti delle diverse potenze di c.

Come già pel tipo t_1), la questione di determinare tutti i corrispondenti di un dato sistema (A), spettanti alla sottoclasse t'_m), è risoluta, per ogni forma canonica (29), dall'espressione (30) di ds_1, la quale dipende sempre dalle due costanti arbitrarie C e c.

Giova avvertire che la forma canonica (29) per un ds^2 è meno restrittiva che non la (25_1), ciò, che del resto, come si constaterà, vale anche per la forma canonica generale del tipo t_m), talchè sarà molto più ampia la categoria dei ds, che ammettono corrispondenti di tipo t_m), che non di tipo t_1); anzi le condizioni per l'esistenza di un corrispondente (come in fondo si poteva prevedere dal comportamento (§ 9) delle equazioni (E)) vanno gradatamente decrescendo da tipo a tipo, finchè si giunge al tipo t_n), che non ne esige alcuna e determina quei sistemi, che si son detti (§ 6) col sig. Painlévé *corrispondenti ordinarii* e dipendono da una sola costante arbitraria.

Riuscirà agevole trovar conferma a queste asserzioni.

§ 12. Tipo generale t_m). Considerazioni riassuntive.

Sieno (A) ed (A_1) due sistemi corrispondenti di tipo generale t_m) e si chiamino $\rho_{p_1}, \rho_{p_2}, \dots, \rho_{p_{n-m+1}}$ ($p_{n-m+1}=n$) le $n-m+1$ radici distinte dall'equazione (15), supponendo che gli indici $p_1, p_2, \dots, p_{n-m+1}$ sieno disposti in ordine crescente e che la differenza p_l-p_{l-1} ($p_0=0$) designi l'ordine di multeplicità della radice ρ_{p_l}. Questo modo di rappresentare l'aggruppamento

tribuita ad una semplice svista, del resto ben naturale, commessa da entrambi; all'ommissione cioè dei vari casi, che si possono presentare, quando certe equazioni riescano soddisfatte identicamente, ciò che rende inattendibili i calcoli successivi, riferentisi all'ipotesi generale.

delle radici si presenta spontaneo, quando si parta dalla successione ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_n$ e si immagini che coincidano tra loro le prime p_1 radici, e poi quelle (distinte dalle prime), i cui indici sono compresi fra p_1 e p_2 (incluso) ecc., e così in generale quelle, i cui indici sono compresi fra p_{l-1} e p_l (incluso).

Una prima ispezione alle equazioni (E) ci assicura che in questo caso debbono annullarsi tutte le γ_{hij} con tre indici distinti e tali che h ed i non sieno compresi nello stesso intervallo (determinato da due p consecutive). Con metodo analogo a quello seguito, nel caso svolto testè, si potrebbe poi stabilire che i singoli $n-m+1$ sistemi di equazioni

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p_{l-1}, p_l + 1, p_l + 2, \ldots, n), \qquad (31)$$

sono completi e che quindi ciascuno di essi ammette $p_l - p_{l-1} (l = 1, 2, \ldots, n-m+1)$ integrali indipendenti $f_{p_{l-1}+1}, f_{p_{l-1}+2}, \ldots, f_{p_l}$. Inoltre due qualisivogliono di questi integrali f_α e f_β appartenenti a due distinti sistemi (31) (e quindi cogli indici α e β situati in intervalli differenti) sono fra loro ortogonali.

Infatti, considerando per un momento un sistema (31) come un insieme di $n - p_l + p_{l-1}$ equazioni algebriche lineari ed omogenee nelle n quantità u_r, si hanno le $p_l - p_{l-1}$ soluzioni indipendenti $\lambda_{p_{l-1}+1|r}, \lambda_{p_{l-1}+2|r}, \ldots, \lambda_{p_l|r}$, talchè, supposto α compreso fra p_{l-1} e p_l, le derivate $f_{\alpha|r}$ saranno linearmente esprimibili mediante $\lambda_{p_{l-1}+1|r}, \lambda_{p_{l-1}+2|r}, \ldots, \lambda_{p_l|r}$; analoga proprietà vale per f_β, soltanto, per essere α e β compresi in intervalli differenti, le λ ad esso relative saranno essenzialmente diverse dalle precedenti. Dopo ciò, l'ortogonalità fra f_α e f_β riesce manifesta.

Segue da questa osservazione che, assumendo a sistema coordinato le n famiglie di superfici $f_i = \text{cost.}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si possono attribuire a ds e ds_1 le forme rispettive:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m+1} {}_l \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l} {}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

$$ds_1^2 = \sum_1^{n-m+1} {}_l\, \rho_{p_l} \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l} {}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Una volta ridotti a questa forma, le (E) si integrano subito, basta soltanto aver cura di scinderle in varii gruppi, corrispondenti ai posti, occupati dagli indici negli intervalli p_{l-1}, p_l (come si è fatto nell'ipotesi particolare t'_m), pei due intervalli $1, n-m$; $n-m, n$).

Il lettore avrà già intuito il risultato finale, talchè, senza riportare il calcolo, sembrami sufficiente, a complemento della ricerca, di trascrivere le forme canoniche:

$$d s^2 = \sum_1^{n-m+1}{}_l \; \prod_1^{n-m+1}{}'_j \, | \psi_{p_j} - \psi_{p_l} | \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} K_{rs} \, d x_r \, d x_s, \tag{32}$$

$$d s_1^2 = \frac{C}{(\psi_{p_1}+c)(\psi_{p_2}+c)\dots(\psi_{p_{n-m+1}}+c)} \sum_1^{n-m+1}{}_l \frac{1}{\psi_{p_l}+c} \prod_1^{n-m+1}{}'_j \, | \psi_{p_j} - \psi_{p_l} | \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} K_{rs} \, d x_r \, d x_s, \tag{33}$$

in cui ψ_{p_l} è funzione della sola x_{p_l}, se ρ_{p_l} è radice semplice, una pura costante nel caso opposto; $K_i \, (p_{l-1} + 1 \leqq i \leqq p_l)$ è funzione delle sole variabili $x_{p_{l-1}+1}, x_{p_{l-1}+2}, \dots, x_{p_l}$ e si può sempre supporre eguale ad *1*, se ρ_{p_l} è radice semplice.

Dalle (32), (33) si ritrovano, come è naturale le (25) (26′), supponendo tutte le radici semplici, cioè $m = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2, \dots, p_n = n$; si ottengono invece le (29), (30), facendo $p_1 = 1$, $p_2 = 2, \dots, p_{n-m} = n - m$, $p_{n-m+1} = n$; considerando infine come caso particolare il tipo t_n), vengono a mancare le funzioni ψ e si ha semplicemente:

$$d s^2 = \sum_1^{n}{}_{rs} K_{rs} \, d x_r \, d x_s$$

$$d s_1^2 = C \sum_1^{n}{}_{rs} K_{rs} \, d x_r \, d x_s .$$

Il tipo t_n) non esige dunque alcun vincolo per la forza viva del sistema (**A**), ma comprende però soltanto dei corrispondenti manifesti a priori, cioè i corrispondenti ordinarii.

Apparisce dalle forme canoniche (32) e (33) che il caso dei corrispondenti ordinarii è l'unico (cfr. § 6), in cui esiste per la coppia (**A**) (**A**$_1$) il solo integrale delle forze vive; in tutti gli altri casi abbiamo infatti $n - m + 1 \, (> 1)$ integrali quadratici, che si possono raccogliere nell'equazione:

$$(\psi_{p_1} + c)(\psi_{p_2} + c)\dots(\psi_{p_{n-m+1}} + c) \sum_1^{n-m+1}{}_l \frac{1}{\psi_{p_l} + c} \prod_1^{n-m+1}{}'_j \, | \psi_j - \psi_{p_l} | \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} K_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.},$$

valida, durante il moto determinato dal sistema (**A**), per tutti i valori di c.

Per concludere, *vogliamo mostrare in qual modo coi risultati ottenuti si risolve la questione di determinare tutti i sistemi corrispondenti ad un dato* (**A**).

La ricerca va eseguita separatamente per ciascun tipo t_m) e per ciascuna sottoclasse di esso, individuata dal modo, con cui possono essere distribuite le molteplicità fra $n-m+1$ radici distinte di una equazione di grado n. Ognuna di queste sottoclassi è caratterizzata da una certa forma canonica (32) di elemento lineare: Se ds non è riducibile a quella forma, esso non ammette corrispondenti di quel tipo e sottoclasse; per ogni forma (32), da esso posseduta, i ds_1 corrispondenti, sono tutti compresi nella espressione (33), che dipende da due costanti arbitrarie Fa eccezione il tipo t_n), che dà luogo, per ogni ds, ai sistemi corrispondenti Cds, con C costante arbitraria.