

GLI STUDI GEOMETRICI DI EUDOSSO DA CNIDO

1. Al principio del IV secolo a. C., le Matematiche greche, riassumendo le investigazioni dei due secoli precedenti, possedevano già un patrimonio ricco di dottrine e di risultati. Ma necessitava affermare le conquiste fatte di fronte alle esigenze critiche di un nuovo spirito filosofico; e cioè determinare il valore dei concetti, stabilire i fondamenti razionali della scienza e riunire in un sistema logicamente coordinato le verità conquistate, e così finalmente perfezionare e rendere inattaccabili i mezzi di dimostrazione e di ricerca.

Questo era il compito dei matematici del IV secolo: ed intorno ad esso in effetto si esercitò particolarmente la loro attività; attività ispirata e diretta da due insigni maestri: PLATONE e EUDOSSO da Cnido.

EUDOSSO fu uno degli scienziati più eminenti dell'antichità (1). DIOGENE LAERZIO lo ricorda quale « astronomo, geometra, medico, legislatore » (VIII, 86). Può ben dirsi di lui che realizzò in sé la fusione delle principali tendenze della scienza del suo tempo. Apprese infatti i fondamenti del sapere scientifico in Atene, nella scuola dei Sofisti e nell'Accademia di PLATONE, fu discepolo di ARCHITA in geometria, e completò la sua coltura astronomica presso i Sacerdoti Egiziani. I suoi contemporanei lo circondarono della più elevata ammirazione: « Invece di EUDOSSO lo chiamavano *Endoxos* per lo splendore della sua fama » (DIOG., *ibid.*, 91).

EUDOSSO si dedicò con zelo a diffondere in Grecia le scienze, con cui egli stesso erasi famigliarizzato. DIOGENE attesta che « divenne

(1) Notizie abbastanza sicure sulle circostanze principali della vita di Eudosso furono raccolte da DIOGENE LAERZIO, *De claror. philos. vitis*, VIII, nn. 86-91. EUDOSSO viveva nella prima metà del VI sec. a. C.; morì nel cinquantatreesimo anno di sua età. Le date estreme della sua vita generalmente accettate sono gli anni 408-355, sull'autorità di БОСКН, *Ueber die vierjährigen Sonnenkreis der Alten*, Berlin, 1863. Basterà qui notare che UNGER ne pone la nascita nel 420/418 (Philolog., IV, 1891), e SUSEMIHL propone di trasportarla all'anno 390 (Rhein. Museum., LIII, 1898).

celeberrimo anche presso i Greci per avere scritto di astronomia, di geometria e altre opere pregevoli » (*ibid.*, 88). Un numeroso stuolo di discepoli si riunì intorno a lui, e sorse per merito suo, sulle sponde del mar di Marmara, la scuola di Cizico; scuola, che l'insegnamento di EUDOSSO fece diventare un centro importantissimo per lo sviluppo delle cognizioni scientifiche, e matematiche in ispecie, forse superiore e non certo inferiore alla scuola Platonica (2). Bisogna riconoscere infatti che in una maniera assai più diretta che non il sommo filosofo di Atene, EUDOSSO fu capo ed ispiratore di un largo movimento scientifico, che riuscì a perfezionare la materia ed i metodi della geometria elementare, e stabilì i principi rigorosi di una geometria superiore (della quale il punto capitale è la teoria delle Sezioni coniche, iniziata da MENECMO, discepolo di EUDOSSO).

Pur troppo della complessa produzione scientifica di EUDOSSO nessun resto autentico è giunto fino a noi. Si hanno soltanto delle vaghe testimonianze; e queste presso autori che vivevano in un tempo già lontano dal suo, ai quali non pervenne che l'eco della sua fama grandissima e delle novità dei suoi studi. Abbastanza fortunati possono reputarsi i suoi lavori astronomici, che è stato possibile ricostruire quasi nella loro integrità (3). Mentre è ancora piena di difficoltà e d'incertezze la ricostruzione dei suoi lavori geometrici. Credo pertanto che sia utile riaffermare e coordinare i contributi da lui portati alla

(2) Racconta DIOGENE che qualche anno dopo la fondazione della scuola di Cizico, EUDOSSO si recò ad Atene « seguito da moltissimi discepoli, allo scopo, secondo alcuni, di far dispetto a PLATONE » (n. 87). Questa frase ha dato motivo a credere che tra i due maestri passasse una certa ostilità. Ma questo non pare probabile; lo stesso DIOGENE lo riferisce con titubanza. Contrasta poi con quel che aggiunge subito dopo (al n. 88, che porterebbe invece ad ammettere fra essi una certa familiare consuetudine), e contrasta soprattutto con la bontà e con l'elevatezza del carattere di EUDOSSO, quale ci viene trascritto da ARISTOTELE (*Etk. Nicomach.*, ed. Susemihl; Lipsiae, 1880, pp. 220-21). Ma se non nelle intenzioni, certo nei fatti potè esistere una specie di rivalità fra i due Maestri; giacchè è verosimile che l'insegnamento del Matematico di Cnido facesse scemare, almeno nelle cose scientifiche, l'influenza del sommo Filosofo. Però, anche se tra i discepoli delle due scuole sorsero delle dispute per disparità di vedute su punti controversi, non impedirono esse la mutua collaborazione per lo studio dei problemi che interessavano generalmente la scienza.

(3) L'astronomia di EUDOSSO fu rimessa in onore da L. IDELER, e meglio ancora da G. V. SCHIAPARELLI con la fortunata ricostruzione esposta nella Memoria, *Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele* (Pubbl. R. Oss. di Brera, IX, Milano, 1875).

geometria. Questo appunto cercherò di fare, ricordando le testimonianze originali che ad essi si riferiscono, per stabilire innanzi tutto quei fatti fondamentali ed indiscutibili, che giustificano la eccezionale importanza degli studi geometrici di EUDOSSO (4).

*
* *

2. Nel breve riassunto storico relativo ai geometri preeuclidei che PROCLUSO riporta al principio dei *Commentari al I libro degli Elementi di Euclide* si ha un cenno che riguarda EUDOSSO e che incomincia: (PROCLUS, in *I lib. Elem.*, ed. Friedlein, Lipsiae 1873, p. 67): — *Εὐδοξος δὲ ὁ Κνίδιος, Αἰώντος μὲν ὀλίγω νεώτερος, ἐταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γινόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ἠῤῥησεν. . . .* — (« Eudosso da Cnido, poco più giovane « di Leone, e amico di Platone, per il primo accrebbe il numero dei « teoremi detti generali . . . »).

Questa testimonianza, sebbene sia molto generica, mette in rilievo l'indole seriamente scientifica degli studi di EUDOSSO, e gli assegna una parte notevole nello sviluppo della geometria preeuclidea.

Più esplicitamente l'importanza che da tali studi derivavano alla scienza geometrica viene attestata dallo stesso PROCLUSO, quando, parlando della composizione degli *Elementi* di EUCLIDE, dice: (PROCLUS, l. c., p. 68) — *Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, . . .* — (« Euclide, il quale raccolse gli elementi e molte cose di Eudosso coordinò . . . »).

Donde sembra doversi concludere che molte cose contenute negli *Elementi* si debbano ad EUDOSSO; e che perciò questi debba essere

(4) Dei lavori che trattano di Eudosso citerò in particolare:

L. IDELER, *Ueber Eudoxus* (due letture inserite nelle Abh. der k. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1828 e 1830);

C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipzig, 1870, pp. 163-169;

P. TANNERY, *La Géométrie grecque*, Paris, 1887, pp. 75-80, 95-100, ecc.;

G. J. ALLMAN, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1889, pp. 128-150;

H. KUENSSBERG, *Der Astronom, Mathematiker, und Geograph Eudoxos von Cnidos*, Dinkelsbühl, 1888-1890;

F. HULTSCH, art. *Eudoxos* in PAULY-WISSOWA, *Real-Encyclopädie der Klass. Alterthumwiss.*, Stuttgart, VI Bd. 1909, pp. 930-937;

G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano, 1914, pp. 136-148, 470-475.

annoverato fra coloro che più potentemente contribuirono a quel perfezionamento della geometria greca, quale ci è rivelato dalla composizione euclidea.

3. Non è facile però negli *Elementi* distinguere ciò che è del loro compositore, e ciò che invece appartiene ai suoi predecessori. Per ciò che riguarda particolarmente la parte spettante ad EUDOSSO nella costituzione degli *Elementi* è notevole una notizia che si legge negli Scolii anonimi al quinto libro di essi, riportati dai più autorevoli codici euclidei.

Uno scolio dice: (EUCLEDIS *opera om.*, ed. Heiberg, *vol.* V, Lipsiae 1888, *p.* 280) — τὸ δὲ βιβλίον Εὐδόξου τινὲς εὗρεσιν εἶναι λέγουσι τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. — (« Questo libro dicono alcuni che sia « un'invenzione di Eudosso, maestro di Platone »).

E un altro: (l. c., *p.* 282) — τοῦτο τὸ βιβλίον Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου τοῦ μαθηματικοῦ τοῦ κατὰ τοὺς Πλάτωνος χρόνους γεγονότος εἶναι λέγεται, ἐπιγράφεται δὲ ὁμῶς Εὐκλείδου, ἀλλ' οὐ κατὰ τινὰ ψευδῇ ἐπιγραφῇ· εὗρεσεως μὲν γὰρ ἕνεκα ἄλλου τινὸς οὐδὲν κωλύει εἶναι, τῆς μὲντοι κατὰ στοιχείων αὐτῶν συντάξεως χάριν καὶ τῆς πρὸς ἄλλα τῶν οὕτω ταχθέντων ἀκολουθίας ὁμολόγηται παρὰ πᾶσιν Εὐκλείδου εἶναι. — (« Si dice che questo libro sia di Eudosso da Cnido, « matematico, contemporaneo di Platone; purtuttavia porta il nome « di Euclide, ma non come un titolo falso. Niente infatti impedisce « che possa essere di un altro per l'invenzione, ma per ciò che ne « riguarda la composizione secondo gli elementi e l'ordine delle cose « così disposte rispetto ad altre, tutti convengono che sia di Euclide »).

Il libro quinto degli *Elementi* tratta della teoria generale delle proporzioni, e la svolge con un metodo che può ugualmente convenire alla geometria, come all'aritmetica, alla musica e a qualunque scienza matematica. Di più, essa è stabilita indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla commensurabilità delle grandezze.

Ora, in che senso può dirsi che tale teoria sia « invenzione » di EUDOSSO?

È certo, che, prima di lui, i Pitagorici conoscevano una teoria delle proporzioni relativa ai *numeri* (numeri interi e razionali); è altresì verosimile che essi cominciassero ad applicare la loro teoria anche alla geometria. Ma la loro teoria si prestava soltanto per le grandezze commensurabili. E perciò la scoperta, avvenuta in seno alla stessa scuola pitagorica, delle grandezze incommensurabili veniva a distruggere gran parte del loro edificio geometrico e facevano apparire inconcludenti le dimostrazioni che dipendevano da quella teoria. Donde la

necessità per essi di bandire sistematicamente nelle dimostrazioni geometriche la nozione di rapporto (e di similitudine); nozione che EUCLIDE stesso, seguendo per forza di tradizione il loro metodo, volle evitare, finchè gli fu possibile, nei primi quattro libri. Ma rimaneva pur sempre, per la geometria, la necessità di rifondere la teoria delle proporzioni, per renderla capace di trattare ogni sorta di grandezze. Ad EUDOSSO spetterebbe allora il merito di aver superato lo « scandalo » della incommensurabilità e di aver stabilito in maniera rigorosamente logica per le grandezze in genere, commensurabili o no, una teoria che al suo inizio non supponeva che rapporti tra numeri. E quindi la generalità del metodo e la formulazione scientifica, con cui il libro V tratta la teoria delle proporzioni, deve essere considerata come « invenzione » di EUDOSSO.

4. Una rivelazione assai più esplicita sui lavori di EUDOSSO si ha in ARCHIMEDE, il quale a lui attribuisce espressamente la dimostrazione di due teoremi sul volume del cono e della piramide, dimostrazione basata sopra uno dei principî più fecondi dell'antica geometria.

Nella prefazione all'opuscolo *Sulla sfera e sul cilindro*, ARCHIMEDE, dopo aver accennato ai teoremi che si accinge a dimostrare, riguardanti la superficie della sfera e del cilindro, aggiunge: (ARCHIMEDIS *opera omnia*, ed. Heiberg, vol. I, Lipsiae 1910, p. 4) — ταῦτα δὲ συμπτώματα τῇ φύσει προὔπηρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἡγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίας ἀνεστραμμένων, οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος, ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία· διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαρβαλεῖν αὐτὰ πρὸς τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις θεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κῶνῃ καὶ ὕψος ἴσον. καὶ γὰρ τούτων προὔπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγεννημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαιεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μὴδ' ὅφ' ἐνὸς κατανοηθῆναι. —

(« Queste proprietà erano inerenti alla natura delle figure suddette; « pure non erano conosciute da coloro che prima di noi si dedicarono « alla geometria, nessuno di loro avendo pensato che esiste una misura di queste figure; perciò non esito a paragonarle con quelle scoperte dagli altri géometri e con quelle che credo essere le più importanti fra quelle che Eudosso ha studiato circa i solidi: che ogni « piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base della pira-

« mide e altezza uguale, e che ogni cono è la terza parte del cilindro
 « avente la stessa base del cono e altezza uguale. Sebbene infatti tali
 « proprietà sieno inerenti alla natura stessa di queste figure, e ci
 « siano stati molti geometri degni di lode prima di Eudosso, pure
 « accadde che fossero da tutti ignorato e da nessuno osservate »).

A questo si deve ricollegare ciò che lo stesso ARCHIMEDE afferma in un altro suo scritto sopra un *Metodo riguardante i teoremi meccanici*, scoperto a Costantinopoli e pubblicato da J. L. Heiberg nel 1907. Nell'introduzione nota che egli intende esporre un metodo, basato su considerazioni meccaniche, che è molto utile per la ricerca delle proposizioni geometriche, e che si presta anche ottimamente per trovarne la loro dimostrazione. E a tal proposito osserva: (op. cit., II, 1913, p. 428) — *ετοιμότερον γάρ ἐστι προλαμβάντα διὰ τοῦ τρόπου γινώσιν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδεὶς ἐγνωσμένου ζητεῖν. διόπερ καὶ τῶν θεωρημάτων τούτων, ὧν Εὐδόξος ἐξηρέκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν, περὶ τοῦ κώνου καὶ τῆς πυραμίδος, ὅτι τρίτον μέρος ὁ μὲν κώνος τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ πυραμὶς τοῦ πρίσματος, τῶν βάσιν ἔχόντων τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον, οὐ μικρὰν ἀπονείμει ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρῶτῃ τὴν ἀπόφασιν τὴν περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηνάμενη.* — (« Poiché « è molto più facile effettuare la dimostrazione quando si sia acqui-
 « stata con tal metodo una certa conoscenza di quel che si ricerca,
 « anzichè scoprirla senza conoscerne nulla. Per questa ragione, anche
 « di quei teoremi, di cui Eudosso trovò per il primo la dimostrazione,
 « riguardanti il cono e la piramide, che cioè sono la terza parte il
 « cono del cilindro e la piramide del prisma aventi la stessa base e
 « altezza uguale, un merito non piccolo dovrebbe attribuirsi a Demo-
 « crito, il quale per il primo fece rilevare la detta proprietà, senza
 « dimostrazione »).

Questi due passi possono sembrare contraddittori in un punto: il primo pare che indichi EUDOSSO non solo come *autore* della dimostrazione, ma anche come *inventore* dei due teoremi; mentre il secondo quale inventore di essi nomina esplicitamente DEMOCRITO. Ma si può osservare che nel primo ARCHIMEDE è soprattutto preoccupato della dimostrazione rigorosa delle proposizioni geometriche, e quindi può aver trascurato, come senza interesse, di ricordare l'invenzione di quei teoremi; nel secondo invece vuol mettere in rilievo l'utilità del suo metodo meccanico, il quale mentre contribuisce alla ricerca delle proposizioni geometriche, ne facilita notevolmente la dimostrazione. E l'aver aggiunto espressamente che DEMOCRITO enunciò quei teoremi « senza

dimostrazione » attenua in maniera abbastanza efficace l'apparente contraddizione.

Si può dunque ritenere che DEMOCRITO scoprì per il primo i due teoremi in questione sul volume del cono e della piramide, senza darne una dimostrazione sufficiente e conclusiva; e che EUDOSSO ne trovò l'esatta dimostrazione scientifica.

5. Lo stesso ARCHIMEDE fornisce le indicazioni necessarie per ricostruire la via seguita da EUDOSSO nella predetta dimostrazione.

Nell'introduzione al trattato sulla *Quadratura della parabola* stabilisce il lemma seguente, da lui assunto come base dei suoi ragionamenti: (op. cit., II, p. 264) — τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν, ἣ ὑπερέχει τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατόν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτῇ συντιθεμένηαν πανιὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. — (« Dati due spazi disuguali, la differenza di cui il maggiore supera il minore è tale che aggiunta (ripetutamente) a se stessa « può superare qualunque spazio finito preassegnato »). E immediatamente prosegue: — κέχρηται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῇδε τῇ λήμματι. τοὺς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλήλους τὰν διαμέτρων ἀποδείξασιν αὐτῇ τούτῃ τῇ λήμματι χρῶμενοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλήλας τὰν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῇ κῶνῃ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῇ προειρημένῃ λήμματι λαμβάνοντες ἔγραπον. — (« Di questo lemma si son serviti anche i geometri più « antichi. Infatti che i circoli sono tra loro in ragione doppia dei loro « diametri (come il quadrato dei loro diametri) hanno dimostrato « servendosi di questo stesso lemma, e che le sfere sono tra loro in « ragione tripla dei diametri (come il cubo dei loro diametri): e « inoltre che ogni piramide è la terza parte del prisma avente la « stessa base della piramide e altezza uguale, e che ogni cono è la « terza parte del cilindro avente la stessa base del cono e altezza « uguale lo provavano mediante un lemma simile a quello già « citato »).

Da questo si deduce che i due teoremi relativi al volume della piramide e del cono furono dimostrati mediante un lemma « simile » a quello enunciato da ARCHIMEDE. Ma la dimostrazione di essi è stata già attribuita ad EUDOSSO; perciò non v'è dubbio che tra i « geometri antichi » ivi nominati, si debba intendere compreso principalmente EUDOSSO. Così è evidente che questi conosceva ed adoperava per la sua dimostrazione un lemma « simile » a quello citato.

Ora quei due teoremi si trovano negli *Elementi* di EUCLIDE, al libro XII, rispettivamente sotto le proposizioni 7 e 10. Nella dimostrazione quivi riportata si fa uso della proposizione I del libro X, la quale enuncia il seguente principio: « Assegnate due grandezze « disuguali, se dalla maggiore si sottrae una grandezza più grande « della sua metà, e da ciò che resta una grandezza più grande della « sua metà, e se questa operazione si ripete continuamente, resterà « una certa grandezza che sarà più piccola della grandezza minore « assegnata ».

Per stabilire questa proposizione EUCLIDE assume che la grandezza minore « se viene moltiplicata, può superare la maggiore ». Tale assunto è basato sulla definizione 4^a del libro V: « Si dice che hanno « tra loro un rapporto quelle grandezze che sono tali che una qualunque di esse moltiplicata può superare una qualunque delle « altre ».

Da questa definizione (che ha lo stesso ufficio di un principio generale) è facile dedurre che: viceversa, se due grandezze disuguali ammettono un rapporto, una di esse moltiplicata può superare l'altra. Ora non può dirsi che ciò differisca sostanzialmente dal « lemma di ARCHIMEDE »; il quale anzi appare come una formula particolarizzata, o anche come una deduzione immediata di quel principio generale.

Tutto ciò, anche perchè è singolarmente d'accordo con le altre notizie che ad EUDOSSO attribuiscono la teoria del libro V, induce a concludere che il lemma adoperato da EUDOSSO sia stato il principio contenuto nella definizione 4^a del libro V, o addirittura la proposizione I del libro X. che a lui ugualmente dovrebbe quindi la sua origine. Allora le dimostrazioni da lui date si devono ritenere identiche, nella sostanza a quelle riportate da EUCLIDE; e a lui deve farsi risalire quanto forma il fondamento stesso del libro XII degli *Elementi*, e forse anche molto di quello che è in esso contenuto.

ARCHIMEDE accenna che mediante lo stesso lemma da lui ricordato fu dimostrato il teorema riguardante la proporzionalità dei cerchi con i loro diametri. Questo teorema per unanime consenso è attribuito ad IPPOCRATE da Chio; onde l'accento ha fatto sospettare che IPPOCRATE conoscesse già il « lemma di ARCHIMEDE », e che lo abbia applicato a dimostrare il suo teorema. Ma ciò non consegue facilmente dalle parole di ARCHIMEDE; anzi se si pensa che, pur conoscendo il lemma, la sua applicazione richiede l'aiuto di non pochi risultati della teoria generale delle proporzioni, si riconoscerà che la dimostrazione che può averne data IPPOCRATE non sarà stata certamente quella che

interessava ARCHIMEDE. Tutt'al più può essere stato un primo tentativo, certo non disprezzabile, di dimostrazione (5).

In ogni modo, indiscutibilmente, ad EUDOSSO va riconosciuto il merito d'aver introdotto nella geometria antica un principio, che ebbe la stessa parte che ha oggi il concetto di limite, e d'averne mostrato la fecondità delle applicazioni. Conseguentemente si deve egli considerare come l'autore principale del metodo di dimostrazione che ne derivava, del cosiddetto *metodo di esaustione*. ARCHIMEDE stesso, proclamando tanto esplicitamente il rigore delle dimostrazioni di EUDOSSO, sembra vantarlo come colui che sommamente contribuì a stabilire i metodi rigorosi nella scienza, e sembra indicarlo come il suo vero precursore nelle quadrature e nelle cubature (6).

6. EUDOSSO si occupò anche del *problema di Delo*, ossia della duplicazione del cubo, problema che da IPPOCRATE da Chio fu già ricondotto a quest'altro di geometria piana: costruire due medie proporzionali fra due rette date.

In una lettera al re TOLOMEO EUERGETE (7), ERATOSTENE da Cirene racconta, in principio, che gli abitanti di Delo, sollecitati dall'oracolo in occasione di una pubblica calamità, mandarono a pregare i geometri dell'Accademia di PLATONE perchè si studiassero di trovare una soluzione al loro famoso problema. Indi continua: (ARCHIMEDIS

(5) Anche ERONE dà ad EUDOSSO il merito di aver trattato « eccellentemente » della misura dei solidi, e attribuisce a lui la *dimostrazione* dei teoremi succitati: « Giacchè prima della invenzione di EUDOSSO era impossibile dimostrare che il cilindro è triplo del cono di ugual base ed uguale altezza, e che i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri » (*ἀμύχανον γὰρ ἦν πρὸ τῆς Εὐδόξου ἐννοίας ἀποδείξιν ποιήσασθαι δι' ἧς ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου* ecc. . . ., *Metrica*, I, ed. H. Schöne, Lipsiae, 1903, p. 2).

(6) Risulta dalle cose precedenti che impropriamente si dà il nome di « postulato d'ARCHIMEDE » al lemma ricordato. Esso, com'è noto, suole ora enunciarsi così: *Se A e B sono due grandezze omogenee, esiste sempre un multiplo di A che supera B*, e cioè un numero m così grande che sia $mA > B$. Nella qual forma è assai più vicino alla forma euclidea. Con più giusta ragione potrebbe denominarsi « *postulato di Eudosso* ».

Non sarà inutile notare come già in ARISTOTELE si trovi una proposizione che, sostanzialmente, comprende insieme il predetto lemma e la proposizione euclidea X, 1 (cfr. *Physic.*, VIII, 10, ed. J. Bekker, Berolini, 1831, p. 266, b 2). Cfr. E. RUFINI, *Il concetto di infinito matematico in Aristotele*, Rassegna di Mat. e Fis., Roma, I (1921), 6, p. 143.

(7) Riportata da EUTOCIO nei *Commentari* al trattato di ARCHIMEDE, *Sulla sfera e sul cilindro*.

op. om. ed. Hiberg, III. 1881, p. 106) — τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς καὶ ζητούντων δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὐρηκέναι, Εὐδόξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι, χειρονογήσαι δὲ καὶ εἰς χρεῖαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι. — (« E mentre questi si dedicavano con ogni sollecitudine alla questione sforzandosi di trovare due medie proporzionali di due rette date, si dice che Archita da Taranto le abbia trovate per mezzo dei semicilindri e Eudosso per mezzo delle cosiddette linee curve. Ma accadde a tutti questi, che esposero delle soluzioni (geometricamente) ben dimostrate, ma non tali che potessero essere praticamente eseguite e utilmente applicate »).

Nell'epigramma che chiude la lettera, di nuovo, dopo i « cilindri » di ARCHITA e le « triadi » di MENECMO, vengono ricordate con evidente ammirazione le « linee curve del divino EUDOSSO ». Senza dubbio, la soluzione di EUDOSSO apparve, almeno dal lato teorico, soddisfacente e degna di lode a ERATOSTENE.

EUTOCIO invece nello stesso Commentario, in cui riporta la citata lettera e le soluzioni di ARCHITA, di MENECMO e di altri matematici, esprime un tutt'altro giudizio su quella che portava il nome di EUDOSSO. Egli dice: (op. cit.; p. 66) — πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρηγησάμεθα γράφειν, ἐπειδὴ φησι μὲν ἐν προοιμίῳ διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν εὐρηκέναι, ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τῇ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διηρημένην ἀναλογίαν εὐρὼν ὥς συνεχεῖ χρῆται ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι, τί λέγω περὶ Εὐδόξου, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. — (« Abbiamo avuto occasione di vedere gli scritti di molti uomini celebri, che trattano questo problema; ma tra essi abbiamo ommesso di riportare quello di Eudosso da Cnido, poichè nei preliminari dice di aver trovato la soluzione mediante linee curve, ma poi nella dimostrazione, oltre che non fa uso di linee curve, avendo trovato una proporzione discreta, l'adopera come se fosse continua. E ciò doveva apparire assurdo, non solo ad Eudosso, ma a uno qualunque anche mediocrementemente versato in geometria »).

Si stenta ad ammettere che il severo giudizio pronunciato da EUTOCIO contro la soluzione eudossiana possa minimamente toccare il grande geometra di Cnido. La testimonianza di ERATOSTENE, giudice molto autorevole e vissuto appena un secolo dopo EUDOSSO (circa nel

periodo 276-194 a. C.), è tale da distruggere ogni dubbio. È assai verosimile invece che il manoscritto originale, in cui era esposta la vera soluzione di EUDOSSO, sia stato trasmesso con tali e tante alterazioni da giungere ad EUTOCIO (che scriveva nel VI secolo d. C.) quasi del tutto inintelligibile. Del resto, EUTOCIO stesso si rifiutava forse di considerare lo scritto che biasima quale opera di EUDOSSO, come mostrano le parole « τί λέγω περὶ . . . » con cui chiude il suo giudizio. Piuttosto dobbiamo lamentare che EUTOCIO, pagò di aver condannato lo scritto che possedeva, non abbia cercato, spinto dalla testimonianza onorevole di ERATOSTENE, di ricostruire lo scritto eudossiano con il confronto di fonti meglio informate e più attendibili, che al suo tempo non dovevano mancare.

Intanto per ora null'altro di positivo si sa sulla soluzione di EUDOSSO. Dal contesto della lettera di ERATOSTENE si capisce soltanto che le « linee curve » usate da EUDOSSO erano ben distinte dalle « triadi » (o sezioni coniche) adoperate da MENECMO, suo discepolo. Dal modo come ne parlano i diversi scrittori, che vi accennano (8), si può anche concludere che il termine « καμπύλαι γραμμαί » riferito alle linee di EUDOSSO ha un significato tutto particolare, e non solamente un significato generico in opposizione a linee rette. Ma di che natura fossero tali linee non si può determinare se non con una lontana probabilità.

7. Il brano storico, relativo a EUDOSSO, riportato da PROCLO e già citato più sopra, continua dicendo: — καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκεν — (« . . . e alle tre analogie ne aggiunse altre tre . . . »).

A questo proposito maggiori dettagli dà GIAMBlico, il quale scrive: (Jamblichus, *In Nichom. Arithm. introd.*, ed. Pistelli, Lipsiae, 1894, p. 101) — μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητικὴ τε καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτῃ, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν αὐθις καὶ Ἰππασσον ἀρμονικὴ μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμωμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίμετο λόγους περιέχουσα ὑπεναντία δὲ πρότερον ἐκαλεῖτο, διότι ὑπεναντίον τι ἔπασχε τῇ ἀριθμητικῇ, ὡς δειχθήσεται. ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα περὶ Εὐδόξου μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπε-

(8) Anche DIOGENE tra i meriti speciali di EUDOSSO comprende la scoperta delle proprietà delle linee curve. Riferisce infatti che lo storico EUDOSSO da Rodi φησι τὸν Κνίδιον Εὐδόξον εὗρεν τε τὰ περὶ τὰς καμπύλας γραμμάς (n. 90).

ναντίαν ἐκάλεσαν, διὰ τὸ καὶ αὐτὴν ὑπεναντίον τι πάσχειν τῇ ἀρμονικῇ, ὡς δειχθήσεται· τὰς δὲ λοιπὰς δύο ἀπλῶς κατὰ τὴν τάξιν προσηγόρευσαν πέμπτην τε καὶ ἑκτην. — (« Tre sole medietà vi erano « al tempo di Pitagora e dei matematici suoi discepoli: l'aritmetica, « la geometrica e la terza secondo l'ordine, la quale fu anticamente « detta la contraria, e che poi da Archita e da Ippaso fu chiamata « armonica, perchè sembrava che comprendesse i rapporti secondo le « leggi dell'armonia e della melodia. Al principio invece fu chiamata « contraria, perchè aveva qualche cosa di contrario all'aritmetica, come « si dimostrerà. Ma poi Eudosso avendo trovato altre medietà, scambiando il nome la quarta chiamò propriamente contraria, per avere « anch'essa qualche cosa di contrario rispetto a quella armonica, come « si dimostrerà; le altre due chiamò semplicemente, secondo l'ordine, « quinta e sesta »).

Le *medietà* conosciute dai pitagorici erano proporzioni stabilite fra tre numeri (interi); e cioè, se a, b, c sono tre numeri, la relazione:

I) $a - b = b - c$, che si può anche scrivere così

$$a - b : b - c = a : a,$$

esprime una *medietà aritmetica*, in cui b è il medio aritmetico.

Se invece

II) $a - b : b - c = a : b$, oppure $a : b = b : c$,

si ha una *medietà geometrica*, in cui b è il medio geometrico.

Se finalmente

III) $a - b : b - c = a : c$,

i tre numeri a, b, c formano una *medietà armonica*, in cui b è il medio armonico (9).

Le *medietà* aggiunte posteriormente, di cui si parla nei passi surriferiti, sono di forma analoga alle precedenti e sono definite dalle relazioni seguenti:

IV) $a - b : b - c = c : a$ (*contraria* della III);

V) $a - b : b - c = c : b$ (*quinta*);

VI) $a - b : b - c = b : a$ (*sesta*).

(9) Nella più antica terminologia alla *medietà geometrica* era riservato il termine speciale di *analogia*. Ma in seguito questo termine prese un significato più ampio, e tutte in generale le medietà (o proporzioni) venivan chiamate *analogie*.

Queste ultime tre, secondo PROCLO, sono state trovate da EUDOSSO. GIAMBlico nel passo riportato le attribuisce anche lui a EUDOSSO; ma altrove, parlando pure delle stesse tre proporzioni, non fa più allusione alcuna ad EUDOSSO. In un luogo (p. 113) dice che « fin dal tempo di ARCHITA e di IPPASO furono stimate degne di venire accettate anch'esse », e in un altro dice che « esse erano in uso già dal tempo di PLATONE sino a ERATOSTENE, avendone iniziato la scoperta i matematici ARCHITA ed IPPASO » (p. 116). Questa incertezza nelle testimonianze di GIAMBlico, se non deriva da lacune del testo, può spiegarsi ammettendo che a questo riguardo la tradizione non fosse più abbastanza sicura, già fin dal suo tempo (seconda metà del III sec. dell'E. v.). La cosa più verosimile è forse che EUDOSSO abbia appreso dal suo maestro ARCHITA le nuove *medietà*, che le abbia introdotte definitivamente nel suo insegnamento e trasmesse ai Greci, assegnando loro i nomi particolari che GIAMBlico ricorda.

8. PROCLO nel brano più volte ricordato soggiunge ancora: — καὶ τὰ περὶ τῆς τομῆς ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς ἀναλύσειν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος. — (« ... e sviluppò la dottrina riguardante la sezione cominciando da « ciò che aveva fatto Platone e servendosi per essa delle analisi »).

Queste parole contengono due notizie distinte:

- 1) che PLATONE si è occupato della *sezione*;
- 2) che EUDOSSO ha sviluppato i suoi studi servendosi delle *analisi*.

Il significato che si deve attribuire a queste notizie dipende dal significato che può avere la parola « sezione », ed è collegato a ciò che risulta circa le cognizioni e gli studi geometrici di PLATONE. Per quanto interessa la presente questione giova osservare che se PLATONE fu un promotore zelante dello studio della geometria e conoscitore abbastanza esperto delle teorie che si insegnavano al suo tempo, non risulta però con attendibile probabilità, che egli si sia direttamente occupato di studi geometrici. Perciò il significato di quelle notizie rimane da questo punto oscuro ed incerto.

L'uso del singolare: « τὰ περὶ τῆς τομῆς », ha fatto supporre (a BRETSCHNEIDER primieramente, che fu poi seguito da ALLMAN, KUENSSBERG, CANTOR: *Geschichte der Math.*, I) che si dovesse attribuire alla parola *τομή* un significato tutto particolare, e quindi che dovesse riferirsi a una speciale sezione; e naturalmente si pensò alla più conosciuta, e cioè alla sezione di una retta *in media ed extrema ragione*. Questa sezione, come è noto, consiste nel dividere un dato

segmento AB, mediante un punto C, in due parti BC, CA tali che il rettangolo contenuto da AB, BC sia uguale al quadrato costruito su CA (*sezione aurea*).

Questa sezione si trova eseguita nella prop. 11 del libro II degli *Elementi* di EUCLIDE. La soluzione adoperata è conforme ai procedimenti della teoria pitagorica della *applicazione delle aree*; ed è ammissibile che essa non fosse ignota alla scuola di PITAGORA. Nella prop. 30 del libro VI viene indicata un'altra soluzione, che è basata sulla teoria della similitudine. Lo studio della sezione viene poi ripreso nel libro XIII, le cui prime cinque proposizioni contengono altrettante relazioni metriche fra i segmenti di una retta divisa in media ed estrema ragione.

Nelle dimostrazioni di queste proposizioni si segue un metodo che, come quello del libro II, è strettamente geometrico; ma esse procedono indipendentemente da qualsiasi proposizione dello stesso libro. Non si ricorre neppure alla proposizione 11, che avrebbe permesso di ottenere una concisione e una uniformità notevolmente maggiore (10). Il procedimento seguito si basa invece sul *teorema dello gnomone* (enunciato in I, 43) e su nozioni di proporzionalità (prese dal libro VI). Ciò fa supporre in primo luogo che la loro scoperta sia avvenuta dopo il perfezionamento della teoria delle proporzioni; in secondo luogo fa l'impressione come se EUCLIDE le abbia prese da uno scritto a lui anteriore, e le abbia riportate senza che le loro dimostrazioni fossero rivedute e ricorrette secondo i procedimenti del libro II.

Di più, i manoscritti euclidei, di seguito a quelle cinque proposizioni, oltre la dimostrazione geometrica ora accennata, contengono per ciascuna di esse un'altra doppia dimostrazione per *analisi* e *sintesi*, procedimenti dei quali solo in questo punto si fa cenno negli *Elementi*. Tali aggiunte sono certamente interpolazioni posteriori ad EUCLIDE: però debbono essere sufficientemente antiche (risalgono forse al tempo di TEONE, o anche a un periodo precedente). Quelle cinque proposizioni, enunciate al principio del libro XIII, servono come lemmi per la teoria dei solidi regolari svolta nel libro stesso. Ora un'osservazione di PAPPO (*Collect.*, ed. HULTSCH, p. 410) conferma la notizia che « alcuni degli antichi » effettuarono le loro dimostrazioni relative ai cinque poliedri regolari mediante il « cosiddetto metodo analitico ».

(10) Ved. il commento di T. L. HEATH in *The thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. III, pp. 440-49, Cambridge, 1908.

Perciò non pare improbabile che lo Scoliaista, chiunque esso sia stato (o TEONE d'Alessandria, o anche ERONE) (11), abbia ripetuto dimostrazioni più antiche. Aggiungendo a questi fatti la notizia data da PROCLO, si può ritenere con molta verosimiglianza che le *analisi* e le *sintesi* quivi riportate derivino dalle investigazioni analitiche di EUDOSSO.

Tutte queste ragioni, possono bene accreditare l'interpretazione surriferita, che PROCLO cioè intendesse parlare soprattutto della sezione aurea. Allora, in quest'ordine di idee, i nuovi risultati portati da EUDOSSO alla teoria di quella sezione sarebbero appunto contenuti nelle prime cinque proposizioni del libro XIII (lasciando per ora impregiudicata la questione del contributo che può aver ad essi arrecato PLATONE) (12).

9. L'interpretazione su esposta della testimonianza di PROCLO non distrugge, naturalmente, altri fatti, dai quali può arguirsi che

(11) Secondo l'opinione di HEIBERG; cfr. *Euclidis op. om.*, vol. V (1888), p. LXXXIV, e *Paralipomena zu Euklid* in *Hermes*, 38, 1903.

(12) Riporto qui tradotto l'enunciato delle cinque proposizioni:

I) « Se una retta è divisa in estrema e media ragione, il quadrato che ha per lato il segmento maggiore aumentato della metà dell'intero (segmento) è uguale a cinque volte il quadrato della metà ». In simboli, se a è l'intero segmento, x la sua parte aurea, e quindi $x^2 = a(a - x)$, si ha

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

II) « Se il quadrato di una retta è il quintuplo del quadrato di una sua parte, allora, se il doppio di questa parte si divide in estrema e media ragione, il segmento maggiore sarà la parte residua della retta primitiva ». Cioè, sia x una parte di a , ed y la parte aurea di $2x$, per ciò $y^2 = 2x(2x - y)$. Se è anche $a^2 = 5x^2$, si avrà $y + x = a$.

III) « Se una retta è divisa in estrema e media ragione, il quadrato che ha per lato il segmento minore aumentato della metà del segmento maggiore è uguale a cinque volte il quadrato della metà del segmento maggiore ». Se cioè è $x^2 = a(a - x)$, sarà

$$\left[(a - x) + \frac{x}{2}\right]^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

IV) « Se una retta è divisa in estrema e media ragione, il quadrato di tutta la retta più il quadrato del segmento minore è uguale al triplo del quadrato del segmento maggiore ». Essendo $x^2 = a(a - x)$, si ha $a^2 + (a - x)^2 = 3x^2$.

V) « Se una retta è divisa in estrema e media ragione, e se si aggiunge ad essa una retta uguale al segmento maggiore, la retta risultante sarà divisa in estrema e media ragione e la retta primitiva sarà il segmento maggiore ». Essendo $x^2 = a(a - x)$, sarà pure $a^2 = (a + x)x$.

EUDOSSO non si limitò allo studio della sezione aurea. Sembra infatti che egli si sia occupato molto ampiamente della questione delle sezioni e che lo studio della sezione aurea fosse soltanto una parte di notevoli studi circa le *sezioni di una retta*, le *sezioni di curve con altre curve*, e circa le *sezioni piane dei solidi* (poliedri e corpi rotondi):

Si ricordi che egli fu discepolo di ARCHITA, il quale aveva grande familiarità con le figure solide, e che in modo speciale doveva aver richiamato l'attenzione sulla generazione dei più semplici solidi di rotazione, e sulle loro intersezioni (come è reso evidente dalla soluzione del problema di Delo da lui data e ricordata da EUTOCIO in ARCHIMEDIS, *op. om.*, ed. Heiberg, vol. III, p. 98). Di più, fu maestro di MENECHMO, che GEMINO (cfr. PROCLI *Comment.*, ed. Friedlein, p. 111), riconosce come inventore delle coniche. Ora, è probabile che a MENECHMO spetti in modo speciale il merito di aver distinto per il primo le tre specie di coniche e di averne definito i caratteri; ma non è improbabile che l'insegnamento di EUDOSSO abbia a lui spianato la via, e che siano stati precisamente gli studi del maestro sulle sezioni dei solidi quelli che ispirarono gli studi di MENECHMO sulle *triadi*. Perciò non sembra arrischiato affermare (come crede anche TANNERY, p. 76) che gli studi di EUDOSSO sulle sezioni dei corpi abbiano preparato la teoria delle coniche.

TANNERY, che ha tentato di ricostruire la soluzione del problema di Delo fatta da EUDOSSO, è riuscito a dare un'interpretazione assai suggestiva e plausibile delle *καμπύλαι γραμμαί* (13). Egli parte dal supposto, assai ragionevole, che EUDOSSO riprendesse la soluzione del suo maestro e si sforzasse di renderla più facilmente eseguibile. A tale scopo è naturale che pensasse di ricondurla innanzi tutto a costruzioni nel piano. Nella soluzione di ARCHITA vengono adoperate come superficie ausiliarie il cono, il toro e il cilindro. Ora, secondo TANNERY, la curva proiezione, sul piano di base del cilindro, dell'intersezione del cono e del toro possiede tutti i caratteri che dovrebbero appartenere alle *curve* di EUDOSSO. Questa curva proiezione può costruirsi per punti in modo semplicissimo; le intersezioni di essa col cerchio base del cilindro danno le due medie cercate. Si riesce così a dare un senso preciso alle *καμπύλαι γραμμαί*: erano curve simmetriche

(13) *Sur les solutions du problème de Delos par Archytas et par Eudoxe*, Mém. de la Soc. des Sc. de Bordeaux, 2 sér., t. II, 1878, pp. 773-783; riportata in P. TANNERY, *Mémoires scientifiques*, Paris, 1912, I, p. 53.

rispetto ad un asse e aventi ciascuna un'inflessione da ogni parte di quest'asse; erano curve di quarto grado simili di forma alla concoide, ma aventi inflessioni più palesi.

Altri notevoli contributi derivarono alla geometria dagli studi astronomici di EUDOSSO; da essi con particolare evidenza si deduce la speciale familiarità che doveva avere EUDOSSO con le figure spaziali e con le *curve intersezioni* di corpi rotondi. Il suo sistema astronomico è un sistema sostanzialmente geometrico, che suppone in chi lo ha costruito conoscenze profonde e non comuni, delle quali possiamo sorprendere i risultati finali, sebbene ci sfugga la via per cui furono raggiunti.

La novità più importante nel sistema eudossiano è il meccanismo impiegato per spiegare l'anomalia solare dei pianeti, e quindi l'introduzione di una nuova curva denominata ippopeda, ideata per rappresentare il moto di ogni singolo pianeta (14).

Bisognerebbe entrare in troppi particolari astronomici per illustrare l'origine di questa curva. Riassumendo le conclusioni dello SCHIAPARELLI, si può dire che l'ippopeda è la curva comune ad una sfera, ad un cilindro circolare retto ad essa tangente e ad un cono di rivoluzione; è una quartica gobba (analoga a quella impiegata da ARCHITA per risolvere il problema di Delo). Come proiezione piana di essa si ottiene una curva simile alla lemniscata di G. BERNOULLI. Ciò dà ragione del nome « ippopeda » con cui la ricorda SIMPLICIO (*Comment. in Aristot. II de Coelo*, ed. Brandis, Berolini, 1836, pp. 498-504): ippopeda infatti si diceva quella pista a forma di 8, più o meno allungata, su cui si facevan correre i cavalli per abituarli ad alternate conversioni dal lato destro e dal lato sinistro. PROCLO (pp. 112, 127, 128) classifica l'ippopeda fra le linee miste (cioè nè rette nè circolari); dice che è una curva segante se stessa e per forma simile a una delle spiriche, e precisamente alla spirica che si ottiene segnando la superficie di un toro con un piano tangente parallelo all'asse della superficie.

10. Concludendo, nella storia della geometria, EUDOSSO segna l'inizio di un nuovo periodo. La generalizzazione che egli fece della teoria delle proporzioni permise alla geometria d'inoltrarsi in campi fino allora inesplorati (teoria delle grandezze incommensurabili e degli irrazionali); il metodo di esaustione da lui definitivamente stabilito

(14) Cfr. la citata monografia dello SCHIAPARELLI, pp. 24-36.

e introdotto offrì ai geometri un mezzo potentissimo di ricerca e di dimostrazione, e chiuse vittoriosamente le penose controversie, cui avevan dato luogo i procedimenti dimostrativi ricorrenti al concetto d'infinito: giacchè esso permette di fare completamente a meno di questo concetto.

Forse può dirsi che con EUDOSSO la geometria esce finalmente dal periodo delle ricerche empiriche e dei tentativi. Con lui si inaugura la grande speculazione scientifica, che produsse le opere di EUCLIDE e di ARCHIMEDE, che attraverso gli studi di KEPLER e CAVALLIERI, le generalizzazioni di NEWTON e LEIBNIZ guidò alla scoperta dei procedimenti moderni.

Roma, novembre 1920.

ENRICO RUFINI.
