

# Über das Mertens'sche Postulat

$$|\sigma(n)| \leq \sqrt{n}.$$

Von V. Furlan in Göttingen.

In einer vor kurzem erschienenen Schrift<sup>1)</sup> hat Herr Landau die gegenseitige Beziehung der Gleichungen

$$(1) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

$$(2) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

$$(3) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\mu(x)}{x} = 0$$

$$(4) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\mu(x) \log x}{x} = -1$$

$$(5) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\sigma(x)}{x} = 0$$

$$(6) \quad \lim_{x=\infty} \frac{Q(x) - \frac{6}{\pi^2} x}{\sqrt{x}} = 0$$

vertieft. Dabei bedeutet  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen  $\leq x$ ,  $\vartheta(x)$  die Summe ihrer natürlichen Logarithmen,  $\mu(x)$  die bekannte

Mertens'sche Funktion,  $\sigma(x) = \sum_1^x \mu(k)$  und  $Q(x) = \sum_1^x \mu^2(k)$ . Da-

bei zeigt Herr Landau, daß es genügt, die Gleichung (4) zu beweisen, um die Richtigkeit sämtlicher anderen ohne Zuhilfenahme der Sätze über die  $\zeta$ -Funktion zu folgern. Indessen ist es bisher nicht gelungen, die Gleichung (4) zu beweisen, ohne von den neueren Untersuchungen der Herren Hadamard und de la Vallée-Poussin über die Riemann'sche  $\zeta$ -Funktion Gebrauch zu machen.

<sup>1)</sup> Sitzungsberichte der Wiener Akademie: Bd. 115, Abt. II a, S. 589 ff.

Doch hat Herr Mertens<sup>1)</sup> durch Annahme der Ungleichung

$$|\sigma(n)| < \sqrt{n} \quad (n > 1)$$

welche empirisch im Gebiete der ersten 500.000 Zahlen bestätigt ist, die Relation (4) bewiesen.

Analoge Verhältnisse liegen nun in einem beliebigen Zahlkörper vor.<sup>2)</sup> Definieren wir die ideal-theoretische Funktion  $\mu(i) = 1$  für das Einheitsideal,  $\mu(i) = (-1)^\rho$ , wo  $\rho$  die Anzahl der verschiedenen Primideale ist, die in  $i$  aufgehen, für jedes quadratfreie Ideal, und endlich  $\mu(i) = 0$  für jedes Ideal, welches quadratische Teiler enthält, und setzen wir

$$\sigma(n) = \sum_{Ni \leq n} \mu(i)$$

wo  $i$  alle Ideale durchläuft, deren Norm  $\leq n$  ist, dann gelingt es durch Annahme des nun erweiterten Mertens'schen Postulates

$$|\sigma(n)| < \sqrt{n} \quad (n > 1)$$

die Folgerung

$$\sum_{Ni=1}^{\infty} \frac{\mu(i) \log Ni}{Ni} = -\frac{1}{\alpha}$$

zu ziehen. Nennen wir  $F(n)$  die Anzahl der Darstellungen der Zahl  $n$  als Norm eines Ideals eines Körpers vom Grade  $k$ , so ist  $\alpha$  durch die Weber'sche<sup>3)</sup> Relation

$$\sum_{n=1}^y F(n) = \alpha y + O\left(y^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)$$

völlig bestimmt. Zweck der folgenden Zeilen ist es, diesen Zusammenhang zwischen

$$|\sigma(n)| < \sqrt{n} \quad (n > 1)$$

und

$$\sum_{Ni=1}^{\infty} \frac{\mu(i) \log Ni}{Ni} = -\frac{1}{\alpha}$$

zu erweisen. Es soll dies dadurch geschehen, daß das von Herrn Mertens<sup>4)</sup> für den gewöhnlichen Rationalitätsbereich angegebene Verfahren auf einen beliebigen Zahlkörper ausgedehnt wird.

<sup>1)</sup> Sitzungsberichte der Wiener Akademie: Bd. 106, Abt. II a, S. 761 ff.

<sup>2)</sup> Landau, l. c.

<sup>3)</sup> Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-physik. Klasse 1896, S. 275 ff.

<sup>4)</sup> Mertens, l. c.

2.

Zunächst werde gezeigt, daß die Reihe (4) konvergiert, wenn die Bedingung  $|\sigma(n)| < \sqrt{n}$  erfüllt ist. In der Tat hat der Rest  $\rho_s$  die Form

$$\rho_s = \lim_{t=\infty} \{f(s) - f(t)\}$$

wenn wir setzen

$$\sum_{Ni \leq x} \frac{\mu(i) \log Ni}{Ni} = f(x)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} f(s) - f(t) &= \sum_{t \geq Ni > s} \mu(i) \frac{\log Ni}{Ni} \\ &= \frac{\sigma(s+1) - \sigma(s)}{s+1} \log(s+1) + \frac{\sigma(s+2) - \sigma(s+1)}{s+2} \log(s+2) + \dots \\ &\quad + \frac{\sigma(t) - \sigma(t-1)}{t} \log t \end{aligned}$$

da die Differenz  $\sigma(a) - \sigma(a-1)$  so oft gleich Null ist, als  $a$  sich überhaupt nicht als Norm eines Ideals im Körper  $\kappa$  darstellen läßt.

Fassen wir nun die Glieder, die zu demselben Argument von  $\sigma$  gehören, zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(s) - f(t) &= -\frac{\sigma(s)}{s+1} \log(s+1) + \frac{\sigma(t)}{t} \log t + \\ &\quad + \sigma(s+1) \left[ \frac{\log(s+1)}{s+1} - \frac{\log(s+2)}{s+2} \right] + \\ &\quad + \sigma(s+2) \left[ \frac{\log(s+2)}{s+2} - \frac{\log(s+3)}{s+3} \right] + \\ &\quad + \dots + \sigma(t-1) \left[ \frac{\log(t-1)}{t-1} - \frac{\log t}{t} \right]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist aber nach unserer Voraussetzung kleiner als

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{s}}{s+1} \log(s+1) + \frac{\sqrt{t}}{t} \log t + \frac{\sqrt{s+1} \log(s+2)}{(s+1)(s+2)} + \\ \frac{\sqrt{s+2} \log(s+3)}{(s+2)(s+3)} + \dots + \frac{\sqrt{t-1} \log t}{(t-1)t}. \end{aligned}$$

Setze ich nun

$$\begin{aligned} R(a) &= \log a \cdot a^{-\frac{3}{2}} + \log(a+1) \cdot (a+1)^{-\frac{3}{2}} + \\ &\quad + \log(a+2) \cdot (a+2)^{-\frac{3}{2}} + \dots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

dann ist

$$\rho_s < \frac{\sqrt{s}}{s+1} \log(s+1) + R(s)$$

und daher

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho_s = 0$$

### 3.

Es wäre nun nicht schwer, auf Grund der Gleichung

$$\sum_{Ni=1}^{\infty} \frac{\mu(i) \log Ni}{Ni^s} = \frac{\zeta'_x(s)}{\zeta_x^2(s)}$$

wo  $\zeta_x$  die zum Körper vom Grade  $x$  gehörige  $\zeta$ -Funktion bedeutet, die Richtigkeit von

$$\sum_{Ni=1}^{\infty} \frac{\mu(i) \log Ni}{Ni} = -\frac{1}{\alpha}$$

aus Stetigkeitsbetrachtungen zu folgern. Aber es soll eben gezeigt werden, daß die Annahme des Mertens'schen Postulates die Theorie der  $\zeta$ -Funktion ganz entbehrlich macht. Zu diesem Zwecke zeigen wir, daß die Grundlagen des Mertens'schen Beweises auch im allgemeinen Falle richtig sind.

Es bezeichne  $u(i)$  eine beliebige idealtheoretische Funktion, dann ist offenbar

$$\sum_{Ni \leq t} \sum_{\delta, i} \mu(\delta) u(N\delta) = \sum_{Ni \leq t} \mu(i) E\left(\frac{t}{Ni}\right) u(Ni) \quad (a)$$

wo sich links die Summe über alle Teiler  $\delta$  der Ideale, deren Norm  $\leq t$  ist, erstreckt und rechts  $E(x)$  nach Legendre die größte in  $x$  enthaltene ganze Zahl bedeutet. In der Tat kommt links jedes Glied von der Form  $\mu(Ni)$  ebenso oft vor als eben  $E\left(\frac{t}{Ni}\right)$  anzeigt. Ist hier  $u(i) = 1$  für ein beliebiges Ideal  $i$ , dann ist

$$\sum_{\delta, i} \mu(\delta) = 1 \text{ oder } 0$$

je nachdem  $i$  ein Einheitsideal ist oder nicht, und die Gleichung (a) geht über in die bekannte Lipschitz'sche Relation<sup>1)</sup>

$$\sum_{Ni \leq t} \mu(i) E\left(\frac{t}{Ni}\right) = 1$$

<sup>1)</sup> Vgl. auch: E. Landau, „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebischef'schen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale.“ Journal für reine und angewandte Mathem., Bd. 125, 1903, S. 118.

für beliebige Körper. Ist hingegen

$$u(Ni) = \log Ni$$

dann ist für jedes Primideal, bzw. für jede Potenz eines Primideals

$$\sum_{\delta, i} \mu(\delta) \log N\delta = -\log Ni$$

für ein beliebig sonst zusammengesetztes Ideal aber

$$\sum_{\delta, i} \mu(\delta) \log N\delta = 0$$

und die Relation (a) geht über in

$$\sum_{Np \leq t} \nu \log Np = - \sum_{Ni \leq t} \mu(i) E\left(\frac{t}{Ni}\right) \log Ni$$

wo  $\nu$  die höchste Potenz von  $Np$  ist, die in  $t$  aufgeht und  $p$  alle Primideale durchläuft, deren Norm  $\leq t$  ist.

Führen wir die Bezeichnung

$$\Theta(t) = \sum_{Np \leq t} \nu \log Np$$

ein, so gilt also

$$\Theta(t) = - \sum \mu(i) E\left(\frac{t}{Ni}\right) \log Ni.$$

Für die Funktion  $\Theta(t)$  hat aber Herr Poincaré<sup>1)</sup> als Verallgemeinerung einer bekannten Legendre'schen Formel bewiesen

$$\Theta(t) = \sum_{Np \leq t} \log Np \left( E\left(\frac{t}{Np}\right) + E\left(\frac{t}{Np^2}\right) + \dots \right).$$

Bezeichnen wir nun mit  $\{[x]\}!$  das Produkt

$$1^{F(1)} . 2^{F(2)} . 3^{F(3)} \dots [x]^{F(x)}$$

dann ist, wenn wir die Glieder nach Primzahlpotenzen ordnen

$$\Theta(t) + \Theta\left(\frac{t}{2}\right) + \Theta\left(\frac{t}{3}\right) + \dots + \Theta\left(\frac{t}{t}\right) = \{t\}!$$

Diese Formel entspricht ganz der bekannten Tschebischef'schen Formel und es handelt sich hier nur noch darum,  $\{t\}!$  asymptotisch auszuwerten. Zu diesem Zwecke benutzen wir den folgenden von Herrn Bortolotti<sup>2)</sup> aufgestellten und bewiesenen Satz:

<sup>1)</sup> Journal de mathém. pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 8, S. 49 ff.

<sup>2)</sup> Atti della R. Accad. d. Lincei, 1906, pag. 545.

„Bleibt für unendlich wachsendes  $n$  die Veränderliche  $b_n$  monoton und ist die Summe

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

unendlich von endlichem Grade, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

wenn der letzte Grenzwert existiert und unabhängig davon, ob  $\lim_{n=\infty} a_n$  existiert.“

Setzen wir also

$$a_x = F(x), \quad b_x = \log x$$

und berücksichtigen wir die schon oben erwähnte Weber'sche Relation

$$\sum_{n=1}^t F(n) = \alpha t + O\left(t^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

dann erhalten wir asymptotisch

$$\log \{t\}! = \log t! + \alpha$$

$$\log \{t\}! = \alpha \log \sqrt{2\pi} + \alpha t \log t - \alpha t + \alpha \frac{1}{2} \log t + \frac{\alpha}{12t}$$

eine Formel, welche ganz der Stirling'schen entspricht.

Daraus folgt bis auf Größen von der Ordnung  $\log t$

$$\log \frac{\{t\}!}{\left\{E\left(\frac{t}{2}\right)\right\}! \left\{E\left(\frac{t}{2}\right)\right\}!} = \frac{t \log 2}{\alpha}$$

woraus mit Herrn Mertens sofort

$$\sum_{Ni=1}^{\infty} \frac{\mu(i) \log Ni}{Ni} = -\frac{1}{\alpha}$$

geschlossen werden kann.