SUR UNE NOUVELLE CLASSE DE SURFACES.

(2ème PARTIE).

Par M. **Georges Tzitzéica** (Bucarest).

Adunanza del 14 marzo 1909.

Dans la première partie de ce travail [1]) j'ai étudié les surfaces S dont *la courbure totale est proportionnelle à la quatrième puissance de la distance d'un point fixe au plan tangent.*

J'avais mis alors en évidence deux propriétés curieuses de ces surfaces définies par une propriété essentiellement métrique, à savoir, de conserver cette définition métrique après une transformation *affine* et après une transformation *duale.* J'ai même donné dans la Note citée (pages 184 et 185) l'origine de ces propriétés.

Depuis, je me suis posé un autre problème: *remplacer la définition métrique des surfaces S par une définition affine.* La propriété que j'avais démontrée indiquait la possibilité du problème, que j'ai réussi à résoudre.

Je retrouverai tout d'abord les résultats de la première Note par une méthode plus expéditive, plus générale et mieux appropriée à la question. J'ajouterai la recherche des surfaces S de révolution. Je donnerai ensuite la démonstration du théorème que j'ai en vue.

1. Considérons une surface quelconque rapportée à ses lignes asymptotiques (u, v). Alors, les coordonnées x, y, z d'un point mobile sur la surface, que je suppose des fonctions de u et v continues et admettant des dérivées partielles au moins jusqu'au troisième ordre pour tout point ordinaire de la surface, sont des solutions linéairement indépendantes d'un système de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + b\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = a''\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + b''\dfrac{\partial \theta}{\partial v}. \end{cases}$$

On peut ajouter à ce système l'équation suivante

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = a'\frac{\partial \theta}{\partial u} + b'\frac{\partial \theta}{\partial v} + h\theta,$$

[1]) *Voir* ces Rendiconti, t. XXV (1er semestre 1908), pp. 180-187.

a', b', h étant des fonctions de u et v continues pour tout point de la surface dont le plan tangent ne passe pas par l'origine.

Or, le système des équations (1) et (2) définit, non seulement la surface donnée, mais aussi toutes celles que l'on en déduit par des transformations *affines* laissant l'origine invariable.

On peut dire alors que le système (1) et (2) est naturellement adapté pour l'étude des propriétés affines des surfaces, en particulier pour celles des surfaces S.

2. Nous allons construire maintenant un système analogue au précédent pour une surface polaire réciproque de celle que nous venons de considérer, par rapport à une sphère de rayon 1 et ayant son centre à l'origine.

Puisque, d'après une propriété connue (que l'on pourrait d'ailleurs démontrer ici directement), sur la nouvelle surface les courbes (u, v) sont aussi des asymptotiques, il en suit que les coordonnées ξ, η, ζ vérifient un système de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} &= \alpha\frac{\partial\omega}{\partial u} + \beta\frac{\partial\omega}{\partial v}\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} &= \alpha'\frac{\partial\omega}{\partial u} + \beta'\frac{\partial\omega}{\partial v} + k\omega\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} &= \alpha''\frac{\partial\omega}{\partial u} + \beta''\frac{\partial\omega}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on tient compte des relations

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 1, \qquad \xi\frac{\partial x}{\partial u} + \eta\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad \xi\frac{\partial x}{\partial v} + \eta\frac{\partial y}{\partial v} + \zeta\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

que l'on dérive successivement en utilisant les équations (1), (2) et (3), on trouve

$$(4)\quad \alpha = a - 2b',\quad \beta = -b,\quad \alpha' = -a',\quad \beta' = -b',\quad k = h,\quad \alpha'' = -a'',\quad \beta'' = b'' - 2a'.$$

On peut appeler le système (3) *adjoint* du système (1) et (2).

3. Cherchons maintenant à l'aide du système (1) et (2) les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface donnée soit une surface S. Or, la courbure totale est donnée par

$$K = -\frac{D'^2}{H^2} = -\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}}{H^4}, \qquad H^2 = EG - F^2,$$

l'expression entre deux barres indiquant un déterminant réduit à sa première ligne; la distance p de l'origine au plan tangent par

$$p = \frac{\begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}}{H}.$$

Donc on a, si la surface est S,

$$\frac{K}{p^4} = -\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}^4} = \text{const.}$$

et en tenant compte de (2), on déduira

$$\begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \text{const.}\, h.$$

En prenant la dérivée logarithmique par rapport à u et v, on trouve

$$(5) \qquad a + b' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u}, \qquad a' + b'' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v},$$

où j'ai supposé implicitement $h \neq 0$, ce qui est légitime, autrement le système (1) et (2) définira un réseau plan.

Or, les conditions d'intégrabilité des équations (1) et (2) donnent, entre autres, les relations suivantes

$$a - b' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u}, \qquad b'' - a' = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}$$

et alors les (5) conduisent à

$$a' = 0, \qquad b' = 0,$$

qui sont ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface soit S. On constate en même temps que *les surfaces affines d'une surface S sont aussi des surfaces S*, et on voit des relations (4) *qu'il en est de même des surfaces duales.*

Si on laisse de côté les surfaces réglées et en tenant compte des conditions d'intégrabilité et des relations $a' = b' = 0$, le système des équations (1) et (2) devient (voir la Note citée, p. 186)

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = h\theta \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \end{cases}$$

et son système adjoint sera

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial u}\dfrac{\partial \omega}{\partial u} - \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \omega}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = h\omega \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial \omega}{\partial u} + \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial \omega}{\partial v}, \end{cases}$$

h étant une solution de l'équation

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} = h - \frac{1}{h^2}.$$

4. Nous allons chercher à l'aide des équations précédentes les surfaces S qui sont en même temps de révolution.

On pourrait étudier la question directement et introduire $z = \varphi(x^2 + y^2)$ dans l'équation aux dérivées partielles du second ordre que vérifie z comme fonction de x

et de y et obtenir une équation différentielle ordinaire du second ordre pour la fonction φ. Mais, l'intégration de cette dernière équation n'est pas aisée. Aussi je préfère l'étudier à l'aide du système (I).

Il s'agit de choisir la fonction h, vérifiant l'équation (6), de manière que le système (I) admette trois intégrales liées par une relation de la forme

$$x^2 + y^2 = 2f(z).$$

Si l'on prend les dérivées successives des deux membres par rapport à u et à v et si l'on tient compte de (I), on obtient, entre autres, les égalités suivantes

$$2zf'(z) - 4f(z) = f'''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^3,$$

$$2zf'(z) - 4f(z) = f'''(z)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^3.$$

Or, les premiers membres et par conséquent aussi $f'''(z)$ ne peuvent pas être nuls (autrement la surface se réduirait à un cône de révolution); il faut donc avoir

$$\frac{\partial z}{\partial u} = m\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad m^3 = 1,$$

et en remplaçant u par mu et h par mh, on peut réduire m à être égal à 1. Alors, z est une fonction de $u + v$, et la deuxième équation de (I) prouve que h aussi est une fonction seulement de $\alpha = u + v$, laquelle d'après (6) vérifie l'équation suivante

$$(7) \qquad hh'' = h'^2 + h^3 - 1.$$

Maintenant, h étant une intégrale de cette équation, il s'agit d'intégrer le système correspondant (I). A cet effet, je fais le changement de variables suivant: je pose $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$ et le système (I) devient

$$(\mathrm{I}') \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} &= \frac{h'+1}{2h}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{h}{2}\theta \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\partial\beta} &= \frac{h'-1}{2h}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} &= \frac{h'+1}{2h}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - \frac{h}{2}\theta. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières s'intègrent séparément et donnent

$$\theta = B_1 e^{\int\frac{h'-1}{2h}d\alpha} + B_2 e^{\int\frac{h^2}{h'+1}d\alpha}, \qquad \theta = Be^{\int\frac{h'-1}{2h}d\alpha} + A,$$

A étant une fonction de α, et les B des fonctions de β. Par comparaison entre les deux expression de θ on déduit

$$B_1 = B, \qquad B_2 = \text{const.} = C_1, \qquad A = C_1 e^{\int\frac{h^2}{h'+1}d\alpha}$$

et alors introduisant l'expression qui résulte

$$\theta = Be^{\int\frac{h'-1}{2h}d\alpha} + C_1 e^{\int\frac{h^2}{h'+1}d\alpha}$$

dans la dernière équation de (I'), on trouve pour B l'équation

$$B'' = \frac{h'^2 - 1 - 2h^3}{4h^2} . B,$$

où le facteur de B est constant en vertu de l'équation (7) que vérifie h. Je suppose cette constante positive et alors on a

$$B'' + k^2 B = 0,$$

d'où

$$B = C_2 \cos k\beta + C_3 \sin k\beta,$$

et par conséquent

$$\theta = C_2 \cos k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha} + C_3 \sin k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha} + C_1 e^{\int \frac{h^2}{h'+1} d\alpha}$$

est l'intégrale générale du système (I'). On déduit les solutions linéairement indépendantes suivantes

$$x = \cos k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad y = \sin k\beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad z = e^{\int \frac{h^2}{h'+1} d\alpha},$$

qui donnent une double infinité de surfaces de révolution, parce que d'après (7) h dépend de deux constantes arbitraires. Nous avons résolu le problème de la recherche des surfaces S de révolution et même un plus général. En effet, par une transformation affine on en déduit les surfaces dont les sections faites par des plans parallèles sont des coniques homothétiques et ayant les centres en ligne droite, et réciproquement. Un cas singulier de ces surfaces s'obtient lorsque les coniques homothétiques sont des paraboles. Ce cas a été implicitement exclu de notre calcul en supposant la constante k différente de zéro. Si l'on suppose $k = 0$, l'intégrale générale de (I') n'a plus la forme donnée plus haut, parce que les deux exponentielles qui y entrent deviennent égales. Si on recommence l'intégration, on trouve l'intégrale générale suivante

$$\theta = e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha} \left[C_1 \left(\beta^2 + \int \frac{4h}{h'+1} d\alpha \right) + C_2 \beta + C_3 \right]$$

et on en tire la surface

$$x = \left(\beta^2 + \int \frac{4h}{h'+1} d\alpha \right) e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad y = \beta\, e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}, \qquad z = e^{\int \frac{h'-1}{2h} d\alpha}$$

coupée par les plans $z = $ const. suivant des paraboles homothétiques.

5. J'ai démontré aussi que, en dehors des surfaces de révolution, les normales d'une surface S ne peuvent pas appartenir à un complexe linéaire. En effet, si α, β, γ sont des paramètres directeurs de la normale et si l'on suppose l'équation du complexe réduite, on devra avoir

$$(8) \qquad \alpha y - \beta x = m\gamma, \qquad m = \text{const.}$$

Si l'on suppose de plus

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1,$$

alors α, β, γ sont des solutions du système (II) et en dérivant successivement (8), en tenant compte de (I) et (II), on trouve finalement

$$m h \frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0, \qquad m h \frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0.$$

Or, h étant différent de zéro, γ ne pouvant pas être constant (autrement un calcul simple prouverait que la surface se réduit à un plan), il faut que l'on ait $m = 0$, ce qui prouve que la surface S en question est de révolution.

6. Je reviens maintenant à la question et je considère une ligne asymptotique $u =$ const. d'une surface S, et en chaque point de cette ligne je mène la tangente à l'autre ligne asymptotique $v =$ const. qui y passe. Toutes ces tangentes forment une surface réglée R_1, définie par les équations

$$(9) \qquad x_1 = x + t\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad y_1 = y + t\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad z_1 = z + t\frac{\partial z}{\partial u},$$

où x_1, y_1, z_1 sont, le long de R_1, des fonctions de v et de t.

L'équation du plan tangent en un point (v, t) de R_1 est

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + htx \right| = 0,$$

en réduisant toujours le déterminant à sa première ligne, ou

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| + ht \left| X \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad x \right| = 0.$$

Ce plan devient pour $t = \infty$

$$\left| X \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad x \right| = 0$$

et l'on voit qu'il passe par l'origine. Ainsi donc, *toutes les surfaces R_1 ont pour développables asymptotiques des cônes ayant tous l'origine pour sommet.*

Un calcul analogue prouve que l'on a la même propriété pour les surfaces réglées R_2 déduites des lignes asymptotiques $v =$ const., de la même manière que les R_1 ont été déduites des courbes $u =$ const.

7. Je vais démontrer maintenant que la propriété *affine* que nous venons de trouver pour les surfaces S, caractérise ces surfaces.

Supposons qu'une surface définie par le système (1) et (2) ait pour les surfaces R_1 et R_2 qui correspondent à ses lignes asymptotiques des développables asymptotiques réduites à des cônes de même sommet, qui sera pris pour origine. Le plan tangent en un point quelconque (v, t) d'une surface R_1, qui reste définie par les équations (9), a pour équation

$$\left| X - x - t\frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + t\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right| = 0$$

ou, en tenant compte des équations (1) et (2),

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} + t\left(b'\frac{\partial x}{\partial v} + hx\right) \right| = 0;$$

et en décomposant le déterminant, on a

$$\left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| + t \left| X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad b'\frac{\partial x}{\partial v} + hx \right| = 0,$$

qui pour $t = \infty$ devient

$$(10) \qquad \left|X - x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad b'\frac{\partial x}{\partial v} + bx\right| = 0.$$

Comme $\left|x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v}\right|$ ne peut être constamment nul pour la surface considérée, autrement elle se réduirait à un cône, il résulte que le plan asymptote (10) de R_1 ne passe par l'origine que si l'on a $b' \equiv 0$; de même, si on considère les surfaces R_2, on tire $a' \equiv 0$. Les identités $a' \equiv b' \equiv 0$ prouvent bien que la surface considérée est une surface S.

8. Le théorème précédent appliqué aux surfaces réglées prend une autre forme. Remarquons en effet que dans ce cas les surfaces R_1, par exemple, se réduisent à la surface considérée elle-même, et que les surfaces R_2 sont les quadriques osculatrices le long de chaque génératrice de la surface. Le théorème précédent devient alors: *Une surface réglée est une surface S si sa développable asymptotique se réduit à un cône et si toutes les quadriques osculatrices ont le sommet de ce cône pour centre.*

Ce qu'il y a de remarquable c'est que, si une surface réglée possède seulement la propriété affine d'avoir sa développable asymptotique réduite à un cône, elle peut aussi être définie, comme les surfaces S, par une propriété métrique, à savoir, le rapport $K:p^4$ envisagé plus haut reste constant le long de toute génératrice de la surface, mais il varie d'une génératrice à une autre.

En effet, supposons la surface réglée définie par

$$x = a + lu, \qquad y = b + mu, \qquad z = c + nu,$$

a, b, c, l, m, n, étant des fonctions d'un paramètre t. On a alors

$$\frac{K}{p^4} = -\frac{|l' \quad l \quad a'|^2}{|a \quad l \quad a' + l'u|^4},$$

où les accents désignent la dérivation par rapport à t. Cette expression est indépendante de u si l'on a

$$|a \quad l \quad l'| = 0.$$

Or celle-ci est la condition pour que les plans asymptotes passent par l'origine. Si l'on écrit que le même rapport est aussi indépendant de t, on retrouve les surfaces S réglées données explicitement au § 8 de la première partie de ce travail.

Enfin j'ajoute que l'on peut donner pour les surfaces S réglées une propriété caractéristique à l'aide des lignes flecnodales de ces surfaces. Mais sur ce point je me réserve de revenir à une autre occasion.

Bucarest, le 26 février 1909.

G. TZITZÉICA.