

**IV. Bemerkungen zu Hrn. E. Lommel's Theorie der Doppelbrechung<sup>1)</sup>, der Drehung der Polarisationsebene<sup>2)</sup> und der elliptischen Doppelbrechung<sup>3)</sup>; von W. Voigt.<sup>4)</sup>**

Die in der Ueberschrift genannten Theorien sind auf dieselben Vorstellungen und Gleichungssysteme gegründet; die Einwände, die ich im Folgenden geltend zu machen mir erlauben werde, sind demgemäss gegen alle in gleicher Weise gerichtet. Sie beziehen sich sämmtlich auf die Hypothesen und Formeln, welche die Bewegung der durch die Aethertheilchen zum Mitschwingen veranlassten ponderablen Molecüle betreffen.

1) Hr. Lommel macht die Annahme, dass die Aether- und Körpermolecüle aufeinander durch Reibungskräfte wirken, deren Componenten dem Unterschiede der betreffenden Geschwindigkeitscomponenten proportional sind.

Bezeichnet für ein Volumenelement  $m$  die darin vorhandene ponderable Masse,  $\mu$  die Aethermasse, sind  $xyz$  die Coordinaten der gemeinsamen Ruhelage des Schwerpunktes von Körper- und Aethermasse,  $x'y'z'$  und  $\xi'\eta'\zeta'$  die Schwerpunktscoordinaten während der Bewegung, so sind die Componenten der Reibungskräfte in die Differentialgleichungen folgendermassen eingeführt.<sup>5)</sup> Es gilt für die ponderable Masse:

1) Lommel, Wied. Ann. **6.** p. 55. 1879.

2) Lommel, Wied. Ann. **14.** p. 523. 1881.

3) Lommel, Wied. Ann. **15.** p. 378. 1882.

4) Die Bedenken, welche ich seit längerer Zeit gegen die in ihren Resultaten so glücklichen optischen Theorien des Hrn. Lommel hege, stelle ich im Folgenden zusammen, weil dieselben merkwürdigerweise bisher noch nicht von kompetenterer Seite geltend gemacht worden sind. Um die Discussion zu vereinfachen, habe ich eine erste Formulirung derselben Hrn. Prof. Lommel direct zugesandt und trete erst an die Oeffentlichkeit, nachdem durch dessen freundliche Erwiderung eine so erhebliche Meinungsverschiedenheit constatirt worden ist, dass eine Einigung auf dem Wege der Correspondenz kaum mehr zu erwarten ist.

5) Vergl. alle genannten Abhandlungen.

$$m \frac{\partial^2 (x' - x)}{\partial t^2} = \dots - 2m\nu \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \right),$$

und für die Aethermasse:

$$\mu \frac{\partial^2 (x - \xi')}{\partial t^2} = \dots + 2m\nu \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \right).$$

Da die respectiven Beschleunigungen  $\partial^2 x' / \partial t^2$  und  $\partial^2 \xi' / \partial t^2$  sind, so sind die durch die Reibung hervorgebrachten Antheile an denselben, mit gleichem Vorzeichen eingeführt, im Widerspruch mit dem mechanischen Grundsatz der entgegengesetzten Gleichheit von actio und reactio. Oder mit anderen Worten, die Wechselwirkung zwischen Materie und Aether hat einen solchen Werth erhalten, dass sie dem gemeinsamen Schwerpunkt des Systems (er sei  $\xi \eta \zeta$ ) eine Beschleunigung ertheilt, denn es folgt:

$$(m + \mu) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t^2} = \dots - 4m\nu \left( \frac{\partial \xi'}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \right).$$

Offenbar muss in der Formel für die Bewegung der ponderablen Masse das Reibungsglied das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten.

2) Abgesehen aber auch von Vorstehendem erscheint die Einführung der Reibungswirkung überhaupt misslich. Nicht in erster Linie wegen der unleugbaren Schwierigkeit für die Vorstellung oder genauer, dem Mangel an Analogien in der sichtbaren Welt — wenn ich gleich gestehe, dass ich diesen Punkt nicht gering achte —, sondern wegen einiger Folgerungen, zu denen ihre Einführung Gelegenheit gibt. Um dieselben zu ziehen, muss ich mit einigen Worten auf das Verhältniss der Grössen  $m$  und  $\mu$ , oder das der Dichtigkeiten der Materie und des Aethers eingehen.

Wir wissen, dass die Weltkörper im freien Aether nur einen fast unmerklichen Widerstand bei ihrer Bewegung erleiden, und ferner, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether, d. h. das Verhältniss seines Elasticitätscoefficienten zu seiner Dichtigkeit einen ausserordentlich grossen Werth besitzt. Diese beiden That-sachen deuten wir übereinstimmend dahin, dass der Aether

eine sehr kleine Dichtigkeit hat, gewiss nicht mit voller Strenge, aber doch mit einem hohen Grad von Wahrscheinlichkeit, wie die fast allgemeine Annahme dieser Folgerung bezeugt. In der That, wie wir uns die Bewegung der Weltkörper im freien Aether denken mögen, ob wir letzteren zwischen den ponderablen Moleculen hindurchfliessend annehmen, wie durch die Maschen eines Netzes, oder (weniger im Sinne der Elasticitätstheorie) den ganzen Massen ausweichend, wie eine Flüssigkeit einem dichten Körper, — die Bewegung des Körpers wird eine irgendwie beschaffene des Aethers veranlassen und demgemäss einen Verlust an lebendiger Kraft erleiden, der nur unmerklich wird, wenn die Dichte des Aethers sehr klein gegen die jener Körper ist.

Wenn nun auch diese Folgerung im Allgemeinen, d. h. ohne Annahme über das Gesetz der Wechselwirkung zwischen Aether und Materie nur ein „aperçu“ ist<sup>1)</sup>, so gewinnt sie zwingende Nothwendigkeit in der Theorie des Hrn. Lommel, welche für dieselbe Reibungskräfte einführt. Man überzeugt sich an einfachen Beispielen leicht, dass unter solchen Wirkungen die Bewegung der Materie im Allgemeinen erhebliche Widerstände erleidet, die (da die Reibungsconstante selbst nicht verschwindend gesetzt werden kann, weil sie zur Erklärung der optischen Erscheinungen gebraucht wird) nur mit verschwindendem Verhältniss der Dichte von Aether und Materie unmerklich wird.

Daher ist in Hrn. Lommel's Theorie die Annahme einer gegenüber derjenigen ponderabler Körper sehr kleinen Dichte des Aethers unerlässlich, und es steht mit derselben keineswegs im Widerspruch, dass ein Gas durch fortgesetzte Verdünnung in einen Zustand gebracht werden kann, in welchem seine Dichte noch kleiner als die des Aethers ist (da sie ja endlich gleich Null werden kann); jener Zustand erfordert eben einen fast unendlichen Grad der Verdünnung.

Diese Vorbemerkungen waren nöthig, um Einwände

---

1) Beiläufig weise ich auf den Versuch S. W. Thomson's hin, die Dichtigkeit des Aethers durch die lebendige Kraft der Sonnenstrahlen zu bestimmen. *Compt. rend.* **39.** p. 529. 1854. *Phil. Mag.* (4) **9.** p. 36. 1854.

gegen die folgenden Betrachtungen nach Möglichkeit im voraus zu erledigen.

Wendet man, um ein möglichst übersichtliches Resultat zu erhalten, die obigen Differentialgleichungen auf den einfachsten Fall eines isotropen Körpers an und lässt eine transversale Welle sich in demselben parallel der  $Z$ -Axe fortpflanzen, so gelten, falls in gebräuchlicher Weise die Verrückungen  $x' - x = U$ ,  $\zeta' - x = u$  gesetzt werden, nach Hrn. Lommel die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2m\nu \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right), \\ m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -2km \frac{\partial U}{\partial t} - mp^2 U - 2m\nu \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right).\end{aligned}$$

Dies ergibt, dass, weil  $m$  gross gegen  $\mu$  ist,  $\partial U / \partial t$  sehr klein gegen  $\partial u / \partial t$  sein muss, und dass eine Vernachlässigung des ersteren neben letzterem nur unmerklich die Resultate modificiren kann. In diesem Falle bleibt also nur:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2m\nu \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Setzt man hierin mit Hrn. Lommel:

$$u = e^{-\left(K + \frac{q^2}{c}\right)z + qit},$$

so wird:  $-q^2\mu = \omega^2 \left(K^2 - \frac{q^2}{c^2}\right)$  also:  $c = \frac{\omega}{\sqrt{\mu + \frac{\omega^2 K^2}{q^2}}},$

und:  $\frac{\omega^2 K}{c} = m\nu.$

Da nun  $1/q^2 = (T/2\pi)^2$  ist, so folgt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  den grössten Werth hat für Licht von kleinster Schwingungsdauer  $T$ , und ausserdem mit verschwindendem  $K$ , d. h. mit verschwindender Absorption, auch die Dispersion verschwindet — beides in directem Widerspruch mit der Erfahrung.

3) Ausser der Reibungskraft seitens des Aethers lässt Hr. Lommel auf die Körpermasse in dem Volumenelement noch wirken „die ihr eigenthümlichen elastischen Kräfte“<sup>1)</sup>

1) Lommel, Wied. Ann. 14. p. 524. 1881.

die er an einer anderen Stelle<sup>1)</sup> genauer so definirt: „Da die Atome eines Molecüls gegen einander verschiebbar sind; so ist jedes Molecül als ein kleiner elastischer Körper zu betrachten, in welchem, nach den Lehren der Elasticitätstheorie, drei zu einander senkrechte Hauptelasticitätsrichtungen vorhanden sind.“ „Auf die Masse  $m$  wirken nun die drei Hauptelasticitätskräfte  $-mp_1^2 U$ ,  $-mp_2^2 V$ ,  $-mp_3^2 W$ “ (in obiger Abkürzung.)

In formeller Hinsicht bemerke ich zunächst beiläufig, dass es mir unerlaubt erscheint, irgend welche Sätze, die die Elasticitätstheorie für ein Massenelement ableitet, auf ein einzelnes Molecül, bestehe es auch aus zehn Atomen, anzuwenden. Denn die Elasticitätstheorie setzt ganz wesentlich voraus<sup>2)</sup>, dass die sogenannten „Massenelemente“ mit denen sie operirt, ausserordentlich gross sind gegen die Wirkungssphäre der Molecularkräfte und demgemäss eine enorme Anzahl von Molecülen enthalten. Sonst verliert die ganze Ableitung der Gesetze für die Moleculardrucke ihre Gültigkeit.

Um aber zur Hauptsache überzugehen, so besteht gar kein elasticitätstheoretischer Satz des Inhalts, dass für beliebige Körperelemente die elastischen Kräfte sich auf drei Componenten der obigen Form reduciren. Hr. Helmholtz<sup>3)</sup> führt in seiner Abhandlung „über anomale Dispersion“ die analoge Annahme mit den folgenden Worten ein:

„Wiederum mag zur Vereinfachung der Rechnung die der Wirklichkeit wohl nicht ganz entsprechende, mechanisch aber unanstössige Annahme gemacht werden, dass schwere centrale Massen der Molecüle festliegen, und die beweglichen Theile derselben gegen diese und den Aether eine bestimmte Gleichgewichtslage zu bewahren streben. Bei der Verschiebung der beweglichen Atome um  $x$  setzen wir die Kraft, die sie in die Gleichgewichtslage zurückführt, gleich  $-a^2 x$ .“

1) Lommel, Wied. Ann. 4. p. 55 und 56. 1878.

2) Vergl. z. B. Poisson Mém. de l'Ac. 8. p. 357 und 18. p. 3, sowie Journ. de l'école polytech. 13. p. 1 an vielen Stellen. Besonders consequent hat die endlichen Dimensionen des „Massenelementes“ F. Neumann in seinen Vorlesungen über Elasticität festgehalten.

3) Helmholtz, Pogg. Ann. 154. p. 585. 1875.

Dies scheint mir in der That die einzige physikalische Deutung jener Componente, aber eben sie bezeugt, dass ihre Einführung nicht nach den Lehren der Elasticitätstheorie (in dem Sinne, wie das Wort wohl zumeist gedeutet werden wird), sondern im Gegensatz zu ihnen und auf Grund von Anschauungen, die mit ihren Grundlagen nicht übereinstimmen, geschehen ist.<sup>1)</sup>

Ich gestehe, dass angesichts der vielfältigen Bestätigung, die die Elasticitätstheorie für ponderable Medien durch die Beobachtung erfahren hat, mir eine solche Annahme nicht eher annehmbar erscheint, als bis der Nachweis geliefert ist, dass auf der neuen Grundlage eine allgemeine Theorie der Elasticität sich ebenfalls in Uebereinstimmung mit der Beobachtung aufführen lässt.

Unwillkürlich drängt sich die Frage auf, warum denn diese Abweichung von der bisher gebilligten Theorie nöthig ist, und da auch in der Arbeit des Hrn. Helmholtz über diesen Punkt mit einem kurzen Wort („zur Vereinfachung der Rechnung“) hinweg gegangen ist, dürfte eine Erörterung desselben nicht überflüssig sein.

Bildet man die Differentialgleichungen für die Bewegung der ponderablen Masse nach den Grundsätzen der allgemeinen Elasticitätstheorie, setzt also die Beschleunigung parallel der  $x$ -Axe durch die Wirkung der Nachbarmoleculé für unkrystallinische Medien:

$$= m a^2 \Delta^2 u + b^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

und die anderen analog, und führt zwischen den Aether- und Körpertheilchen irgend eine Wechselwirkung ein, so erhält

1) Derselbe Einwand gilt in Bezug auf Hrn. Lommel's Theorie der Absorption und Fluorescenz (Wied. Ann. 3. p. 251. 1878). Ausserdem ist dort nicht einwurfsfrei die Aufstellung der Gleichung für die Körperbewegung allein, welche die Einwirkung der Aethertheilchen nur durch eine Annahme, nicht durch die gleichzeitige Aufstellung der sie betreffenden Gleichungen einführt. (Beiläufig bemerke ich, dass entgegen der Aeusserung des Hrn. Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 376 (1881) die Behandlung von zwei simultanen Formelsystemen für Materie und Aether schon Jahrzehnte vor Helmholtz durch F. Neumann in seinen Vorlesungen geschehen ist.)

man stets zwei Arten von Wellensystemen, deren eines mit einer Geschwindigkeit von der Ordnung derjenigen des Lichtes, das andere derjenigen des Schalles sich fortpflanzt; dieses zweite, der Beobachtung nicht entsprechende, verschwindet nur, wenn man die Wechselwirkung zwischen Aether und Materie verschwindend oder aber die Dichtigkeit des Aethers unendlich klein gegenüber der der Materie annimmt. Aber die erste Annahme hebt jeden Einfluss der ponderablen Theile auf die Lichtbewegung auf, die zweite ist wenigstens für die Lommel'sche Theorie, wie oben gezeigt, nicht möglich.

Noch grösser werden die Schwierigkeiten, wenn man zur Erklärung der Doppelbrechung die Annahme einer unkrystallinischen Natur des Aethers und die strengen Werthe für die Molecularcomponenten in der Materie combinirt. Denn dann findet sich, auch wenn man sich die zweite Wellengattung gefallen lässt, ein wesentlich complicirteres Gesetz für die Lichtbewegung als das Fresnell'sche, und zwar ein für die verschiedenen zweiaxigen Krystallsysteme verschiedenes, im Widerspruch mit der Beobachtung.

Endlich gibt die Elasticitätstheorie bisher keine Mittel an die Hand, Eigenschwingungen der ponderablen Moleküle, wie sie die Erscheinungen der Fluorescenz und Phosphorescenz und auch der Wärmeleitung wahrscheinlich machen, zu erklären. Aber die erwähnten Versuche, um sie in dieser Hinsicht zu ergänzen, bieten einen zweifelhaften Vortheil; selbst wenn sie die Erscheinungen der Optik erklären sollten, bringen sie in grossen anderen Gebieten der Elasticität Theorie und Beobachtung in Widerspruch.

Noch auf einen Punkt erlaube ich mir aufmerksam zu machen. Nach den oben angeführten Worten des Hrn. Helmholtz sind die Eigenbewegungen, auf die seine Hypothese führt, intramoleculare, und auch Hr. Lommel äussert sich demgemäss.<sup>1)</sup> Da aber die Wärmebewegungen theils molecularle, theils intramolecularle sind, so kann die erwähnte Theorie auch im besten Falle nur einen Theil der bezüglichen Erscheinungen erklären.

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 252. 1878.

4) Endlich lässt Hr. Lommel auf die ponderablen Massen noch eine Widerstandskraft wirken, die er der absoluten Geschwindigkeit proportional und ihrer Richtung parallel annimmt. Zur Motivirung derselben bemerkt er in seiner Theorie der Drehung der Polarisationssebene<sup>1)</sup>, dass man sich diesen Widerstand „etwa durch die dem Molecül als integrierender Bestandtheil zugehörige Aetherhülle hervorgebracht“ denken könne.

Hierzu bemerke ich zunächst (mehr formell), dass die obige Motivirung wohl kaum genügen dürfte; denn entweder hängt die Hülle fest an dem Molecül, und dann kann sie keinen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand leisten, sondern summirt einfach ihre Trägheit zu der des Molecüls, oder aber sie ist gegen das Molecül verschiebbar, und dann muss ihre Bewegung in den Gleichungen für die Aethermasse Ausdruck gewinnen; jedenfalls ist dann auch der Widerstand nicht der absoluten, sondern der relativen Geschwindigkeit proportional zu setzen.

Diesen Widerstand durch den Hinweis auf die dämpfende Wirkung einer Flüssigkeit oder Gasmasse zu erklären, ist deshalb nicht angängig, weil einerseits eine solche Flüssigkeit im vorliegenden Falle fehlt, und andererseits auch bei jenen Erscheinungen der Widerstand nur von der relativen Geschwindigkeit abhängt, — von der absoluten nämlich nur insofern, als diese, für den Fall die Flüssigkeit ruht oder eine derart wechselnde Bewegung hat, dass man als mittleren Zustand den der Ruhe betrachten kann, mit der relativen identisch wird — wie besonders klar wird, wenn man überlegt, dass, was wir an der Erdoberfläche „Ruhe“ nennen, mit nichts dergleichen wirklich ist.

Die einzige genügende Motivirung einer solchen Kraft findet sich wiederum in der Helmholtz'schen Arbeit<sup>2)</sup> in folgenden Worten:

„Wenn Absorption stattfindet, muss lebendige Kraft der Wellenbewegung in innere unregelmässige Bewegung der

---

1) Lommel, Wied. Ann. 14. p. 524. 1881.

2) l. c. p. 585 u. 586.



Moleculë, d. h. in Wärme, übergeführt werden durch einen der Reibung im Resultat ähnlichen Vorgang. Wir nehmen also noch eine der Reibung ähnliche Kraft an zwischen dem beweglichen und dem festliegenden Theil der Atome jedes Moleculës und setzen diese  $= -\gamma^2(\partial x/\partial t)$ .“

Die besprochene Widerstandskraft ist also bisher nur auf eine Weise begründet, welche jene Vorstellungen voraussetzt, die als im Widerspruch mit den Grundannahmen der Elasticitätstheorie bezeichnet sind; es gilt demnach in Bezug auf sie eben das, was im letzten Abschnitt gesagt ist.

---

Die im Vorstehenden erhobenen Einwände sind nicht in gleiche Linie zu stellen. Der erste betrifft einen Rechenfehler, der eine (umständliche) Correctur der Formeln und die Vergleichung der dadurch modificirten Resultate mit den empirischen nöthig macht. Der zweite ist gegen einen Widerspruch gerichtet, den die Lommel'sche Lichttheorie in sich enthält, indem sie nämlich auf der einen Seite einen äusserst kleinen Werth der Dichtigkeit des Aethers verlangt, aber auf der anderen nicht gestattet. Das dritte und vierte Bedenken knüpft daran an, dass Hr. Lommel, — weil die gebräuchlichen Werthe für die Molecularkräfte in isotropen und heterotropen Körpern in bestimmter Weise in eine Theorie der Einwirkung der Materie auf die Aetherbewegung eingeführt, Resultate ergeben, welche die optischen Beobachtungen nicht darstellen, — für diese Kräfte Werthe ableitet, die ihrerseits die Erscheinungen der Elasticität in ponderablen Körpern nicht erklären, und zwar auf Grund einer Vorstellung, die derjenigen, welche der erprobten allgemeinen Elasticitätstheorie zum Grunde liegt, widerspricht, ohne die hierdurch entstehenden Widersprüche auszugleichen.

Königsberg i. Pr., Juli 1882.

---