Über ganze transzendente Zahlen.

Von

Ernst Zermelo in Zürich.

Das Problem der „ganzen transzendenten Zahlen“, wie es neuerdings von Maillet*) u. a. behandelt wurde, kommt darauf hinaus, einen Bereich $\mathfrak{G}$ von reellen oder komplexen Zahlen zu definieren, welcher die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Summe, Differenz und Produkt zweier Zahlen von $\mathfrak{G}$ ist wieder eine Zahl von $\mathfrak{G}$.

II. Jede reelle oder komplexe Zahl ist Quotient zweier Zahlen von $\mathfrak{G}$.

III. Jede ganze rationale (bzw. algebraische) Zahl ist Element von $\mathfrak{G}$.

IV. Keine nicht-ganze rationale (bzw. algebraische) Zahl gehört zu $\mathfrak{G}$.

Da es bisher noch nicht gelungen ist, einen Bereich von dieser Beschaffenheit zu konstruieren, so liegt die Vermutung nahe, als ob es deswegen nicht ginge, weil die vier aufgestellten Postulate miteinander im Widerspruche ständen. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß es sich so nicht verhält, indem die Existenz solcher Bereiche $\mathfrak{G}$ auf die Wohlordnung des Kontinuums zurückgeführt wird.

Zu diesem Zwecke wird nach einem zuerst von G. Hamel**) und H. Lebesgue***) benutzten Verfahren auf Grund einer beliebigen Wohlordnung Ω eine „algebraische Basis“ der reellen und komplexen Zahlen definiert, d. h. ein System H von Zahlen η, zwischen denen keine algebraischen Beziehungen bestehen, welche aber alle übrigen Zahlen algebraisch auszudrücken gestatten. Es wird sodann gezeigt, daß jede Zahl einer *eindeutig* bestimmten „Hauptgleichung“ genügt, nämlich einer in H irreduziblen und primitiven algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten „ganzzahlige“ Polynome der η sind, d. h. solche mit ganzen rationalen Zahlen-

---

*) Hierüber vgl. H. Blumberg, Arch. Math. Phys. (3) 20, p. 53—57.

**) G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. 60, S. 459, wo es sich aber nur um *lineare* Beziehungen handelt.

***) H. Lebesgue, Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans. Atti Ac. Torino 1906—1907.

koeffizienten. Werden nun zu $\mathfrak{G}_\eta$ alle diejenigen Zahlen gerechnet, für welche der Anfangskoeffizient der Hauptgleichung ± 1 ist, so läßt sich zeigen, daß für diesen Bereich $\mathfrak{G}_\eta$ alle vier Bedingungen erfüllt sind. Jeder Wohlordnung Ω des Kontinuums entspricht also eine Basis H und damit ein System $\mathfrak{G}_\eta$ von „η-ganzen" Zahlen, zu denen (nach III) jedenfalls auch alle ganzen algebraischen Zahlen gehören, zugleich aber auch alle Basiszahlen η selbst sowie alle ganzzahligen Polynome der η, während alle rational-gebrochenen Polynome der η mit ganzzahligen Koeffizienten als „nicht ganz" zu gelten hätten.

§ 1.
Die Basis.

Die Gesamtheit $\mathfrak{C}$ der reellen und komplexen Zahlen sei in beliebiger Weise „wohlgeordnet", d. h. nach G. Cantor so geordnet, daß die Menge $\mathfrak{K}$ wie jede ihrer Teilmengen ein erstes Element enthält. Eine solche Wohlordnung Ω kann stets und zwar auf eindeutige Weise definiert werden, wenn jeder nicht verschwindenden Untermenge von $\mathfrak{C}$ eines ihrer Elemente zugeordnet ist, sie existiert also auf Grund des „Auswahlaxioms"*), und die Gesamtheit aller möglichen Ω ist eine Menge von der Mächtigkeit $2^{\mathfrak{c}}$, sofern $\mathfrak{c}$ die des Kontinuums bezeichnet.

Für das Folgende genügt es, eine *beliebige* Wohlordnung Ω von $\mathfrak{C}$ zugrunde zu legen. Dann entspricht jeder (reellen oder komplexen) Zahl α als „Abschnitt" eine bestimmte Untermenge $\mathfrak{C}(\alpha)$ von $\mathfrak{C}$, nämlich die Gesamtheit der dem Element α in Ω vorangehenden Elemente, sowie der durch diese Zahlen bestimmte Körper $\mathfrak{K}(\alpha)$.

Nun kann es vorkommen, daß eine Zahl α von den *vorangehenden* „algebraisch abhängig" ist, nämlich einer algebraischen Gleichung genügt von der Form

$$f(x, \beta) \equiv f(x, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu) = 0, \tag{1}$$

in welcher alle Koeffizienten dem Körper $\mathfrak{K}_\alpha$ angehören, d. h. ganzzahlige rationale Funktionen von endlich vielen dem α vorangehenden Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ sind und der Koeffizient der höchsten Potenz von x nicht verschwindet. Insbesondere erfüllen alle algebraischen Zahlen diese Forderung, weil der natürliche Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$ in jedem Körper $\mathfrak{K}(\alpha)$ enthalten ist.

Genügt dagegen eine Zahl η *keiner* Gleichung von der Form (1), ist η „von den vorangehenden unabhängig", so heiße η eine „Basiszahl", und

*) E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann. 59, S. 514. Derselbe, Neuer Beweis für die Möglichkeit der Wohlordnung. Math. Ann. 65, S. 107.

die Gesamtheit *aller* Basiszahlen H wird als die zu Ω gehörende „Basis" bezeichnet. So ist mindestens die *erste* in Ω vorkommende *transzendente* Zahl eine Basiszahl. Die aus endlich vielen Basiszahlen η gebildeten Polynome mit ganzen rationalen Koeffizienten bilden dann einen Integritätsbereich $\mathfrak{J}_\eta$ und ihre Quotienten den „Basiskörper" $\mathfrak{K}_\eta$. Alle diejenigen Basiszahlen, welche einem gegebenen Elemente α in Ω vorangehen, bilden den „Basisabschnitt" $\mathsf{H}(\alpha)$.

Ist dagegen α keine Basiszahl, sondern von den vorangehenden abhängig, so genügt α, wie wir zeigen wollen, mindestens einer Gleichung der Form

$$g(x, \eta) \equiv g(x, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0, \tag{2}$$

wo $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ zu $\mathsf{H}(\alpha)$ gehören, d. h. α ist *algebraisch abhängig von endlich vielen (vorangehenden) Basiszahlen.*

Nach dem bekannten, für wohlgeordnete Mengen gültigen Induktionsverfahren genügt es, den Satz zu beweisen für eine Zahl α unter der Voraussetzung, daß seine Gültigkeit für alle etwa vorangehenden Zahlen β bereits gesichert sei; denn unter den Zahlen α, für welche er ungültig wäre, müßte es in Ω eine erste α_0 geben, und für die vorangehenden wäre er gültig, also auch für α_0 gegen die Annahme.

Es genüge also $x = \alpha$ einer algebraischen Gleichung

$$f(x, \beta) \equiv f(x, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu) = 0 \tag{1}$$

und jede der Zahlen β_λ, welche nicht selbst Basiszahl ist, genüge einer Gleichung

$$g_\lambda(x, \eta) \equiv g_\lambda(x, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0, \tag{2_λ}$$

wo wieder alle Basiszahlen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$, weil sie den β_λ vorangehen, dem Abschnitte $\mathsf{H}(\alpha)$ angehören. Ist ein β_λ selbst eine Basiszahl, so genügt sie ebenfalls einer solchen Gleichung $(2)_\lambda$, nämlich $x - \beta_\lambda = 0$, wo β_λ gleichfalls zu $\mathsf{H}(\alpha)$ gehört.

Um nun die ν Größen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ aus den $\nu + 1$ Gleichungen (1), $(2)_\lambda$ zu eliminieren, kann man etwa folgendermaßen verfahren.

Die Gleichung (1) können wir auf die Form bringen

$$f(x, \beta) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0, \tag{1a}$$

wo jeder Koeffizient $A_\varrho = A_\varrho(\beta)$ ein ganzzahliges Polynom in $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ ist und $A_0(\beta) \neq 0$. Ebenso können wir uns in $(2)_\lambda$ alle Nenner fortgeschafft denken und diese Gleichungen sämtlich als irreduzibel voraussetzen in dem durch $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ bestimmten Körper $\mathfrak{k}_t$. Dann genügt jeder Gleichung $(2)_\lambda$ ein System konjugierter Größen $\beta_\lambda, \beta_\lambda', \beta_\lambda'', \cdots$, deren elementare symmetrische Funktionen (als Koeffizienten von $g_\lambda(x)$ dividiert durch den Anfangskoeffizienten $b_{\lambda 0} \neq 0$) rational sind in $\mathfrak{k}_t$. Ersetzt man nun in A_ϱ jede der Größen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu$ durch ihre sämtlichen konjugierten, in allen Kombinationen, so entstehen die Werte $A_\varrho, A_\varrho', A_\varrho'', \cdots$ und genügen sämtlich einer Gleichung

$$G_\varrho(x) \equiv (x - A_\varrho)(x - A_\varrho')(x - A_\varrho'') \cdots = 0,$$

deren Koeffizienten als ganze, ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzelkombinationen β wieder rational sein müssen in $\mathfrak{k}_t$. Der in $\mathfrak{k}_t$ irreduzible Faktor von $G_\varrho(x)$, welchem $x = A_\varrho$ genügt, sei $\Phi_\varrho(x)$, sodaß wir haben

$$\Phi_\varrho(A_\varrho) = 0.$$

Hier ist in $\Phi_0(x)$, da $A_0 \neq 0$, auch jede andere Wurzel von 0 verschieden, weil sonst das konstante Glied verschwände und die Gleichung reduzibel wäre gegen die Annahme. Ersetzt man also in (1a) jeden Koeffizienten A_ϱ durch seine konjugierten und multipliziert die entstehenden Polynome durch alle Kombinationen, so entsteht eine Gleichung

$$\Phi(x) \equiv (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots)(A_0' x^n + A_1' x^{n-1} + \cdots) \cdots = 0,$$

welche für $x = \alpha$ erfüllt ist, deren Koeffizienten in bezug auf x als symmetrische Funktionen der $A_\varrho, A_\varrho', \cdots$ wieder dem Körper $\mathfrak{k}_t$ angehören, und deren Anfangskoeffizient als eine Potenz der Norm $A_0 A_0' A_0'' \cdots$ sicher von 0 verschieden ist. Es genügt also α in der Tat einer Gleichung von der Form (2), und die behauptete Abhängigkeit ist bewiesen.

Dagegen kann zwischen endlich vielen *Basiszahlen allein niemals* eine algebraische Gleichung der Form

$$F(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen, ohne daß alle Koeffizienten verschwinden. Denn sonst wäre die in der Wohlordnung *letzte* unter den η, z. B. η_t, welche nicht identisch herausfällt, algebraisch abhängig von den vorangehenden, entgegen unserer Definition. Jede solche algebraische Relation zwischen Basiszahlen mit ganzzahligen Koeffizienten muß daher *identisch* bestehen, also auch für *willkürliche* Werte der Veränderlichen $\eta_1, \cdots, \eta_t$.

§ 2.

Die Hauptgleichung.

Jede reelle oder komplexe Zahl α, mag sie zur Basis H gehören oder nicht, genügt nach dem oben Bewiesenen mindestens einer algebraischen Gleichung der Form

(2) $$g(x, \eta) \equiv g(x, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t) = 0,$$

in welcher g ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ Basiszahlen sind und der Exponent der höchsten vorkommenden Potenz von x mindestens $= 1$ ist.

Unter allen Gleichungen dieser Form (2), denen α genügt, gibt es sicher solche von *niedrigster Gradzahl* $n \geqq 1$. Unter allen solchen Gleichungen n^{ten} Grades gibt es wieder solche, in denen die *Dimension* des Koeffizienten von x^n in bezug auf die η, d. h. die höchste Exponentensumme eines nicht verschwindenden Gliedes $\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\cdots\eta_t^{\alpha_t}$ möglichst klein ist, nämlich $m \geqq 0$. Unter allen diesen Gleichungen vom Grade n und von der Dimension m des Anfangskoeffizienten muß es endlich eine solche geben, in welcher die Summe der absolut genommenen (ganzzahligen) Zahlenkoeffizienten dieses Anfangskoeffizienten möglichst klein und zwar $s \geqq 1$ ist.

Die so charakterisierte Gleichung n^{ten} Grades

$$(3) \qquad \varphi(x, \eta) \equiv C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0,$$

in welcher alle C_ϱ ganzzahlige Polynome in den Basiszahlen η sind und C_0 die kleinste Dimension m in den η und die minimale Koeffizientensumme s besitzt, ist dann, wie wir beweisen wollen, *irreduzibel* im Körper $\mathfrak{K}_\eta$, *primitiv* im entsprechenden Integritätsbereiche $\mathfrak{J}_\eta$ und endlich durch die Zahl α, die ihr genügt, bis auf das Vorzeichen aller Glieder *eindeutig* bestimmt. Sie werde die zu α gehörige „Hauptgleichung" genannt.

Wäre (3) in $\mathfrak{K}_\eta$ *reduzibel*, z. B.

$$\varphi(x, \eta) = \psi(x, \eta)\,\chi(x, \eta),$$

so würde α einer Gleichung derselben Form (2), aber von niedrigerem Grade $n' < n$ genügen gegen die Annahme.

Wären alle Koeffizienten $C_\varrho(\eta)$ *teilbar* durch ein ganzzahliges Polynom $T(\eta)$ von der Dimension $\tau \geqq 1$, also

$$C_\varrho(\eta) = T(\eta)\, C_\varrho'(\eta),$$

so müßten diese $n+1$ Beziehungen, da die Basiszahlen, wie oben gezeigt, algebraisch unabhängig sind, in den sämtlichen vorkommenden η *identisch* gelten, und α genügte der Gleichung

$$(3)' \qquad C_0' x^n + C_1' x^{n-1} + \cdots + C_n' = 0,$$

in welcher die Dimension m' von C_0', wieder gegen die Annahme, den Wert hätte $m' = m - \tau < m$.

Ebensowenig können alle *Zahlenkoeffizienten* der C_ϱ durch eine und dieselbe ganze *Zahl* $r > 1$ teilbar sein, weil durch Division mit r auch die Koeffizientensumme s von C_0 um den Faktor r *verkleinert* würde im Widerspruche mit der Definition von s. Somit ist (3) in der Tat irreduzibel und primitiv im Bereiche der η.

Es sei jetzt (2) eine *beliebige* Gleichung der betrachteten Form, welcher α genügt, und (3) die soeben gewonnene irreduzible, so würde bei der Division von $g(x, \eta)$ durch $\varphi(x, \eta)$ ein Rest $\omega(x, \eta)$ sich ergeben, der in bezug auf x von niedrigerem als dem n^{ten} Grade wäre und für $x = \alpha$ ebenfalls den Wert 0 annähme, also wieder zu einer Gleichung der Form (2) von niedrigerem Grade führte, entgegen unserer Definition. Der Rest muß also in x identisch verschwinden, aber auch wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Basiszahlen identisch in den η, und wir haben

$$(4) \qquad k(\eta)\, g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \psi(x, \eta),$$

wo $\psi(x, \eta)$ wieder ein Polynom derselben Form ist und $k(\eta)$ ein nicht verschwindendes ganzzahliges Polynom in den η. Es ist also $g(x, \eta)$ in bezug auf x immer teilbar durch $\varphi(x, \eta)$, und $g(x, \eta)$ kann nur dann irreduzibel in $\mathfrak{R}_\eta$ oder vom Grade n sein, wenn auch $\psi(x, \eta) = l(\eta)$ von x unabhängig ist.

In diesem Falle erhalten wir aus (4) durch Koeffizientenvergleichung das System der Gleichungen

$$(5)_\varrho \qquad k(\eta)\, B_\varrho(\eta) = l(\eta)\, C_\varrho(\eta) \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

welche ebenfalls in den η wieder *identisch* bestehen müssen. Nun gelten aber auch für Polynome mehrerer Veränderlicher die bekannten Zerlegungsgesetze.*) Setzen wir also, unbeschadet der Allgemeinheit, die Polynome $k(\eta)$ und $l(\eta)$ als teilerfremd voraus (wir könnten sonst durch jeden gemeinsamen Teiler dividieren), so ergibt sich, daß alle B_ϱ durch $l(\eta)$ und alle C_ϱ durch $k(\eta)$ teilbar sein müssen,

$$B_\varrho(\eta) = l(\eta)\, B_\varrho^*(\eta), \quad C_\varrho(\eta) = k(\eta)\, C_\varrho^*(\eta) \quad \text{für} \quad \varrho = 0, 1, \cdots, n.$$

Da aber nach dem oben Bewiesenen $\varphi(x, \eta)$ in $\mathfrak{J}_\eta$ *primitiv* sein muß, so ist $k(\eta)$ jedenfalls $= \pm 1$, und $g(x, \eta)$ kann nur dann ebenfalls primitiv sein, wenn auch $l(\eta) = \pm 1$ ist, d. h. es ist in diesem Falle

$$g(x, \eta) = \pm\, \varphi(x, \eta),$$

und die „Hauptgleichung" ist in der Tat durch die Eigenschaften der Irreduzibilität und Primitivität bis auf das Vorzeichen *eindeutig* bestimmt.

§ 3.

Der Integritätsbereich.

Eine Zahl α wollen wir dann und nur dann als „η-ganz" dem Bereiche $\mathfrak{G}_\eta$ zurechnen, wenn in der zugehörigen (irreduziblen und primitiven) „Hauptgleichung" der Koeffizient der höchsten Potenz von x den Wert ± 1 hat, wenn also diese Gleichung die Form annimmt

$$(3)^* \qquad \varphi(x, \eta) \equiv x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0,$$

wo die Koeffizienten $C_1, C_2, \cdots, C_n$ sämtlich Polynome der Basiszahlen mit ganzzahligen Koeffizienten sein sollen.

*) Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, kleine Ausgabe, § 20.

Wir beweisen zunächst, daß diese Bedingung immer dann erfüllt ist, wenn α *irgendeiner* Gleichung der Form genügt

$$(2)^* \qquad g(x, \eta) \equiv x^m + B_1 x^{m-1} + \cdots + B_m = 0,$$

in welcher der Anfangskoeffizient $= 1$ ist und alle übrigen ganzzahlige Polynome in den η sind.

In der Tat haben wir in diesem Falle, wie im vorigen § 2 bewiesen, die in x und η identische Beziehung

$$(4) \qquad k(\eta)\, g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \psi(x, \eta),$$

wo $\varphi(x, \eta) = 0$ die zu α gehörende „Hauptgleichung" bedeutet. Es muß also $k(\eta)$ ein *„Teiler"* des rechtsstehenden Produktes sein, und da $\varphi(x, \eta)$ „primitiv" ist, zugleich auch ein Teiler von $\psi(x, \eta)$, auf Grund des verallgemeinerten „Gaußschen Satzes" über primitive Funktionen.*)

Somit haben wir nach Division mit $k(\eta)$

$$(4)^* \qquad g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \overline{\psi}(x, \eta),$$

wo auch $\overline{\psi}(x, \eta)$ ein ganzzahliges Polynom in x und η mit dem Anfangskoeffizienten $\overline{B}_0(\eta)$ ist, und durch Vergleichung der Anfangskoeffizienten

$$1 = C_0(\eta)\, \overline{B}_0(\eta)$$

identisch in den η, also beide Faktoren rechts unabhängig von η und $= \pm 1$, d. h. α genügt in der Tat der gestellten Bedingung (3)*.

Auf Grund dieses Hilfssatzes lassen sich jetzt für den Bereich $\mathfrak{G}_\eta$ alle vier im Eingang aufgestellten Forderungen als erfüllt nachweisen.

I. Es seien α und β irgend zwei η-ganze Zahlen und $\varphi(x, \eta) = 0$, $\chi(x, \eta) = 0$ die entsprechenden „Hauptgleichungen". Ferner sei $\gamma = q(\alpha, \beta)$ ein beliebiges ganzzahliges Polynom von α, β, z. B. $\gamma = \alpha \pm \beta$ oder $\gamma = \alpha\beta$ und $\gamma', \gamma'', \cdots$ die Ausdrücke, welche entstehen, indem man α sowohl wie β durch ihre sämtlichen konjugierten Größen $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots, \beta, \beta', \beta'', \cdots$ ersetzt (nämlich durch die sämtlichen Wurzeln der irreduziblen Gleichungen $\varphi = 0$ und $\chi = 0$). Dann genügen alle diese Werte γ der Gleichung

$$(5) \qquad (x - \gamma)(x - \gamma')(x - \gamma'') \cdots = 0$$

mit dem Anfangskoeffizienten 1, während alle übrigen Koeffizienten als ganze, ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzeln von $\varphi(x, \eta) = 0$ und $\chi(x, \eta) = 0$ wieder ganze, ganzzahlige rationale Funktionen ihrer Koeffizienten und daher ganzzahlige Polynome in den η sein müssen. Also genügt auch γ einer Gleichung (2)* und gehört nach unserem Hilfssatze zu $\mathfrak{G}_\eta$.

II. Ist α eine *beliebige* reelle oder komplexe Zahl und ihre „Hauptgleichung" von der Form

$$(3) \qquad \varphi(x, \eta) \equiv C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n = 0,$$

*) H. Weber, a. a. O., § 20, 5.

so genügt $\gamma = C_0 \alpha$ der Gleichung

(6) $$\gamma^n + C_1 \gamma^{n-1} + \cdots + C_n C_0^{n-1} = 0,$$

welche die Form (2)* hat, während C_0 der Gleichung $x - C_0 = 0$ von der gleichen Beschaffenheit genügt. Somit ist $\alpha = \frac{\gamma}{C_0}$ der Quotient zweier η-ganzen Zahlen.

III. IV. Ist α eine *algebraische Zahl* und die entsprechende in $\mathfrak{R}$ irreduzible und primitive Gleichung

(7) $$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, so ist $f(x)$ im Falle $a_0 = 1$ von der Form (2)* und α in der Tat „η-ganz". Um aber auch das Umgekehrte (IV) zu beweisen, zeigen wir, daß $f(x)$ noch im Bereiche der η irreduzibel und primitiv, also (7) mit der „Hauptgleichung" identisch ist.

Nach dem oben Bewiesenen ist nämlich auch hier wie in (4)

$$k(\eta) f(x) = \varphi(x, \eta)\, \psi(x, \eta),$$

wo $\varphi(x, \eta) = 0$ die Hauptgleichung von α bedeutet. Es ist also wieder $k(\eta)$ Teiler des rechtsstehenden Produktes und, da $\varphi(x, \eta)$ primitiv, auch Teiler von $\psi(x, \eta) = k(\eta)\, \overline{\psi}(x, \eta)$, d. h. wir haben wie oben

$$f(x) = \varphi(x, \eta)\, \overline{\psi}(x, \eta).$$

Hier müssen die Koeffizienten von x rechts und links übereinstimmen und zwar, wegen der Unabhängigkeit der Basiszahlen, identisch in den η, also auch dann, wenn man die η sämtlich durch 0 ersetzt. Somit wird

$$f(x) = \varphi(x, \eta)\, \overline{\psi}(x, \eta) = \varphi(x, 0)\, \overline{\psi}(x, 0).$$

Es wäre also $f(x)$ in $\mathfrak{R}$ zerlegbar gegen die Annahme, außer wenn einer der beiden Faktoren rechts konstant und der andere vom m^{ten} Grade ist. Das letztere kann bei $\overline{\psi}(x, 0)$ nicht der Fall sein, weil sonst auch $\overline{\psi}(x, \eta)$ vom m^{ten} Grade in x wäre und dann $\varphi(x, \eta)$ konstant gegen die Definition der Hauptgleichung. Also müssen $\varphi(x, 0)$ und $\varphi(x, \eta)$ vom m^{ten} Grade sein und $\overline{\psi}(x, \eta) = l(\eta)$ konstant. Alle (ganzzahligen) Koeffizienten von $f(x)$ sind durch $l(\eta)$ teilbar, also $l(\eta)$ von den η unabhängig und selbst eine ganze Zahl und zwar, weil $f(x)$ im natürlichen Integritätsbereiche primitiv ist, $= \pm 1$, d. h. $f(x) = \pm\, \varphi(x, \eta)$. Somit kann der Anfangskoeffizient der Hauptgleichung nur dann ± 1 sein, wenn α eine *ganze* algebraische Zahl ist.

Unser aus der Basis H abgeleiteter Integritätsbereich $\mathfrak{G}_\eta$ besitzt demnach alle im Eingange des Artikels gestellten Eigenschaften. Er enthält

1. alle *Basiszahlen* η,
2. alle *ganzen rationalen* Funktionen der η mit ganzzahligen Koeffizienten, darunter alle *ganzen rationalen* Zahlen,
3. alle *ganzen algebraischen* Funktionen der η mit ganzzahligen Koeffizienten, darunter alle *ganzen algebraischen* Zahlen.

Dagegen schließt er aus

1. alle *rationalen gebrochenen* Funktionen der η mit ganzen rationalen Koeffizienten, darunter die *rational-gebrochenen* Zahlen,
2. alle *algebraisch gebrochenen* Funktionen der η mit ganzen rationalen Koeffizienten, darunter alle *algebraisch gebrochenen* Zahlen.

Jede *beliebige* reelle oder komplexe Zahl ist darstellbar als Quotient zweier η-ganzen Zahlen, ja als Quotient einer η-ganzen Zahl und eines ganzzahligen Polynoms der η.

Ob eine vorgelegte transzendente Zahl zum Integritätsbereiche gehört oder nicht, hängt wesentlich von der zugrunde gelegten Basis H und damit auch von der gewählten Wohlordnung Ω ab. Durch geeignete Wahl der letzteren wird man jede *beliebige transzendente* Zahl ω (z. B. die Zahl e oder π) zu einer „ganzen" machen können, indem man sie z. B. in der Wohlordnung an die Spitze stellt; ebenso auch ein beliebiges *System* transzendenter Zahlen, sofern diese nur unter sich algebraisch unabhängig sind. Desgleichen wird man ω willkürlich auch zu einer „Einheit" machen können, d. h. zu einer Zahl, welche gleichzeitig mit ihrer Reziproken „ganz" ist. Man braucht zu diesem Zwecke nur die (ebenfalls transzendente) Zahl $\varrho = \omega + \omega^{-1}$ in die Basis aufzunehmen, da in diesem Falle beide Größen ω und ω^{-1} derselben Gleichung genügen

$$x^2 - \varrho x + 1,$$

welche von der Form (2)* ist.

Unsere Definition der Integrität ist auch nicht bestimmt, die Zahlen ihrer inneren Natur nach zu charakterisieren, sondern soll vorläufig nur die *Widerspruchslosigkeit* der an einen solchen Integritätsbereich zu stellenden Forderungen erhärten.

Zürich, den 28. Dezember 1913.

Nachtrag (April 1914).

Die auf die „Hauptgleichung" bezüglichen Beweise kann man formal etwas abkürzen, wenn man den (hier im Eingang des § 3 eingeführten) „Gaußschen Satz" schon auf die Formel (4) des § 2 anwendet und durch Division mit dem „Teiler" $k(\eta)$ den Satz gewinnt:

Ist $g(x, \eta)$ ein ganzzahliges Polynom, das für $x = \alpha$ verschwindet, und $\varphi(x, \eta) = 0$ die zugehörige Hauptgleichung, so ist stets $g(x, \eta)$ algebraisch teilbar durch $\varphi(x, \eta)$, d. h. identisch in x und η

$$g(x, \eta) = \varphi(x, \eta)\, \overline{\psi}(x, \eta), \tag{4a}$$

wo auch $\overline{\psi}$ ein ganzzahliges Polynom ist.