Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri archimedei e loro polari.

(*Di* GIOVANNI SANSONE, *Zona di Guerra.*)

In due Note del prof. L. BIANCHI della R. Accademia dei Lincei (*) sono state studiate le divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e alcuni gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti a tali divisioni. Conseguentemente in due miei lavori pubblicati negli *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (**), analogamente a quanto si opera nello spazio euclideo, ho determinato i gruppi di sostituzioni lineari propriamente discontinui di cui il poliedro fondamentale è una piramide, una doppia piramide, un poliedro regolare dello spazio iperbolico. Lo scopo propostomi nella presente Nota è di completare le ricerche con lo studio delle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri archimedei o nei loro polari. La natura delle nuove divisioni ha reso la ricerca dei poliedri che possono effettuarle più laboriosa in confronto alle precedenti; la determinazione aritmetica dei gruppi corrispondenti ad alcune di queste divisioni, propriamente dei gruppi di cui i coefficienti delle sostituzioni che li compongono appartengono a un campo quadratico imaginario, è stata da me fatta con i metodi già adoperati nei precedenti lavori.

Nel n.° 1 provo l'esistenza di 15 tipi di poliedri semiregolari nello spazio non euclideo, nei n.[i] 2, 3, 4 provo che esistono solo 2 poliedri archimedei a vertici impropri, cubo-ottaedro, icosidodecaedro, e un poliedro a vertici propri, cubo tronco, che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico; nel n.° 5 do la costituzione aritmetica del gruppo corrispondente al cubo-ottaedro.

(*) L. BIANCHI, *Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri regolari. — Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non euclideo in tetraedri e ottaedri regolari.* Atti Accademia Lincei, 1893-1909.

(**) G. SANSONE, *Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e in tetraedri. — Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi e doppie piramidi.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, annate 1911-1917.

Nel n.° 6 assai semplicemente provo l'esistenza di soli cinque poliedri polari degli archimedei utilizzabili per le divisioni in esame, doppia piramide triangolare, rombo-ottaedro, rombo-dodecaedro, poliedri polari del rombicubo ottaedro e del cubo simo; nei n.i 6, 7, 8 determino la costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti alle prime tre di quest'ultime divisioni.

Esistenza nello spazio iperbolico di 15 tipi di poliedri archimedei.

1. Dicesi *poliedro archimedeo* quello che ha angoloidi eguali contenuti da facce regolari di più sorta. La rappresentazione Beltrami-Klein dello spazio iperbolico S entro una sfera limite S' dà un modo semplice di costruire tutti i poliedri P archimedei di S. Infatti P deve avere in questa rappresentazione per imagine un poliedro a facce piane con angoloidi tutti di egual numero di spigoli, ed è chiaro, che la discussione elementare ordinaria per classificare i poliedri archimedei nei 15 tipi (*) rimane immutata in questo caso. Risulta da tale discussione che chiamando con n il numero degli spigoli di ogni angoloide contenuto da α facce a latere, β facce b latere, γ facce c latere, ecc., con v e f rispettivamente il numero dei vertici e delle facce del poliedro, i valori che possono assumere $n, \alpha, \beta, \gamma, \ldots; a, b, c, \ldots; v, f$ sono i seguenti:

n	α	β	γ	a	b	c	v	f	Denominazione del poliedro
3	1	2		n	4		$2n$	$n+2$	prisma regolare a facce laterali quadrate,
3	1	2		3	6		12	8	tetraedro-tronco,
3	1	2		3	8		24	14	cubo-tronco,
3	1	2		3	10		60	32	dodecaedro tronco,
3	1	2		4	6		24	14	ottaedro-tronco,
3	1	2		5	6		60	32	icosaedro-tronco,
3	1	1	1	4	6	8	48	26	cubo-ottaedro-tronco,
3	1	1	1	4	6	10	120	62	icosidodecaedro-tronco,
4	3	1		3	n		$2n$	$2n+2$	
4	3	1		4	3		24	26	rombicubo-ottaedro,
4	2	2		3	4		12	14	cubo-ottaedro,
4	2	2		3	5		30	32	icosidodecaedro,
4	1	2	1	3	4	5	60	62	rombicosidodecaedro,
5	4	1		3	4		24	38	cubo-simo,
5	4	1		3	5		60	92	dodecaedro-simo.

(*) V. ad esempio: R. Baltzer, *Elementi di matematica.* Parte 5ª, *Stereometria.* Traduzione prof. L. Cremona, pp. 121-127.

Ad ognuno dei precedenti sistemi di valori, fissata la lunghezza dello spigolo del poliedro, corrisponde nello spazio ordinario uno e un solo poliedro regolare archimedeo P'; il poliedro P' è inscrivibile in una sfera. È chiaro allora che se nello spazio S' si prende un poliedro regolare archimedeo P' col centro nel centro O della sfera limite e tutto interno a questa sfera o al massimo inscritto in essa, il poliedro obiettivo è esso stesso archimedeo e regolare. Inversamente si abbia un poliedro archimedeo P regolare di S, il poliedro imagine P' in S' ammetterà un gruppo G finito di movimenti (sostituzioni lineari sopra una variabile complessa), che riporta P' in sè; il gruppo G per le ricerche di Klein sui gruppi finiti di movimenti è il trasformato per mezzo di una sostituzione lineare γ di un gruppo Γ relativo a un poliedro regolare ordinario inscritto in S', quindi se trasformiamo G e il poliedro P' con γ^{-1}, G si muta in Γ e P' in un poliedro esso stesso archimedeo regolare con centro nel centro della sfera limite. Segue quindi: *Esistono nello spazio iperbolico 15 tipi di poliedri archimedei regolari, e in ogni tipo si hanno infiniti poliedri differenti per l'ampiezza dei diedri che variano in modo continuo fra limiti determinati.*

Il cubo-ottaedro e l'icosidodecaedro con vertici propri e angoli diedri retti sono i soli poliedri archimedei regolari a vertici impropri che effettuano una divisione regolare dello spazio iperbolico.

2. Se si vuole che attorno al poliedro P di S collocando aderenti per le facce altrettanti poliedri eguali a P e così di seguito indefinitamente ne risulti riempito una e una sola volta lo spazio S, bisogna aggiungere la condizione necessaria e sufficiente che l'angolo diedro di P abbia per misura $\frac{\pi}{n}$ con n intero qualunque. Facilmente si prova che il poliedro P non può avere angoloidi con 5 spigoli; resta perciò da esaminare i poliedri regolari archimedei con angoloidi tutti trispigoli o tetraspigoli. Ci occuperemo ora dei poliedri P con vertici tutti a distanza infinita; nel seguente n.° 3 studieremo i poliedri P con vertici tutti a distanza finita.

Si consideri intanto la rappresentazione conforme di S entro una sfera limite Σ con la quale le rette e i piani di S hanno per imagine i circoli e le sfere ortogonali a Σ; per ottenere in Σ un poliedro archimedeo regolare, basterà inscrivere in esso un ordinario poliedro archimedeo regolare P con i vertici tutti trispigoli o tetraspigoli, e per i circoli di intersezione delle facce di P con Σ condurre le sfere s normali a Σ; il poliedro Π a facce sferiche che le sfere s limitano internamente a Σ effettuerà una divisione regolare di Σ se i suoi diedri hanno per misura $\frac{\pi}{n}$ con n intero. Ora le sfere s hanno i loro centri nei vertici del poliedro P' circoscritto a Σ polare di P, onde gli angoli diedri di Π relativi a uno stesso vertice V sono i supplementi degli angoli piani racchiusi dai raggi che da V vanno ai vertici della faccia p di P' tangente a Σ nel punto V. Geometricamente la faccia p si costruisce nel seguente modo. Siano VV_1, VV_2, VV_3, (VV_4) gli spigoli di P uscenti da V, p è il poligono che sul piano tangente a Σ in V vi determinano i piani tangenti a Σ in V_1, V_2, V_3, (V_4). Il poligono p è simile al poligono T_1, T_2, T_3, (T_4) polare del poligono V_1, V_2, V_3 (V_4) per rispetto al cerchio c passante per V_1, V_2, V_3, (V_4). In questa similitudine al punto V corrisponde il centro O' di c (e la congiungente VO' passa per O); quindi il poliedro Π effettua una divisione regolare di Σ allora e allora soltanto che gli angoli $T_1\widehat{O}T_2$; $T_2\widehat{O}T_3$; $T_3\widehat{O}T_1$ $(T_1\widehat{O}T_2$; $T_2\widehat{O}T_3$; $T_3\widehat{O}T_4$; $T_4\widehat{O}T_1)$ abbiano per misura $\pi - \frac{\pi}{n}\cdot$ Esamineremo separatamente quando si presenta questa circostanza sia che Π abbia vertici trispigoli o tetraspigoli.

Se Π ha tutti i vertici trispigoli, siccome esso si ottiene da un poliedro P con una faccia a latera e due b latere, oppure con una faccia a latera, una b latera e una c latera, i diedri dell'angoloide di vertice V debbono avere per misura rispettivamente $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; oppure $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$; in ogni caso uno solo degli angoli $T_1\widehat{O}T_2$, $T_2\widehat{O}T_3$, $T_3\widehat{O}T_1$ è retto, sia ad es. $T_1\widehat{O}T_2$. Ora si consideri in un punto V_3 arbitrario del quadrante di c determinato dall'angolo $T_1\widehat{O}T_3$ (v. fig. 1) la tangente a c, e dai punti T_1 e T_2 che questa tangente determina sui lati dell'angolo $T_1\widehat{O}T_2$ si conducano le ulteriori tangenti T_1L, T_2M a c; T_1L e T_2M sono parallele, il lato V_1V_2 passa quindi per O', cioè la faccia VV_1V_2 di P dovrebbe passare per il centro O di Σ, il che è assurdo. Quindi *non esiste nessun poliedro archimedeo regolare a vertici trispigoli che effettui la divisione regolare di* Σ.

Nel caso che Π sia relativo a un poliedro P con vertici quadrangolari, i diedri di Π debbono essere, come facilmente si prova, retti, cioè deve aversi (v. fig. 2):

$$T_1\widehat{O}T_2 = T_2\widehat{O}T_3 = T_3\widehat{O}T_4 = T_4\widehat{O}T_1 = \frac{\pi}{2},$$

ossia, come si vede subito geometricamente, $V_1\, V_2\, V_3\, V_4$ è un rettangolo, ovvero ogni angoloide di P deve avere due facce opposte a latere e due opposte b latere, ciò si ha soltanto per il cubo-ottaedro e l'icosidodecaedro.

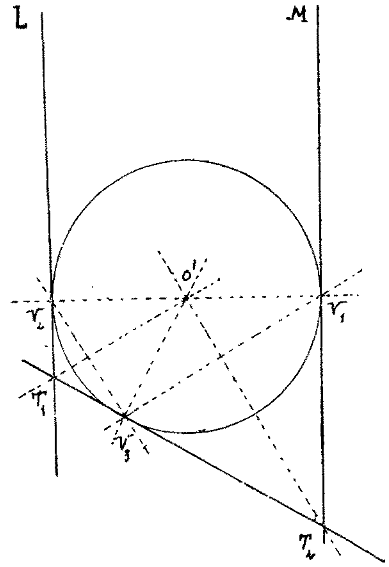

Fig. 1.

Concludendo: *Esistono due soli poliedri archimedei a vertici impropri che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico; essi sono il cubo-ottaedro e l'icosidodecaedro regolare con angoli diedri retti.*

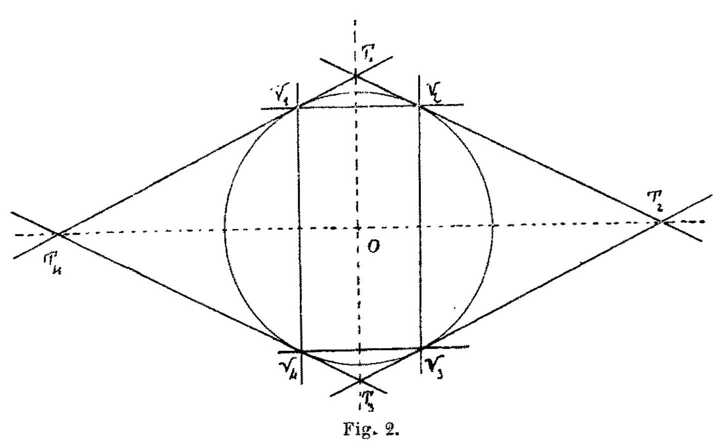

Fig. 2.

Nel n.° 4 daremo la struttura aritmetica del gruppo propriamente discontinuo avente per campo fondamentale un cubo-ottaedro.

Il cubo tronco a vertici propri con angoli solidi aventi per misura $\frac{\pi}{2}$ *se essi sono formati da una faccia di 8 lati e una di 3 lati, e per misura* $\frac{\pi}{4}$ *se formati da due facce di 8 lati, è l'unico poliedro archimedeo regolare a vertici propri che effettua una divisione regolare di S.*

3. La costruzione di un poliedro archimedeo regolare di Σ a vertici propri può effettuarsi nel seguente modo. Consideriamo un ordinario poliedro archimedeo P regolare interno a Σ e le sfere s normali a Σ ognuna delle quali passi per i vertici di P appartenenti a una stessa faccia. Il poliedro Π a facce sferiche che le s limitano internamente a Σ è un poliedro regolare archimedeo a vertici propri di Σ. Ora se il poliedro Π effettua una divisione regolare di Σ, esso deve avere i suoi angoloidi trispigoli; se tali angoloidi sono formati da una faccia a latera e due b latere i diedri possono avere per misura $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$ con n intero $n \geqq 2$; oppure $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{n}$; se invece ogni angoloide è formato da una faccia a latera, una b latera, una c latera i diedri dell'angoloide debbono avere per misura $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$; oppure $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$.

Le seguenti considerazioni ci permetteranno di vedere per ognuno dei poliedri da esaminare quali siano fra i precedenti sistemi di valori quelli che possibilmente possono assumersi come misura degli angoli diedri del poliedro.

Siano Γ e Γ' due circonferenze concentriche e Γ interna a Γ'; C un punto interno a Γ (v. fig. 3). Sia HK il diametro di Γ per C ed LM la corda per C ortogonale a HK e AB, DE siano due corde di Γ per C tali che O sia interno all'angolo $D\widehat{C}B$, e gli angoli $D\widehat{C}O$, $B\widehat{C}O$ acuti o uno al più retto. Consideriamo il cerchio $\Gamma^{(2)}$ passante per AB ortogonale a Γ' e i punti P e Q in cui la retta OC incontra $\Gamma^{(2)}$; è subito visto allora che il cerchio $\Gamma^{(3)}$ ortogonale a Γ' passante per i punti D e E passa anche per i punti P e Q. Infatti i punti O e C sono di egual potenza rispetto a $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$, quindi OC è l'asse radicale di $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$; ma OC incontra $\Gamma^{(2)}$ nei punti P e Q, essi sono perciò di $\Gamma^{(3)}$. Siano ora $O^{(2)}$ e $O^{(3)}$ i centri di $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$, è $O^{(2)}O^{(3)}$ ortogonale a OC, e se N è il loro punto d'incontro, N è il centro del cerchio ortogonale a Γ passante per L ed M. Si ha pure che $O^{(3)}$ è il punto in cui il diametro di Γ normale a DE incontra $O^{(2)}N$. Sia ora $E'D'$ una corda di Γ per C e il raggio CD' interno all'angolo $D\widehat{C}O$, è: $\overline{E'D'} > \overline{ED}$ e $D\widehat{C}B > D'\widehat{C}B$; chiamando con $O^{(4)}$ il centro del cerchio $\Gamma^{(4)}$ ortogonale a Γ passante per i punti D' e E' è $\overline{NO^{(4)}} > \overline{NO^{(3)}}$, quindi $O^{(2)}\widehat{P}O^{(4)} > O^{(2)}\widehat{P}O^{(3)}$; ma gli angoli $O^{(2)}\widehat{P}O^{(4)}$, $O^{(2)}\widehat{P}O^{(3)}$ sono i supplementi degli angoli λ' e λ for-

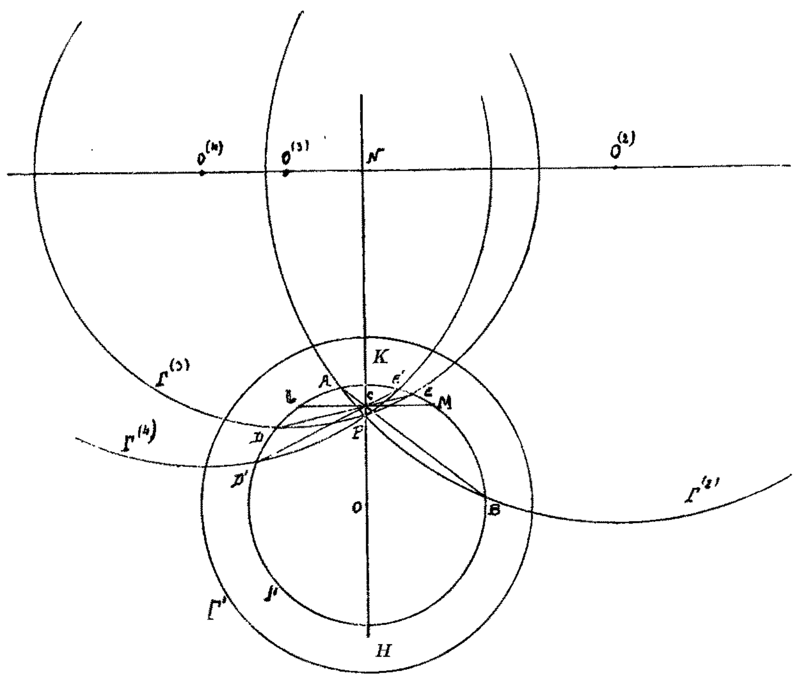

Fig. 3.

mati rispettivamente dai due cerchi $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(4)}$, $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$, quindi $\lambda > \lambda'$; concludiamo perciò che se l'angolo $D\widehat{C}B$ diminuisce, diminuisce anche l'angolo λ dei due cerchi $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(3)}$.

Analogamente sia $\overline{AB}$ una corda di una sfera Σ di centro O, α, β, β' tre semipiani con origine $\overline{AB}$ tali che O sia interno sia all'angolo $\widehat{\alpha\beta}$ che all'angolo $\widehat{\alpha\beta'}$. Dai cerchi di intersezione dei piani α, β, β' con Σ si facciano passare le sfere s, s_1, s_2 normali a una sfera Σ' concentrica a Σ ed esterna ad essa; segue allora che essendo $\widehat{\alpha\beta} > \widehat{\alpha\beta'}$ è anche $\widehat{s s_1} > \widehat{s s_2}$. Tanto in questo caso che nel precedente si è tacitamente definito per angolo di due cerchi (sfere) ortogonali a un cerchio Γ' (sfera Σ') la porzione di piano (spazio) esterna ai due cerchi (alle due sfere) e interna a Γ' (Σ').

Consideriamo ora un poliedro archimedeo inscritto in una sfera Σ di cui uno spigolo sia $A B$, e sia α il piano di una delle facce del poliedro passante per $\overline{A B}$; β_1, $\beta_2, \ldots$ gli altri piani delle facce del poliedro seganti il piano α lungo uno spigolo del poliedro. Per i cerchi di intersezione dei piani α, β_1, β_2, $\beta_3, \ldots$ con Σ si conducano le sfere s, s_1, $s_2, \ldots$ normali a una sfera Σ' concentrica di Σ ed esterna a Σ; è evidente che se ad es. $\widehat{\alpha\beta_1} > \widehat{\alpha\beta_2}$ è anche $\widehat{s s_1} > \widehat{s s_2}$. Infatti se per $A B$ conduciamo due semipiani β'_1, β'_2 aventi per origine $\overline{A B}$ e tali che $\widehat{\alpha\beta'_1} = \widehat{\alpha\beta_1}$; $\widehat{\alpha\beta'_2} = \widehat{\alpha\beta_2}$ è $\widehat{\alpha\beta'_1} > \widehat{\alpha\beta'_2}$; conducendo ora dai cerchi di intersezione di β'_1 e β'_2 con Σ le sfere s'_1 e s'_2 normali a Σ' è anche $\widehat{s s'_1} > \widehat{s s'_2}$ per l'osservazione già premessa; ma $\widehat{s s'_1} = \widehat{s s_1}$; $\widehat{s s'_2} = \widehat{s s_2}$ quindi $\widehat{s s_1} > \widehat{s s_2}$ c. v. p. Da ciò segue che se dai vertici appartenenti a una stessa faccia di un poliedro P inscritto in una sfera Σ conduciamo le sfere s ortogonali a una sfera Σ' concentrica di Σ ed esterna a essa, gli angoli che le s formano tra loro, considerati come si è avanti detto, sono tra loro nelle stesse relazioni di eguaglianza e disuguaglianza che i diedri del poliedro P.

Ciò premesso, in questo paragrafo noi esamineremo i poliedri P generatori di Π i cui angoloidi siano formati da una faccia a latera e due facce b latere; cominciamo anzi dal considerare il caso che P sia un prisma retto regolare a facce laterali quadrate. Se le due basi di P sono triangolari, allora gli spigoli laterali di Π debbono avere per misura $\frac{\pi}{n}$ con $n \geqq 3$ e quelli alle basi $\frac{\pi}{2}$. Un tale poliedro non può esistere; per vederlo basta rappresentare Π in Σ in guisa che uno dei vertici della base sia il centro della sfera limite. Supponiamo allora che la base di Π abbia un numero n di lati $\geqq 5$; in questo caso gli angoli solidi alla base di Π debbono avere per misura $\frac{\pi}{3}$, i laterali $\frac{\pi}{2}$. I centri delle sfere s facce laterali di Π sono in un piano diametrale e i vertici di un poligono regolare di n lati, chiamando con 1 la loro distanza da O centro di Σ, il raggio di una sfera s è $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$ e il raggio di Σ, $\sqrt{1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}}\cdot$

Ora la congiungente i centri di due sfere una faccia laterale di Π e l'altra base di Π è ortogonale al piano α che da O proietta uno spigolo della base di P, ma l'angolo che la congiungente O col centro di una faccia laterale forma con α è $\frac{\pi}{n}$, ne segue che i centri delle sfere basi distano da O di $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\cdot$ Se r è il raggio di una sfera base, le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} 1-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n} &= \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{n}-r^2, \\ \frac{1}{\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}} &= 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}+r^2+\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\,r, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

esprimono rispettivamente che le sfere basi sono ortogonali a Σ e l'angolo di una sfera base e una laterale è $\frac{\pi}{3}\cdot$ Eliminando r fra le (1) si ha per $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$ l'equazione:

$$6\,\mathrm{sen}^4\frac{\pi}{n}-6\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}+1=0$$

da cui

$$\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}\,.$$

Facilmente si verifica che la (2) non è soddisfatta da valori interi di n; segue quindi che al prisma retto regolare a facce laterali quadrate non corrisponde nessun poliedro a vertici propri che effettui una divisione regolare di Σ.

Esaminiamo ora se esistono poliedri regolari tronchi a vertici propri che effettuano una divisione regolare di Σ. Indicheremo con A_f un ordinario poliedro regolare archimedeo, ove f rappresenta il numero delle facce del poliedro platonico P_f che genera A_f; le facce a latere e $2b$ latere le indicheremo rispettivamente con f_a e f_{2b}; P_f ha tutte le sue facce f_b b latere e i loro piani coincidono con i piani delle facce $2b$ latere di A_f, anzi f_{2b} si ottiene da f_b considerando il poligono regolare di $2b$ lati di cui b lati sono sovrapposti ai b lati di f_b. Si osservi ancora che essendo $a < 2b$, il diedro che due facce $2b$ latere di Π formano tra loro è minore del diedro formato da una faccia a latera e una $2b$ latera. Indicheremo ancora con O il centro di A_f e P_f e r il raggio della sfera circoscritta ad A_f. Noi abbiamo da risolvere il seguente problema: Costruire, quando è possibile, una sfera Σ di centro O e raggio $r' > r$ in modo che conducendo dai vertici di ogni faccia f_a, f_{2b} di A_f le sfere s_a, s_{2b} ortogonali a Σ, due sfere s_{2b} si tagliano sotto angolo $\frac{\pi}{n}$, una s_a tagli le s_{2b} adiacenti sotto angolo $\frac{\pi}{2}$.

Le sfere s_{2b} segano Σ in cerchi Γ i cui piani determinano un poliedro P'_f omotetico di P_f rispetto ad O; osservando allora che una sfera ortogonale a Σ e a una sfera s_{2b} deve avere il suo centro su una faccia di P'_f concludiamo che i centri delle sfere s_a sono i vertici di P'_f e tali vertici essendo esterni a Σ lo sono anche per rispetto ai cerchi Γ. Consideriamo ora una faccia p_b di P'_f e i suoi b vertici P, Q, R,... I piani che da O proiettano PQ, QR,... passano per gli spigoli di A_f. Chiamando con r_b, a_b, O' il raggio, l'apotema e il centro di p_b è per l'osservazione fatta r_b maggiore del raggio r di Γ; se da P conduciamo le tangenti PA e PB a Γ, la sfera s_a che ha il suo centro in P ha per raggio PA ed incontra la sfera s_{2b} passante per Γ in un cerchio passante per i punti A e B; ma il piano di questo cerchio passa anche per O, esso è quindi il piano OAB che con gli analoghi relativi ai vertici Q, R,... determina sul piano della faccia f_b il poligono f_{2b}; dovendo la stessa cosa verificarsi per il poligono P, Q, R,... deduciamo subito la costruzione di Γ fissati i punti P, Q, R,... (v. fig. 4). Sia t il cerchio inscritto a p_b; P', Q', R',... i punti di contatto di t con i lati di p_b; P'', Q'', R'',... i punti medi degli archi $P'Q'$, $Q'R'$,... In P'' si tiri la tangente a t e chiamando con A e B i punti che essa ha in comune col cerchio di centro O e raggio $\overline{O'P}$, il cerchio Γ ha per raggio $O'A$. Se L e M sono i punti in cui Γ incontra PQ, per L e M passa un altro cerchio Γ' intersezione di Σ con un'altra sfera s'_{2b} e l'angolo dei due cerchi Γ e Γ', essendo Σ ortogonale a s_{2b} e s'_{2b}, è eguale all'angolo di tali sfere, cioè è $\frac{\pi}{n}$.

Possiamo allora facilmente stabilire la relazione che lega il numero 2θ misura della sezione normale del diedro di P_f e $\frac{\pi}{n}$. Sia N il punto in cui il raggio $\overline{O'Q'}$ incontra la tangente al cerchio Γ nel punto L, è $\overline{O'N}$ eguale a $\overline{O'P}$ come si deduce subito dal confronto dei due triangoli rettangoli

$O'AP$, $O'LN$. Col triangolo rettangolo $LQ'N$ si consideri l'analogo $LQ'N'$ relativo al cerchio Γ'; è

$$N'\widehat{Q'}N = 2\theta; \qquad N'\widehat{L}N = \frac{\pi}{n} \cdot \tag{2}$$

Ora da

$$\overline{NN'} = 2\,\overline{LN}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n} = 2\,\overline{NQ'}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

si ha:

$$\overline{NQ'}\,\mathrm{sen}\,\theta = \overline{LN}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n}\,; \tag{3}$$

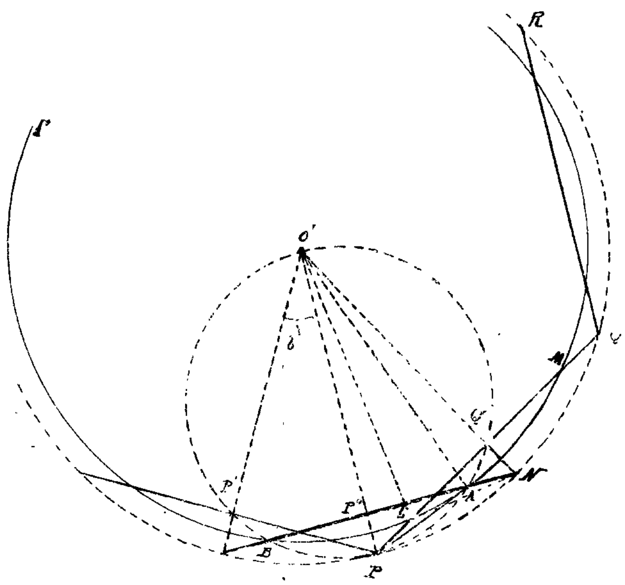

Fig. 4.

ma $\overline{LN} = \overline{PA} = \sqrt{r_b(r_b - a_b)}$; $\overline{NQ'} = r_b - a_b$, quindi:

$$\sqrt{\frac{r_b - a_b}{r_b}}\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n} \cdot \tag{4}$$

Ora essendo $a_b = r_b \cos\frac{\pi}{b}$, è $\frac{r_b - a_b}{r_b} = 1 - \cos\frac{\pi}{b} = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{b}$, la (4) diviene:

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2b}\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n} \cdot \tag{I}$$

Inversamente se esiste un poliedro platonico P'_f per il quale il numero b dei lati di ogni faccia e la misura 2θ della sezione normale del suo diedro soddisfano alla (I), essendo n un conveniente numero intero, allora costruendo su ogni faccia di P'_f il cerchio Γ nel modo suindicato e la sfera Σ di centro O passante per i cerchi Γ, il poliedro limitato dalle sfere s_{2b} passanti per i cerchi Γ e ortogonali a Σ e dalle sfere s_a con centro nei vertici di P'_f e normali a Σ, è un poliedro A_f a vertici propri per il quale due sfere s_{2b} se si tagliano formano un angolo avente per misura $\frac{\pi}{n}$, e una s_a è ortogonale alle s_{2b} adiacenti.

Sia ad esempio $f=6$, quindi $b=4$, cioè P_6 è un cubo. Si ha allora $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e la (I) diviene:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n},$$

quindi $n=4$. Ne concludiamo: *Esiste nello spazio iperbolico un cubo tronco a vertici propri con angoli solidi aventi per misura $\frac{\pi}{4}$ se formati da due facce di 8 lati, e angoli solidi retti se formati da una faccia di 3 lati e una di 8 lati.*

La costruzione di tale poliedro può effettuarsi nel seguente modo. Sulle congiungenti il centro O di un cubo con i centri delle facce si prendano dei punti O' distanti da O di $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ e sulle congiungenti di O con i vertici i punti O'' distanti da O di $\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Le 6 sfere con centro nei punti O' di raggio $\sqrt[4]{2}$ e le 8 sfere con centro nei punti O'' e raggio $\sqrt[4]{2}\,(\sqrt{2}-1)$ sono ortogonali alla sfera di centro O e raggio 1 e vi determinano internamente un cubo-tronco a vertici propri i cui diedri hanno per misura $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{4}$. Si omettono per brevità le verifiche.

Si dimostra che l'equazione (I) non può verificarsi per i valori $f=4$, 8, 12, 20.

Ad esempio nel caso $f=4$ è $b=3$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2b}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ e la (I) diviene:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{5}$$

Ora si ha $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}>\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}<\frac{1}{\sqrt{6}}$, cioè la (5) non si verifica per valori interi di n.

Per l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro la (I) diviene rispettivamente:

$$\text{a)}\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{\sqrt{3}};\qquad \text{b)}\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}};\qquad \text{c)}\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{6}},$$

e nessuna di esse può verificarsi con n intero. Resta pertanto dimostrato che ***fra i poliedri con una faccia a latera e due b latere il cubo tronco a vertici propri è il solo che possa effettuare una divisione regolare dello spazio iperbolico.***

Nello spazio iperbolico non esistono cubi-ottaedri tronchi nè icosidodecaedri tronchi i cui diedri abbiano per misura $\frac{\pi}{n}$ con n intero (*).

4. Si consideri un ordinario cubo-ottaedro-tronco P che per comodità riferiremo a una terna di assi coordinati ortogonali avente l'origine nel centro O di P, essendo gli assi x, y, z ortogonali a tre facce ottagonali di P (v. fig. 5); supporremo ancora che una faccia ottagonale di P disti da O di $3-\sqrt{2}$. Se dai vertici di ogni faccia ottagonale, esagonale, quadrangolare di P facciamo passare le sfere s_8, s_6, s_4 normali a una sfera Σ di raggio r e centro O che contenga P nel suo interno, si ottiene in Σ un cubo-ottaedro tronco Π a facce sferiche; se Π opera una divisione regolare di Σ è necessario e sufficiente per l'osservazione premessa nel n.° 3 che due sfere s_4 e s_6 siano normali, che una s_4 tagli le s_8 adiacenti secondo angoli aventi per misura $\frac{\pi}{3}$, una s_6 le s_8 adiacenti secondo angoli aventi tutti per misura $\frac{\pi}{4}$ oppure $\frac{\pi}{5}$.

Il punto $A\equiv(1;\ \sqrt{2}-1;\ 3-\sqrt{2})$ è un vertice di P. Per A passano tre sfere s_8, s_6, s_4 di centro O_8, O_6, O_4 e raggio r_8, r_6, r_4; ponendo

$$O_8\equiv(0,\ 0,\ d_8);\qquad O_6\equiv(d_6,\ d_6,\ d_6);\qquad O_4\equiv(d_4,\ 0,\ d_4),$$

(*) Essi sono i soli poliedri archimedei a vertici triangolari con 1 faccia a latera, 1 b latera, 1 c latera.

avremo:

$$r_8^2 = d_8^2 - r^2\,; \qquad r_6^2 = 3\,d_6^2 - r^2\,; \qquad r_4^2 = 2\,d_4^2 - r^2\,; \tag{6}$$

e d'altra parte è:

$$\left.\begin{aligned} \overline{O_4\,O_8}^2 = d_4^2 + (d_4 - d_8)^2\,; \qquad \overline{O_6\,O_8}^2 = 2\,d_6^2 + (d_6 - d_8)^2\,; \\ \overline{O_4\,O_6}^2 = 2\,(d_4 - d_6)^2 + d_6^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

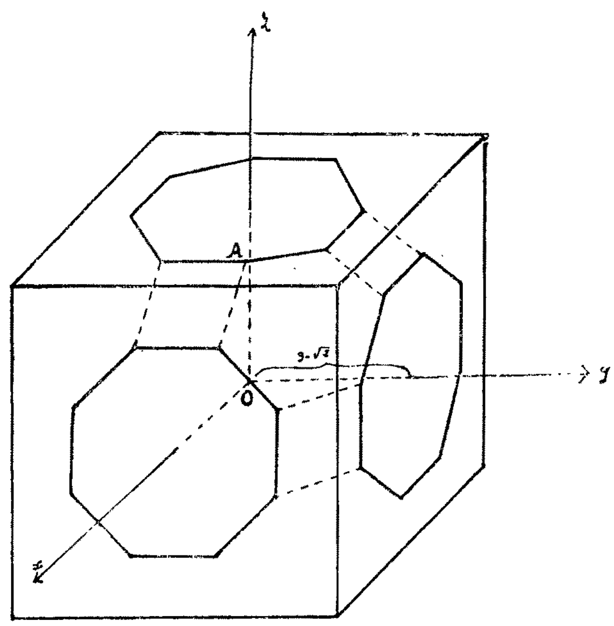

Fig. 5.

Tenendo conto che le sfere s_8, s_6, s_4 passano per A si ha subito:

$$2\,(3 - \sqrt{2})\,d_8 = 6\,d_6 = 2\,(4 - \sqrt{2})\,d_4 = r^2 + (15 - 8\sqrt{2}). \tag{8}$$

Per l'ortoganalità delle sfere s_4 e s_6 si ha:

$$\overline{O_4\,O_6}^2 = r_4^2 + r_6^2\,,$$

ovvero per le (6) e (7):

$$2\,d_4\,d_6 = r^2\,; \tag{9}$$

ma dalle (8) si ha:

$$12\,(4 - \sqrt{2})\,d_4\,d_6 = \left[r^2 + (15 - 8\sqrt{2})\right]^2,$$

e sostituendo nella (9)

$$r^2 - \sqrt{6\,(4-\sqrt{2})}\; r + (15 - 8\sqrt{2}) = 0. \tag{10}$$

Tenendo conto di quest'ultima le (8) dànno:

$$d_4 = r\sqrt{\frac{3}{4\,.\,7}\,(4+\sqrt{2})}\,; \qquad d_8 = r\sqrt{\frac{3}{2\,.\,7^2}\,(32+13\sqrt{2})}\,\cdot \tag{11}$$

Ora le sfere s_4 e s_8 si debbono tagliare con un angolo avente per misura $\frac{\pi}{3}$, cioè deve essere:

$$\overline{O_4\,O_8}^{\,2} = r_4^2 + r_8^2 + r_4\,r_8\,,$$

e dalle (6 e (7):

$$d_4\,d_8 = r^2 - \sqrt{(d_8^2 - r^2)\,(2\,d_4^2 - r^2)},$$

e dalle (11) si ha infine:

$$\frac{3}{14}\,(3+\sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{14}\sqrt{34 - 12\sqrt{2}}\,,$$

ovvero:

$$34 - 12\sqrt{2} = 43 - 30\sqrt{2}\,,$$

che è assurda.

Non esiste perciò nessun cubo-ottaedro tronco che possa effettuare una divisione regolare di Σ.

Analogamente sia P un icosidodecaedro-tronco di centro O (v. fig. 6) riferito a una terna di assi ortogonali con origine in O di cui l'asse z sia normale a una faccia di 10 lati di P e il piano xz normale a uno spigolo di tale faccia. I simboli Σ, r, s_{10}, s_6, s_4, r_{10}, r_6, r_4, O_{10}, O_6, O_4 conservino il solito significato. Se esiste un icosidodecaedro-tronco che divide regolarmente Σ dovremo supporre necessariamente che una sfera s_4 sia ortogonale alle s_6 adiacenti e tagli le s_8 adiacenti secondo un angolo avente per misura $\frac{\pi}{3}$, che una s_6 e una s_{10} se si tagliano formino un diedro avente per misura $\frac{\pi}{4}$ oppure $\frac{\pi}{5}\cdot$ Proveremo che scelto P, nel nostro caso con le apoteme delle facce di 10 lati eguali ad 1, comunque si scelga Σ le condizioni precedenti non possono verificarsi. Infatti al poliedro P appartiene il vertice A di coordinate:

$$A \equiv \left(1;\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{10};\quad \left(1+4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{10}\right)\operatorname{tang}\theta\right) \equiv \left(x_0,\ y_0,\ z_0\right),$$

ove 2θ indica la misura della sezione normale del diedro di un dodecaedro.

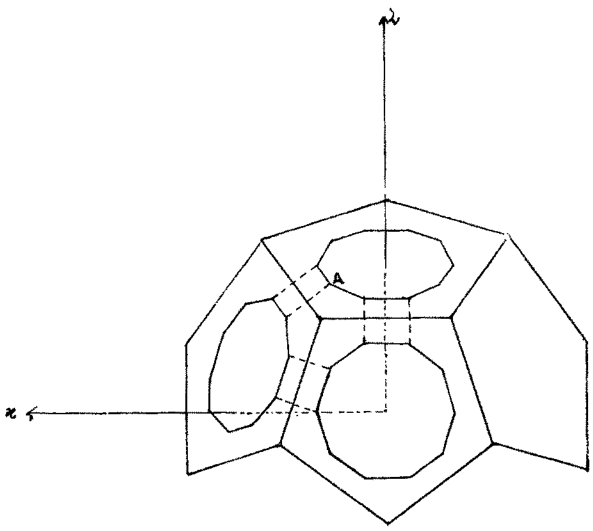

Fig. 6.

È

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}\,.$$

I centri O_{10}, O_6, O_4 delle 3 sfere che passano per A abbiano rispettivamente le coordinate:

$$O_{10} \equiv (0,\ 0,\ d_{10});\quad O_6 \equiv \left(d_6;\ \ d_6 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5};\quad d_6 \operatorname{tang}\theta\right);\quad O_4 \equiv (d_4,\ 0,\ d_4 \operatorname{tang}\theta),$$

è allora:

$$r_{10}^2 = d_{10}^2 - r^2;\quad r_6^2 = d_6^2\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{5} + \operatorname{tang}^2\theta\right) - r^2;\quad r_4^2 = d_4^2(1+\operatorname{tang}^2\theta) - r^2, \tag{12}$$

ed ancora:

$$\left.\begin{aligned} \overline{O_4 O_6}^2 &= (d_6 - d_4)^2\ (1+\operatorname{tang}^2\theta) + d_6^2 \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{5}, \\ \overline{O_6 O_{10}}^2 &= d_6^2\left(1+\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{5}\right) + (d_6 \operatorname{tang}\theta - d_{10})^2, \\ \overline{O_4 O_{10}}^2 &= d_4^2 + (d_4 \operatorname{tang}\theta - d_{10})^2. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Tenendo conto che le sfere s_{10}, s_6, s_4 passano per A si ha:

$$\left.\begin{aligned} 2\,d_{10}\,z_0 &= 2\,d_6\left(x_0+y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5}+z \operatorname{tang}\theta\right)=2\,d_4\,(x_0+z_0 \operatorname{tang}\theta)= \\ &= x_0^2+y_0^2+z_0^2+r^2. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Essendo le due sfere s_4 e s_6 ortogonali si ha:

$$\overline{O_4\,O_6}^2 = r_4^2+r_6^2,$$

e per le (12) e (13):

$$\begin{aligned} r^2+x_0^2+y_0^2+z_0^2 &= 2\,r\cos\theta\sqrt{(x_0+z_0 \operatorname{tang}\theta)\left(x_0+y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5}+z_0 \operatorname{tang}\theta\right)}= \\ &= 2\,r\,D, \end{aligned}$$

con:

$$D=\cos\theta\sqrt{(x_0+z_0 \operatorname{tang}\theta)\left(x_0+y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5}+z_0 \operatorname{tang}\theta\right)}=\sqrt{\frac{21\sqrt{5}+15}{10}},$$

e le (14) diventano:

$$d_{10}=\frac{r\,D}{z_0};\quad d_4=r\,\frac{D}{x_0+z_0 \operatorname{tang}\theta};\quad d_6=r\,\frac{D}{x_0+y_0 \operatorname{tang}\frac{\pi}{5}-z_0 \operatorname{tang}\theta}. \quad (15)$$

Ma il diedro formato dalle sfere s_4 e s_{10} ha per misura $\frac{\pi}{3}$, deve essere allora:

$$\overline{O_4\,O_{10}}^2 = r_4^2+r_{10}^2+r_4\,r_{10},$$

ovvero per le (12) e (13):

$$2\,d_4\,d_{10} \operatorname{tang}\theta = 2\,r^2-\sqrt{(d_{10}^2-r^2)\left(\frac{d_4^2}{\cos^2\theta}-r^2\right)},$$

da cui per le (15):

$$\left.\begin{aligned} (D^2-z_0^2)&\left[D^2-(x_0+z_0 \operatorname{tang}\theta)^2\cos^2\theta\right]= \\ &= 4\cos^2\theta\left[z_0\,(x_0+z_0 \operatorname{tang}\theta)-D^2 \operatorname{tang}\theta\right]^2. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Ma avendosi:

$$z_0 (x_0 + z_0 \operatorname{tang} \theta) - D^2 \operatorname{tang} \theta = D^2 - (x_0 + z_0 \operatorname{tang} \theta)^2 \cos^2 \theta = \frac{17\sqrt{5} - 35}{10},$$

la (16) diviene:

$$D^2 - z_0^2 = 4 \cos^2 \theta \left[z_0 (x_0 + z_0 \operatorname{tang} \theta) - D^2 \operatorname{tang} \theta \right],$$

ovvero sostituendo:

$$21\sqrt{5} - 35 = 48\sqrt{5} - 104$$

che è assurda.

Quindi nessun icosidodecaedro-tronco può effettuare una divisione regolare di Σ.

Costituzione aritmetica del gruppo propriamente discontinuo avente per poliedro fondamentale un cubo-ottaedro a vertici impropri.

5. Si consideri il gruppo G^0 ottenuto ampliando con la riflessione $z' = z_0$ il gruppo G di sostituzioni a determinante $D = \pm 1$,

$$z' = \frac{(4a \pm 1 + 2ia_1\sqrt{2})z + (2b + ib_1\sqrt{2})}{2(2c + ic_1\sqrt{2})z + (4d \pm 1 + 2id_1\sqrt{2})}.$$

Proveremo che G^0 ha per poliedro fondamentale un cubo-ottaedro a vertici impropri. Le sostituzioni ellittiche di G^0 se $D = 1$ si hanno se $a_1 = -d_1$ e $(4a \pm 1) + (4d \pm 1)$ in valore assoluto minore di 2, ma corrispondendosi nei due termini della somma i segni $+$ e i segni $-$, quest'ultima condizione non può verificarsi. Se $D = -1$ si hanno sostituzioni ellittiche ancora se $a_1 = -d_1$ e $4(a + d)$ in valore assoluto minore di 2, quindi $a + d = 0$, cioè le sostituzioni ellittiche di G^0 hanno periodo 2, onde se due sfere (piani) di riflessione di G^0 si tagliano, esse sono ortogonali.

Troviamo ora l'espressione analitica delle riflessioni di G^0.

Se $D = 1$ un movimento di 2ª specie di G^0 è una riflessione se ha per espressione analitica:

$$z' = \frac{\left[(4a \pm 1) + 2ia_1\sqrt{2}\right] z_0 + ib_1\sqrt{2}}{2ic_1\sqrt{2}\, z_0 + \left[(4a \pm 1) - 2ia_1\sqrt{2}\right]},$$

le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{4a \pm 1}{2c_1\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2c_1\sqrt{2}}\right)^2, \tag{17}$$

con

$$(4a \pm 1)^2 + 8a_1^2 + 4b_1 c_1 = 1. \tag{18}$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi dalle (18) $a = a_1 = 0$, hanno perciò per equazione:

$$\eta = \frac{b_1\sqrt{2}}{2},$$

con b_1 intero qualunque.

Se $D = -1$ le riflessioni di G^0 hanno per espressione analitica:

$$z' = \frac{\left[i(4a \pm 1) + 2a_1\sqrt{2}\right] z_0 + 2ib}{4icz_0 + \left[-i(4a \pm 1) + 2a_1\sqrt{2}\right]},$$

con

$$(4a \pm 1)^2 + 8a_1^2 + 8bc = 1, \tag{19}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{4a \pm 1}{4c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{4c}\right)^2. \tag{20}$$

I piani di riflessione si hanno per $c = 0$, quindi $a = a_1 = 0$, hanno perciò per equazione:

$$\xi = b,$$

con b intero qualunque.

Ora il poliedro determinato dai 4 piani di riflessione:

$$\xi = 0; \quad \xi = 1; \quad \eta = 0; \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e dalle 10 sfere di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2, \ \left[c_1 = 2;\ a_1 = 1;\ a = 0;\ b_1 = -1;\ (18)\right],$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2, \ \left[c_1 = 2;\ a_1 = 1;\ a = -1;\ b_1 = -2;\ (18)\right],$$

$$
\begin{array}{llll}
\left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\quad \eta^2 & +\zeta^2= & \frac{1}{4^2}\,, & \left[c_1=1;\ a=0;\ a_1=0;\ b=0;\ (20)\right], \\
\left(\xi-\frac{3}{4}\right)^2+\quad \eta^2 & +\zeta^2= & \frac{1}{4^2}\,, & \left[c=1;\ a=-1;\ a_1=0;\ b=-1;\ (20)\right], \\
\left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 & +\zeta^2= & \frac{1}{4^2}\,, & \left[c=1;\ a=0;\ a_1=-1;\ b=-1;\ (20)\right], \\
\left(\xi-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 & +\zeta^2= & \frac{1}{4^2}\,, & \left[c=1;\ a=-1;\ a_1=-1;\ b=-2;\ (20)\right], \\
\left(\xi-\frac{3}{8}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 & +\zeta^2= & \frac{1}{8^2}\,, & \left[c=2;\ a=1;\ a_1=-1;\ b=-1;\ (20)\right], \\
\left(\xi-\frac{5}{8}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 & +\zeta^2= & \frac{1}{8^2}\,, & \left[c=2;\ a=1;\ a_1=-1;\ b=-1\ (20)\right], \\
\xi^2\quad +\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 & +\zeta^2= & \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2, & \left[c_1=1;\ a_1=0;\ a=0;\ b_1=0;\ (18)\right], \\
\left(\xi-1\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 & +\zeta^2= & \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2, & \left[c_1=1;\ a_1=1;\ a=0;\ b_1=-2;\ (18)\right],
\end{array}
$$

è un cubo ottaedro Π_{14} a diedri retti e i cui vertici impropri hanno per coordinate (v. fig. 7):

$$V_1\equiv(0,0,0);\quad V_2\equiv(1,0,0);\quad V_3\equiv\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);\quad V_4\equiv\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);$$

$$V_5\equiv\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3\sqrt{2}},0\right);\quad V_6\equiv\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3\sqrt{2}},0\right);$$

$$V_7\equiv\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3\sqrt{2}},0\right);\quad V_8\equiv\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3\sqrt{2}},0\right);$$

$$V_9\equiv\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);\quad V_{10}\equiv\left(\frac{1}{2},0,0\right);\quad V_{11}\equiv\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},0\right);\quad V_{12}=\infty.$$

Si osservi che nessuna sfera (piano) di riflessione penetra in Π_{14} lungo uno spigolo essendo il periodo delle sostituzioni ellittiche di G_0 due.

Proveremo ora che nessuno dei vertici $V_i\,(i=1,2,\ldots,11)$ è interno a una sfera di riflessione.

Infatti perchè i vertici $V_1, V_2,\ldots, V_{11}$ siano interni a una sfera (17) dovrebbero verificarsi in numeri interi rispettivamente le diseguaglianze:

$$8\,a_1^2 + (4\,a \pm 1)^2 < 1,$$

$$8\,(c_1 - a_1)^2 + (4\,a \pm 1)^2 < 1,$$

$$8\,(c_1 - a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + (4\,a \pm 1)\Big]^2 < 1,$$

$$8\,a_1^2 + \Big[2\,c_1 + (4\,a \pm 1\Big]^2 < 1,$$

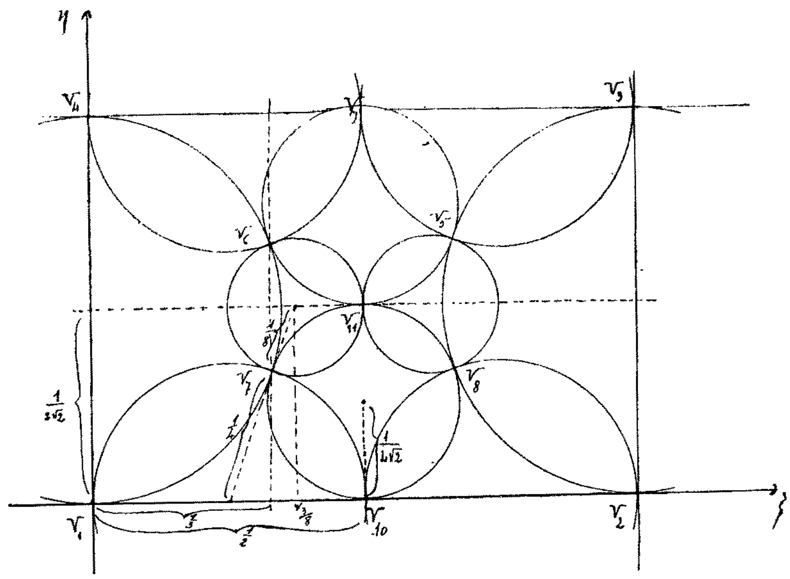

Fig. 7.

$$8\,(2\,c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[4\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 < 9,$$

$$8\,(c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[4\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 < 9,$$

$$8\,(c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 < 9,$$

$$8\,(2\,c_1 - 3\,a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + 3\,(4\,a \pm 1\Big]^2 < 9,$$

$$2\,(c_1 - 2\,a_1)^2 + \Big[2\,c_1 + (4\,a \pm 1)\Big]^2 < 1,$$

$$2\,(c_1 - 2\,a_1)^2 + (4\,a \pm 1)^2 < 1,$$

$$2\,(c_1 - 2\,a_1)^2 + \Big[c_1 + (4\,a \pm 1)\Big]^2 < 1.$$

Delle precedenti diseguaglianze le prime quattro e la 9ª e 10ª avendo nel 1° membro in uno dei termini il quadrato di un numero dispari e l'altro termine pari sono manifestamente impossibili; per la 5ª, 6ª, 7ª, 8ª diseguaglianza osserviamo che essendo il 2° termine del 1° membro dispari è necessariamente eguale ad 1, onde il 1° termine deve essere eguale a 0; si deduce allora che c_1 deve essere multiplo di 3, ma allora il 2° termine della diseguaglianza che è il quadrato della somma di due numeri multipli di 3 non può essere eguale a 1; infine per l'ultima deve aversi

$$c_1 = 2\,a_1 = -(4\,a \pm 1)$$

eguaglianze, che non sono possibili in numeri interi.

Analogamente perchè i vertici V_1, $V_2, \ldots,$ V_{11} siano interni a una sfera (20) deve aversi rispettivamente:

$$(4\;a \pm 1)^2 + 8\,a_1^2 < 1,$$
$$(4\,c - 4\,a \pm 1)^2 + 8\,a_1^2 < 1,$$
$$(4\,c - 4\,a \pm 1)^2 + 8\,(c + a_1)^2 < 1,$$
$$(4\,a \pm 1)^2 + 8\,(c + a_1)^2 < 1,$$
$$\Big[8\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(2\,c + 3\,a_1)^2 < 9,$$
$$\Big[4\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(2\,c + 3\,a_1)^2 < 9,$$
$$\Big[4\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(c + 3\,a_1)^2 < 9,$$
$$\Big[8\,c - 3\,(4\,a \pm 1)\Big]^2 + 8\,(c + 3\,a_1)^2 < 9,$$
$$\Big[2\,c - 4\,a \pm 1\Big]^2 + 8\,(c + a_1)^2 < 1,$$
$$\Big[2\,c - 4\,a \pm 1\Big]^2 + 8\,a_1^2 < 1,$$
$$\Big[2\,c - 4\,a \pm 1\Big]^2 + 2\,(c + 2\,a_1)^2 < 1.$$

Esse non possono sussistere come si prova ripetendo parola a parola il ragionamento precedente.

Ora i 24 movimenti di 1ª specie che riportano Π_{14} in sè, formano un gruppo G_{24}; essi hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix} = 1; \quad \begin{pmatrix} 0; & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ i\sqrt{2}; & -i\sqrt{1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1; & 1 \\ 2; & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i\sqrt{2}; & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ +i\sqrt{2}; & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1; & -1 \\ -i\sqrt{2}; & -1+i\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{2}; & -i\sqrt{2} \\ 2; & -(1+i\sqrt{2}) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1-i\sqrt{2}; & -1 \\ -i\sqrt{2}; & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1-i\sqrt{2}; & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -2; & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1-i\sqrt{2}; & -1 \\ -2i\sqrt{2}; & -(1-i\sqrt{2}) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1; & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -2; & 1+i\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1-i\sqrt{2}; & -1-\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{2}; & i\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}; & -1-\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{2}; & -1+i\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1; & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{2}; & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0; & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{2}; & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2; & -1+\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 2-i\sqrt{2}; & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -1+\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 2-i\sqrt{2}: & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1-i\sqrt{2}; & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -2-i\sqrt{2}; & i\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i\sqrt{2}; & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 2+i\sqrt{2}; & -1-i\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1; & -1+\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 0; & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 2-i\sqrt{2}; & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1-i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ -2-i\sqrt{2}; & 1+i\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1-i\sqrt{2}; & -1-\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -2i\sqrt{2}; & -1+i\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2; & 1-\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ -2+i\sqrt{2}; & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} i\sqrt{2}; & 1+\frac{1}{i\sqrt{2}} \\ 2+i\sqrt{2}; & -i\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

di cui la 1ª sostituzione rappresenta l'identità, le successive 9 sostituzioni i 9 movimenti a periodo 4 di G_{24}, le altre 8 sostituzioni gli otto movimenti a periodo 3 di G_{24} ed infine le ultime 6 sostituzioni le sei rotazioni a periodo 2 di G_{24}; nessuno di questi ventiquattro movimenti ad eccezione dell' identità è di G^0.

I 24 movimenti di 2ª specie che riportano Π_{14} in sè si ottengono moltiplicando i movimenti del gruppo G_{24} per la riflessione:

$$z' = -z_0 + 1,$$

che non è di G^0. Effettuando il prodotto il 3° e 4° coefficiente delle espressioni analitiche dei 24 movimenti si cambiano nei loro coniugati; si verifica allora che anch'essi non appartengono a G^0. Segue quindi che G^0 *ha per poliedro fondamentale un cubo ottaedro a vertici impropri.*

Esistono 5 divisioni regolari dello spazio iperbolico con poliedri polari degli archimedei.

6. I poliedri in esame hanno facce eguali con angoloidi regolari di vario numero di spigoli. Essi si possono ancora distribuire in 15 tipi e corrispondono alle soluzioni di cui al n.° 1 scambiando v con f, le facce a latere con gli angoli solidi di a spigoli, ecc. Per le nostre ricerche interessano solo i poliedri i cui diedri hanno per misura $\frac{\pi}{m}$ con m intero, il che, come si è già detto, porta di conseguenza che gli angoloidi dei poliedri in esame possono essere soltanto triangolari e quadrangolari, circostanza che avviene soltanto per i poliedri corrispondenti alle seguenti soluzioni:

n	α	β	a	b	v	f	Denominazione poliedro
3	1	2	3	4	5	6	Doppia piramide triangolare
4	3	1	3	4	10	8	Rombo ottaedro
4	3	1	4	3	26	24	Polare rombicuboottaedro
4	2	2	3	4	14	12	Rombo dodecaedro
5	4	1	3	4	38	24	Polare cubo simo.

Ognuno di tali poliedri ha vertici quadrangolari; se effettua quindi una divisione regolare dello spazio iperbolico ha *retti* tutti i diedri concorrenti nei vertici quadrangolari (vertici impropri), sono di conseguenza retti tutti i diedri del poliedro e perciò i suoi vertici triangolari debbono esser propri. È subito visto ora che ad ognuna delle precedenti soluzioni corrisponde un poliedro a diedri retti. Sia infatti P un ordinario poliedro archimedeo di centro O e spigolo l di cui il polare sia un poliedro corrispondente a una delle 5 soluzioni precedenti. Si considerino le sfere s aventi il loro centro nei vertici di P e di raggio $l\sqrt{2}$; ognuna di tali sfere passa per il centro di una faccia quadrata di P. Ora tutte le s così costruite sono normali alla sfera Σ di centro O tangente alle facce quadrangolari di P, e ogni s è normale alle altre sfere s adiacenti.

Il poliedro a facce sferiche interno a Σ ed esterno alle s è un poliedro dello spazio iperbolico a diedri retti e avente le caratteristiche di cui le precedenti soluzioni. Nei n.[i] 7, 8, 9 daremo la costituzione aritmetica dei gruppi della doppia piramide, del rombo-ottaedro e del rombo-dodecaedro.

Gruppo della doppia piramide.

7. Nella nota 2ª del mio lavoro: « Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi e doppie piramidi » (*) si dimostra che il gruppo G^0 delle sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + 2\beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + 2\beta}{\gamma z_0 + \delta}; \quad \alpha\delta - 2\beta\gamma = 1,$$

con α, β, γ, δ interi del campo $(1, i)$ ha per poliedro fondamentale una doppia piramide triangolare a diedri retti formata dai 4 piani (v. fig. 8):

$$\xi = 0; \quad \xi = 1; \quad \eta = 0; \quad \eta = 1;$$

e dalle due sfere:

$$(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 1;$$

tale poliedro ha le caratteristiche della 1ª soluzione del n.° 6.

(*) *Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa,* 1917.

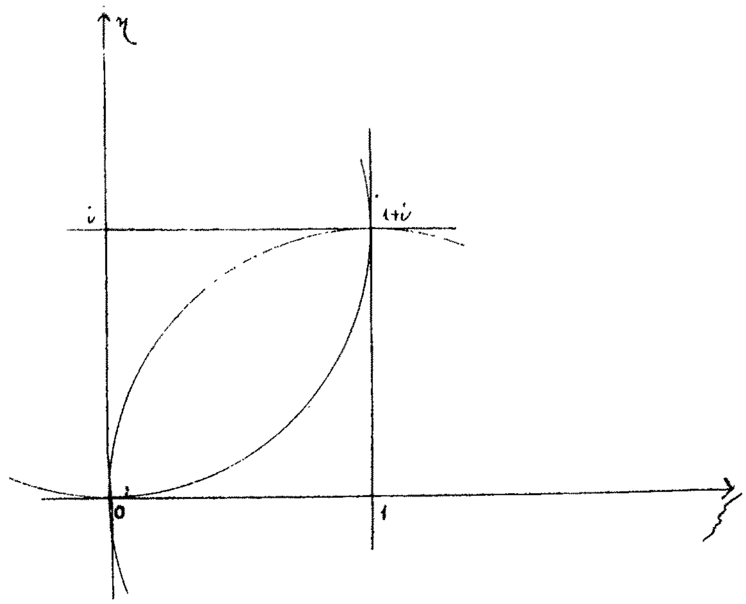

Fig. 8.

Gruppo rombo-ottaedro.

8. Si considerino tutte le sostituzioni di 1ª specie a determinante 1

$$\Omega_1)\quad z'=\frac{\alpha z+\beta}{2\gamma+\delta},\quad \begin{cases} D=\alpha\delta-2\beta\gamma=1, \\ \alpha+\delta\equiv\beta+\gamma\equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

e le altre di 1ª specie a determinante 2

$$\Omega_2)\quad z'=\frac{2\alpha z+\beta}{2\gamma z+2\delta},\quad \begin{cases} \dfrac{D}{2}=2\alpha\delta-\beta\gamma=1, \\ \alpha+\delta\equiv\beta+\gamma\equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$$

con α, β, γ, δ interi del campo $(1, i)$. Proveremo subito che esse formano un gruppo G.

Infatti da:

$$\begin{pmatrix}\alpha; & \beta\\ 2\gamma; & \delta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha'; & \beta'\\ 2\gamma'; & \delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\alpha'+2\gamma\beta'; & \beta\alpha'+\delta\beta'\\ 2(\alpha\gamma'+\gamma\delta'); & \delta\delta'+2\beta\gamma'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A; & B\\ 2C; & D\end{pmatrix},$$

si deduce che se:

$$a)\qquad \alpha+\delta\equiv\beta+\gamma\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2);\quad \alpha'+\delta'\equiv\beta'+\gamma'\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2);$$

è anche:

$$\alpha\,\alpha'\equiv\delta\,\delta' \ (\mathrm{mod.}\ 2);\quad \beta\,\alpha'+\delta\,\beta'\equiv\gamma\,\delta'+\alpha\,\gamma' \ (\mathrm{mod.}\ 2);$$

e quindi:

$$b)\qquad A+D\equiv B+C\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Analogamente da:

$$\begin{pmatrix}2\,\alpha; & \beta\\ 2\,\gamma; & 2\,\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\,\alpha'; & \beta'\\ 2\,\gamma'; & 2\,\delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,\alpha\,\alpha'+\gamma\,\beta'; & \beta\,\alpha'+\delta\,\beta'\\ 2\,(\alpha\,\gamma'+\gamma\,\delta'); & \beta\,\gamma'+2\,\delta\,\delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A; & B\\ 2\,C; & D\end{pmatrix};$$

si ha ancora che se sono vere le $a)$ è anche:

$$\gamma\,\beta'\equiv\beta\,\gamma' \ (\mathrm{mod.}\ 2);\quad \beta\,\alpha'+\delta\,\beta'\equiv\gamma\,\delta'+\alpha\,\gamma' \ (\mathrm{mod.}\ 2);$$

cioè sono vere le $b)$.

Così pure da:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 2\,\gamma; & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\,\alpha'; & \beta'\\ 2\,\gamma'; & 2\,\delta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,(\alpha\,\alpha'+\gamma\,\beta'); & 2\,\beta\,\alpha'+\delta\,\beta'\\ 2\,(\alpha\,\gamma'+2\,\gamma\,\delta'); & 2\,(\beta\,\gamma'+\delta\,\delta')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,A; & B\\ 2\,C; & 2\,D\end{pmatrix}.$$

si ha ancora che se sono vere le $a)$ è anche:

$$\alpha\,\alpha'+\gamma\,\beta'\equiv\delta\,\delta'+\beta\,\gamma' \ (\mathrm{mod.}\ 2);\quad \delta\,\beta'\equiv\alpha\,\gamma' \ (\mathrm{mod.}\ 2);$$

cioè sono vere le $b)$.

Si prova infine che moltiplicando una sostituzione Ω_2 per una sostituzione Ω_1 se ne ha una del tipo Ω_2; segue quindi che le sostituzioni date formano gruppo, anzi che:

$$\Omega_1\times\Omega_1=\Omega_1;\quad \Omega_2\times\Omega_2=\Omega_1;\quad \Omega_1\times\Omega_2=\Omega_2\times\Omega_1=\Omega_2.$$

Dimostreremo che *il gruppo G ampliato con la riflessione $z'=z_0$ ha per poliedro fondamentale un rombo-ottaedro.*

Se $D=1$ le sostituzioni ellittiche del gruppo si hanno per $\alpha+\delta=0,\pm 1$, ma essendo $\alpha\,\delta\equiv 1$ (mod. 2), è solo possibile $\alpha+\delta=0$, e quindi le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno il periodo 2. Analogamente per $D=2$, le sostituzioni ellittiche si hanno per $(\alpha+\delta)\sqrt{2}$ reale in valore assoluto minore di 2, ma essendo $\alpha + \delta \equiv 0$ (mod. 2), segue che la circostanza in esame si presenta se $\alpha + \delta = 0$, cioè anche per $D = 2$ le sostituzioni ellittiche hanno periodo 2. Ne concludiamo che se due sfere (piani) di riflessione di G_0 si tagliano, sono ortogonali.

Se $D = 1$ le riflessioni di G^0 hanno per espressione analitica:

$$z' = \frac{(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + i\,b_1}{2\,i\,c_1\,z_0 + (a_1 - i\,a_2)},$$

con

$$b_1 \equiv c_1 \pmod{2}, \quad a_1^2 + a_2^2 + 2\,b_1\,c_1 = 1, \tag{21}$$

e le corrispondenti sfere di una riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2\,c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2\,c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2\,c_1}\right)^2. \tag{22}$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi dalle (21):

$$a_1 = \pm 1; \quad a_2 = 0; \quad c_1 = 0; \quad b_1 = 2\,l; \quad (l \text{ intero arbitrario}),$$
$$a_1 = 0; \quad a_2 = \pm 1; \quad c_1 = 0; \quad b_1 = 2\,m; \quad (m \text{ intero arbitrario}),$$

essi hanno quindi per equazione:

$$\xi = l, \quad \eta = m.$$

Se $D = 2$ le riflessioni di G^0 hanno per espressione analitica:

$$z' = \frac{\sqrt{2}\,(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + \dfrac{i\,b_1}{\sqrt{2}}}{i\sqrt{2}\,c_1\,z_0 + \sqrt{2}\,(a_1 - i\,a_2)},$$

con

$$b_1 = c_1 \pmod{2}; \quad 2\,(a_1^2 + a_2^2) + b_1\,c_1 = 1, \tag{23}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2\,c_1^2}. \tag{24}$$

Dalla 2ª delle (23) segue che c_1 è un numero intero dispari, quindi per $D = 2$ non si hanno piani di riflessione.

Si consideri del prisma determinato dai 4 piani di riflessione:

$$\xi = 0; \quad \xi = 1; \quad \eta = 0; \quad \eta = 1$$

la porzione esterna alle 4 sfere di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = 1; \quad a_1 = a_2 = 0; \quad (24)\right)$$

$$(\xi - 1)^2 + \eta^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = -1; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 1; \quad (24)\right)$$

$$\xi^2 + (\eta - 1)^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = -1; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 0; \quad (24)\right)$$

$$(\xi - 1)^2 + (\eta - 1)^2 = \frac{1}{2}, \quad \left(c_1 = 1; \quad b_1 = -3; \quad a_1 = -1; \quad a_2 = 1; \quad (24)\right).$$

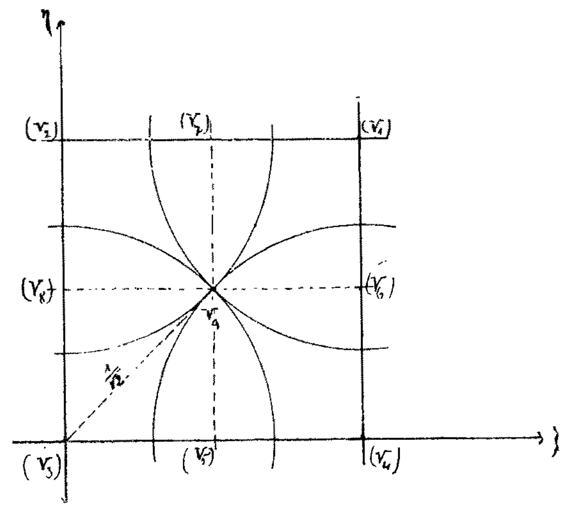

Fig. 9.

Si ottiene un ottaedro P (fig. 9) che ha tutte le caratteristiche della 2ª soluzione del n.° 6.

È chiaro che nessuna sfera (piano) di riflessione può attraversare P lungo uno spigolo, essendo le sostituzioni ellittiche di G^0 a periodo 2.

I vertici di P sono:

$$V_1 \equiv \left(1; \; 1; \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad V_2 \equiv \left(0; \; 1; \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad V_3 \equiv \left(0; 0; \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad V_4 \equiv \left(1; \; 0; \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2}; \; 0; \; \frac{1}{2}\right); \quad V_6 \equiv \left(1; \; \frac{1}{2}; \; \frac{1}{2}\right);$$

$$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2}; \; 1; \; \frac{1}{2}\right); \quad V_8 \equiv \left(0; \; \frac{1}{2}; \; \frac{1}{2}\right); \quad V_9 \equiv \left(\frac{1}{2}; \; \frac{1}{2}; \; 0\right); \quad V_{10} = \infty;$$

e noi proveremo che nessuno di essi può essere interno a una sfera di riflessione. Infatti perchè i vertici $V_1, V_2, \cdots, V_9$ siano interni a una sfera di riflessione (22) debbono verificarsi in numeri interi rispettivamente le diseguaglianze:

$$\begin{aligned}
(2c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 + 2c_1^2 &< 1,\\
a_2^2 + (2c_1 + a_1)^2 + 2c_1^2 &< 1,\\
a_2^2 + a_1^2 + 2c_1^2 &< 1,\\
(2c_1 - a_2)^2 + a_1^2 + 2c_1^2 &< 1,\\
(c_1 - a_2)^2 + a_1^2 + c_1^2 &< 1,\\
(2c_1 - a_2)^2 + (c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1,\\
(c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1,\\
a_2^2 + (c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1,\\
(c_1 - a_2)^2 + (c_1 + a_1)^2 &< 1.
\end{aligned}$$

Le prime otto sono impossibili essendo $|c_1| \geqq 1$, per l'ultima dovrebbe aversi $c_1 = -a_1 = a_2$ e la seconda delle (21) diviene:

$$2c_1^2 + 2b_1 c_1 = 1,$$

che è assurda.

Analogamente perchè i vertici $V_1, V_2, \cdots, V_9$ siano interni a una sfera (24) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned}
2(c_1 - a_2)^2 + 2(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1,\\
2a_2^2 + 2(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 1,\\
2a_2^2 + 2a_1^2 + c_1^2 &< 1,\\
2(c_1 - a_2)^2 + 2a_1^2 + c_1^2 &< 1,\\
(c_1 - 2a_2)^2 + 4a_1^2 + c_1^2 &< 2,\\
4(c_1 - a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 + c_1^2 &< 2,\\
(c_1 - 2a_2)^2 + 4(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 &< 2,\\
4a_2^2 + (c_1 + 2a_1)^2 + c_1^2 &< 2,\\
(c_1 - 2a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 &< 2.
\end{aligned}$$

Le prime 4 sono impossibili essendo $|c_1| \geqq 1$; dalla 5ª, 6ª, 7ª, 8ª diseguaglianza si ha $c_1 = 1$ e $1 + 2a_1 = 0$ oppure $1 - 2a_2 = 0$, ciò che non può essere; per l'ultima, avendo $c_1 - 2a_2$ e $c_1 + 2a_1$ la stessa parità, deve essere $c_1 = 2a_2 = -2a_1$, e la seconda delle (23) diventa:

$$4a_1^2 - 2a_1 b_1 = 1,$$

che non può essere.

I movimenti di 1ª specie che riportano P in sè formano un gruppo G_8 ed hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -i \\ 0; & -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -(1+i) \\ 0; & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -1 \\ 0; & i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & -\frac{1}{2} \\ 1; & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & \frac{1}{2} \\ 1; & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & \frac{1-2i}{2} \\ 1; & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & -\frac{1+2i}{2} \\ 1; & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix};$$

e nessuno di essi, ad eccezione dell'identità, è di G^0.

I movimenti di 2ª specie che riportano P in sè si ottengono ampliando G_8 con la riflessione $z' = -z_0 + 1$; essi hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix} -i; & i \\ 0; & i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+i; & 0 \\ 0; & 1-i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & i \\ 0; & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1-i; & 2i \\ 0; & 1+i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & \frac{i}{2} \\ 1; & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & \frac{i-2}{2} \\ 1; & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & -\frac{2-i}{2} \\ 1; & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}; & -\frac{i}{2} \\ 1; & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix};$$

e nessuno di essi appartiene a G^0. Segue che G^0 *ha per poliedro fondamentale un rombo-ottaedro.*

Gruppo rombo-dodecaedro.

9. Si considerino tutte le sostituzioni di 1ª specie a determinante 1:

$$\left\{\begin{array}{l}\Omega_1 \sim z_1 = \dfrac{\alpha z + 2\beta}{2\gamma z + \delta}, \\ \alpha\delta - 4\beta\gamma = 1,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\Omega_2 \sim z_1 = \dfrac{2\alpha z + \beta}{\gamma z + 2\delta}, \\ 4\alpha\delta - \beta\gamma = 1,\end{array}\right.$$

con

$$\alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2},$$

e α, β, γ, δ interi del campo $(1, i)$. Si prova facilmente che tali sostituzioni formano un gruppo G. Così ad es. si ha:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha; & \beta \\ \gamma; & 2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha'; & \beta' \\ \gamma'; & 2\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha\alpha' + \gamma\beta'; & 2(\beta\alpha' + \delta\beta') \\ 2(\alpha\gamma' + \gamma\delta'); & \beta\gamma' + 4\delta\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A; & 2B \\ 2C; & D \end{pmatrix};$$

e da:

$$\alpha + \delta \equiv \beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2}; \qquad \alpha' + \delta' \equiv \beta' + \gamma' \equiv 0 \pmod{2},$$

segue:

$$\gamma\beta' \equiv \gamma'\beta \pmod{2}; \qquad \beta\alpha' + \delta\beta' \equiv \gamma\delta' + \alpha\gamma' \pmod{2},$$

cioè:

$$A + D \equiv B + C \equiv 0 \pmod{2}.$$

In generale si ha:

$$\Omega_1 \times \Omega_1 = \Omega_2 \times \Omega_2 = \Omega_1; \qquad \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega_2 \times \Omega_1 = \Omega_2.$$

Si ampli il gruppo G con la riflessione $z' = z_0$; si ha un gruppo G^0, che noi proveremo ha per poliedro fondamentale un rombo-dodecaedro. Infatti dalla condizione $\alpha + \delta \equiv 0 \pmod{2}$ si trova subito che se una sostituzione Ω_1 o Ω_2 è ellittica ha il periodo 2, onde se due sfere (piani) di riflessione si tagliano sono ortogonali.

Un movimento Ω_1 è una riflessione se ha per espressione analitica:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + 2 i b_1}{2 i c_1 z_0 + (a_1 - i a_2)},$$

con:

$$b_1 + c_1 \equiv 0 \pmod{2}; \qquad a_1^2 + a_2^2 + 4\, b_1\, c_1 = 1; \tag{25}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2\,c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2\,c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2\,c_1}\right)^2. \tag{26}$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi dalle (25):

$$a_1 = \pm 1; \quad a_2 = 0; \qquad b_1 = 2\,l; \quad (l \text{ intero arbitrario});$$

$$a_1 = 0; \qquad a_2 = \pm 1; \quad b_1 = 2\,m; \quad (m \text{ intero arbitrario});$$

hanno cioè per equazione:

$$\xi = 2\,l; \quad \eta = 2\,m.$$

Un movimento Ω_2 è una riflessione se ha per espressione analitica:

$$z' = \frac{2\,(a_1 + i\,a_2)\,z_0 + i\,b_1}{i\,c_1\,z_0 + 2\,(a_1 - i\,a_2)},$$

con:

$$b_1 + c_1 \equiv 0 \pmod{2}; \quad 4\,(a_1^2 + a_2^2) + b_1\,c_1 = 1; \tag{27}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{2\,a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{2\,a_1}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}. \tag{28}$$

Non vi sono piani di riflessione perchè per la 2ª delle (27) si ha che c_1 è dispari.

La porzione di prisma interna ai quattro piani di riflessione (fig. 10):

$$\xi = 0; \quad \xi = 2; \quad \eta = 0; \quad \eta = 2;$$

ed esterna alle 8 sfere di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \Big[a_1 = a_2 = 0; \quad b_1 = c_1 = 1; \quad (28)\Big],$$

$$(\xi - 2)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \Big[a_2 = 1; \quad a_1 = 0; \quad c_1 = 1; \quad b_1 = -3; \quad (28)\Big],$$

$$\left(\xi-2\right)^2+\left(\eta-2\right)^2+\zeta^2=1, \quad \left[a_2=1;\ -a_1=1;\ c_1=1;\ b_1=-7;\ (28)\right],$$

$$\xi^2+\left(\eta-2\right)^2+\zeta^2=1, \quad \left[a_2=0;\ a_1=-1;\ c_1=1;\ b_1=-3;\ (28)\right],$$

$$\left(\xi-1\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=2;\ a_1=-1;\ c_1=1;\ b_1=-1;\ (26)\right],$$

$$\left(\xi-1\right)^2+\left(\eta-\frac{3}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=2;\ a_1=-3;\ c_1=1;\ b_1=-3;\ (26)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-1\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=1;\ a_1=-2;\ c_1=1;\ b_1=-1;\ (26)\right],$$

$$\left(\xi-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\eta-1\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}, \quad \left[a_2=3;\ a_1=-2;\ c_1=1;\ b_1=-3;\ (26)\right];$$

forma un rombododecaedro P di cui la 4ª soluzione del n.° 6.

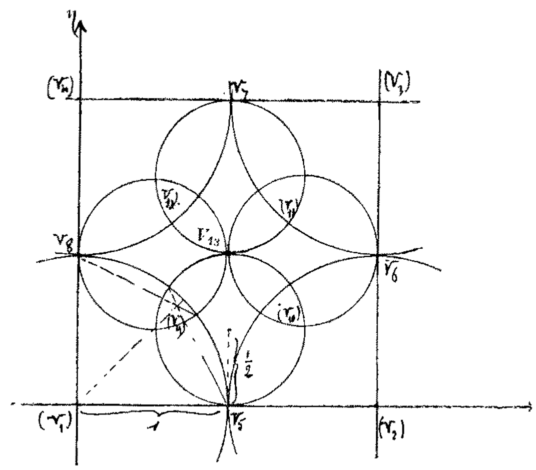

Fig. 10.

Proveremo che G^0 ha per poliedro fondamentale P.

Si osservi che essendo le sostituzioni ellittiche di G^0 a periodo 2, nessuna sfera (piano) di riflessione penetra in P lungo uno spigolo.

Proveremo ora che i vertici di P non possono essere interni ad alcuna sfera di riflessione. I vertici di P sono:

$$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1);\quad V_2\equiv(2,\ 0,\ 1);\quad V_3\equiv(2,\ 2,\ 1);\quad V_4\equiv(0,\ 2,\ 1);$$

$$V_5\equiv(1,\ 0,\ 0);\quad V_6\equiv(2,\ 1,\ 0);\quad V_7\equiv(1,\ 2,\ 0);\quad V_8\equiv(0,\ 1,\ 0);$$

$$V_9 \equiv \left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right);\quad V_{10} \equiv \left(\frac{4}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right);\quad V_{11} \equiv \left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right);$$

$$V_{12} \equiv \left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right);\quad V_{13}(1,\ 1,\ 0);\quad V_{14} = \infty.$$

Perchè i vertici $V_1,\ V_2, \cdots,\ V_{13}$ siano interni a una sfera (26) debbono essere soddisfatte in numeri interi rispettivamente le diseguaglianze:

$$\begin{aligned}
a_2^2 + a_1^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
(4c_1 - a_2)^2 + a_1^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
(4c_1 - a_2)^2 + (4c_1 + a_1)^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
a_2^2 + (4c_1 + a_1)^2 + 4c_1^2 &< 1,\\
(2c_1 - a_2)^2 + a_1^2 &< 1,\\
(4c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 &< 1,\\
(2c_1 - a_2)^2 + (4c_1 + a_1)^2 &< 1,\\
a_2^2 + (2c_1 + a_1)^2 &< 1,\\
(4c_1 - 3a_2)^2 + (4c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(8c_1 - 3a_2)^2 + (4c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(4c_1 - 3a_2)^2 + (8c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(8c_1 - 3a_2)^2 + (8c_1 + 3a_1)^2 + 4c_1^2 &< 9,\\
(2c_1 - a_2)^2 + (2c_1 + a_1)^2 &< 1.
\end{aligned}$$

Le prime 4 diseguaglianze non possono sussistere essendo $|c_1| \geqq 1$; la 5ª, la 6ª, la 7ª e la 8ª non possono sussistere perchè dovendosi annullare nel 1° membro ognuno dei termini ne seguirebbe che a_1 e a_2 debbono essere numeri pari contrariamente alla 2ª eguaglianza (25); dalla 9ª, 10ª, 11ª, 12ª segue $c_1 = 1$, ed avendo a_1 e a_2 differente parità uno dei primi due termini del 1° membro deve essere eguale a 1, l'altro annullarsi, in ogni caso i numeri 4 o 8 debbono essere multipli di 3 e ciò è assurdo; dall'ultima perchè si verifichi segue:

$$-a_1 = a_2 = 2c_1,$$

cioè a_1 e a_2 sono pari, il che non può essere.

Analogamente perchè i vertici $V_1, V_2, \cdots, V_{13}$ siano interni a una sfera (28) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned}
&4a_2^2 + 4a_1^2 + c_1^2 < 1,\\
&4(c_1 - a_2)^2 + 4a_1^2 + c_1^2 < 1,\\
&4(c_1 - a_2)^2 + 4(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 < 1,\\
&4a_2^2 + 4(c_1 + a_1)^2 + c_1^2 < 1,\\
&(c_1 - 2a_2)^2 + 4a_1^2 < 1,\\
&4(c_1 - a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 < 1,\\
&(c_1 - 2a_2)^2 + 4(c_1 + a_1)^2 < 1,\\
&4a_2^2 + (c_1 + 2a_1)^2 < 1,\\
&4(c_1 - 3a_2)^2 + 4(c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 < 9,\\
&4(2c_1 - 3a_2)^2 + 4(c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 < 9,\\
&4(c_1 - 3a_2)^2 + 4(2c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 < 9,\\
&4(2c_1 - 3a_2)^2 + 4(2c_1 + 3a_1)^2 + c_1^2 < 9,\\
&(c_1 - 2a_2)^2 + (c_1 + 2a_1)^2 < 1.
\end{aligned}$$

Ancora le prime 4 non possono sussistere essendo $|c_1| \geqq 1$; la 5^a, 6^a, 7^a, 8^a non possono sussistere perchè dovendosi annullare ognuno dei termini del 1^o membro segue che c_1 è pari contrariamente alla 2^a eguaglianza delle (27); per la 9^a, 10^a, 11^a, 12^a essendo c_1 dispari segue $c_1 = 1$, e quindi per la possibilità di ciascuna di esse deve verificarsi rispettivamente in numeri interi uno dei sistemi:

$$\begin{cases} 1 - 3a_2 = 1, \\ 1 + 3a_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - 3a_2 = -1, \\ 1 + 3a_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 3a_2 = 1, \\ 2 + 3a_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 - 3a_2 = -1, \\ 2 + 3a_1 = 0, \end{cases}$$

e ciascuno di essi non può verificarsi in numeri interi.

Infine per l'ultima deve aversi $c_1 = 2a_2 = -2a_1$, cioè c_1 pari, ciò che si è visto non può essere.

I movimenti di 1^a specie che riportano P in sè formano un gruppo G_{24}; essi hanno per espressione analitica:

$$\begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+i; & 2(1-i) \\ 0; & 1-i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i; & 2(1-i) \\ 0; & -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1-i; & -2(1-i) \\ 0; & 1+i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} (1+2i)\,i; & (1-2i)\,i \\ i; & -i; \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1-i; & -(2+i) \\ -i; & -(1-i) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i; & (1-2i)\,i \\ i; & -(1+2i)\,i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+i; & -(1+2i) \\ 1; & -i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+i; & -1-2i \\ 1; & -(1+i) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i; & -(1+2i) \\ 1; & -(2+i) \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1-i}{2i}; & \dfrac{1+i}{2i} \\ \dfrac{1-i}{2i}; & -\dfrac{1+i}{2i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{2i}; & +\dfrac{1+i}{2i} \\ \dfrac{1-i}{2i}; & -\dfrac{1-i}{2i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2+i}{1+i}; & -\dfrac{2+3i}{1+i} \\ \dfrac{1}{1+i}; & -\dfrac{1}{1+i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1+i}; & \dfrac{2+3i}{1+i} \\ -\dfrac{1}{1+i}; & \dfrac{2+i}{1+i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+2i}{1-i}; & \dfrac{-3i}{1-i} \\ \dfrac{1}{1-i}; & -\dfrac{2+i}{1-i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\dfrac{2+i}{1-i}; & \dfrac{3i}{1-i} \\ -\dfrac{1}{1-i}; & \dfrac{1+2i}{1-i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+2i}{1+i}; & \dfrac{2-3i}{1+i} \\ \dfrac{1}{1+i}; & \dfrac{-i}{1+i} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dfrac{i}{1+i}; & \dfrac{2-3i}{1+i} \\ \dfrac{1}{1+i}; & -\dfrac{1+2i}{1+i} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+i; & -(1+4i) \\ 1; & -(2+i) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -3 \\ 1; & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1; & -3i \\ -i; & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -(1-i); & 1 \\ i; & 1-i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -(1+i); & 3i \\ -1; & 1+i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1+2i; & 1-4i \\ 1; & -(1+2i) \end{pmatrix};$$

di cui la 1ª sostituzione rappresenta l'identità, le successive 9 sostituzioni i 9 movimenti a periodo 4 di G_{24}, le successive 8 sostituzioni gli 8 movimenti a periodo 3 di G_{24}, ed infine le ultime 6 sostituzioni le 6 rotazioni a periodo 2; nessuno di questi 24 movimenti ad eccezione dell' identità appartiene a G^0.

Moltiplicando ora il gruppo G_{24} per la riflessione:

$$z' = -z_0 + 2 = \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} z_0$$

che non appartiene a G_0 si ottengono altri 24 movimenti di 2ª specie che riportano P in sè. Osservando che effettuando i prodotti il terzo e quarto coefficiente di ogni sostituzione si cambiano nei loro coniugati moltiplicati per i, ne segue che le sostituzioni di G_{24} che ridotte a determinante 1 non hanno il 3^o e 4^o coefficiente intero, moltiplicate per la riflessione $z' = -z_0 + 2$, conservano il 3^o e 4^o coefficiente non intero, ci restano allora da esaminare delle nuove quelle che provengono dai prodotti:

$$\begin{pmatrix} -i; & 2(1+i) \\ 0; & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1; & 2i \\ 0; & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1+i; & -2+i \\ i; & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+i); & 3 \\ -1; & 1-i \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1-i; & -1+2i \\ 1; & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i; & 2i \\ 0; & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-i); & -i \\ i; & -(1+i) \end{pmatrix};$$

e nessuna delle sostituzioni rappresentata di tali prodotti appartiene a G^0.

Resta pertanto dimostrato che G^0 ha per poliedro fondamentale un rombododecaedro.