

SULLA DISPERSIONE DELL'ENERGIA NEL CAMPO ELETTROMAGNETICO
GENERATO DALLA CONVEZIONE DI UNA O DUE CARICHE,

di ANNIBALE COMESSATTI.

Le brevi ricerche che seguono sono state fatte collo scopo di ricavare una formola la quale esprima la dispersione dell'energia relativa al campo elettromagnetico generato dal moto di due cariche. L'espressione relativa al campo generato da una carica è nota; e di essa trattò abbastanza recentemente il compianto prof. Picciati in una sua Nota dei Lincei¹⁾; anzi i miei risultati derivano da un esame un po' accurato e da una estensione del procedimento ivi seguito. Questi risultati sono due; l'uno direi d'indole positiva, l'altro d'indole critica. Il primo di essi consiste nell'espressione che si può assegnare alla dispersione dell'energia relativa al campo generato da due cariche, considerandola come un flusso passante attraverso ad una sfera di raggio infinitamente crescente; l'altro invece si riferisce al campo di validità del procedimento, usato così dal Picciati, come dagli autori inglesi. Questi infatti hanno implicitamente ammesso che l'espressione limite del flusso passante attraverso ad una sfera di raggio indefinitamente crescente sia indipendente dal centro della sfera; il risultato che io ottengo è di far vedere che ciò non si verifica se non si introducono particolari restrizioni le quali poi si applicano anche al caso di due cariche. Più precisamente affinché l'espressione relativa ad una sfera di dato centro sia paragonabile colle altre, sono necessarie le seguenti condizioni:

I. Che i centri delle sfere considerate si trovino in un campo finito C (campo d'osservazione) rispetto al quale sono dunque da considerarsi come elementi all'infinito, gli elementi

1) " *Flusso-di energia e radiazione, ecc. . . .* ", Atti della R. Acc. dei Lincei, 24 aprile 1904, Vol. XIII, serie 5.a fasc. 8°.

superficiali delle sfere di raggio grandissimo coi centri nei punti di esso;

II. Che siano *trascurabili* rispetto ai valori assoluti della velocità e della accelerazione della carica (o delle cariche) gli incrementi Δv e Δa di queste quantità, che competono ad incrementi di tempo dell'ordine di grandezza di quello impiegato dalla luce a percorrere la massima distanza del campo C.

Ecco dunque quale sia il campo di validità degli accennati procedimenti, ossia la condizione per l'unicità dei risultati ottenuti coll'uso di essi: dei quali risultati, quello che io ricaverò in seguito per il caso di due cariche ha dovuto (per ragioni di calcolo che si vedranno in appresso) esser sottoposto ad una ulteriore restrizione ed è quella che si possano trascurare i quadrati dei rapporti tra le velocità delle cariche e la velocità della luce. Essa restrizione menoma un poco ¹⁾ la generalità dei risultati, ma si rende, come vedremo, necessaria per il loro conseguimento.

Problema relativo ad una carica: posizione di esso.

Allo scopo di ricavare i risultati critici accennati nell'introduzione è opportuno dapprima dare una rapida scorsa al problema relativo ad una carica, e indugiarsi un poco a riflettere sulla sua risoluzione. Questo problema si può impostare nel modo seguente ²⁾:

Siano $x = \phi(t)$, $y = \chi(t)$, $z = \psi(t)$ le equazioni del moto di una carica m in un campo impolarizzabile, e si associ in un generico istante t ad ogni punto potenziato P, quella posizione Ω della carica da cui partono le azioni che arrivano in P nell'istante t . Posto $\mathbf{r} = \mathbf{P}\Omega$, $\bar{t} = t - A r$ (ove con A si denota al solito l'inversa della velocità della luce), le coordinate di Ω sono rispettivamente $\bar{\phi} = \phi(\bar{t})$, $\bar{\chi} = \chi(\bar{t})$, $\bar{\psi} = \psi(\bar{t})$ e l'espressione di r è data da

$$r^2 = (x - \bar{\phi})^2 + (y - \bar{\chi})^2 + (z - \bar{\psi})^2.$$

1) Le approssimazioni introdotte sono effettivamente valide in molti casi offerti dalla pratica.

2) Per maggior diffusione vedi la citata nota del Picciati.

Se ora s indica con \mathbf{v} la velocità della carica nell'istante \bar{t} è noto ¹⁾ che posto

$$s = r(1 - A v \cos \widehat{vr}) ,$$

le espressioni dei potenziali elettrostatico e vettore sono

$$(1) \quad V = \frac{m}{s} , \quad \mathbf{j} = A \mathbf{V} \mathbf{v} ,$$

e quelle delle forze del campo

$$(2) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V - A \frac{d\mathbf{j}}{dt} , \quad \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{j} \text{ '}$$

Il teorema di Poynting dà come espressione dell'energia dE passante nell'unità di tempo attraverso ad un elemento superficiale $d\sigma$ di coseni α, β, γ la

$$dE = \frac{1}{4\pi A} \mathbf{H} \wedge \mathbf{E} d\sigma ,$$

cioè se $X, Y, Z; L, M, N$ sono le componenti di \mathbf{E}, \mathbf{H} la

$$dE = \frac{1}{4\pi A} \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ L & M & N \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma ;$$

da cui si ricava per una generica superficie σ

$$(3) \quad E = \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ L & M & N \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma .$$

Se adunque noi vogliamo risolvere il problema relativo ad una carica ci converrà anzitutto assegnare le espressioni esplicite delle componenti di \mathbf{E}, \mathbf{H} in funzione degli elementi determinativi del campo (massa, posizione, velocità accelerazione, ...) e poi ricorrere all'integrale (3) e determinarne

1) Cfr. Levi-Civita. " *Sul campo elettromagnetico* ", ecc. Nuovo Cimento. Serie V, vol. VI, 1903.

2) Con \mathbf{E} dinoto la forza elettrica, con \mathbf{H} la magnetica: per le notazioni vettoriali mi attengo qui e nel seguito alle proposte dei sigg. Burali-Forti e Marcolongo. Cfr. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo. T. XXIII e XXIV.

Sia O il centro della sfera σ su cui si eseguisce l'integrazione e nel quale supporremo posta l'origine delle coordinate; e individuiamo il punto P di σ mediante le tre grandezze ρ, ϑ, φ ; poichè l'integrale (4) si esplicita nel modo seguente:

$$(6) \quad E' = \int_{\sigma} \left[\left\{ (X)(N) - (Z)(M) \right\} \alpha + \left\{ (Z)(L) - (X)(N) \right\} \beta + \right. \\ \left. + \left\{ (X)(M) - (Y)(L) \right\} \gamma \right] \rho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

si potrà eseguire il calcolo materiale di esso appena si sappiano esprimere le quantità che compaiono nelle formole che danno i valori di $(X), \dots, (L), \dots$, e le α, β, γ mediante ρ, ϑ e φ .

Se ora si pone

$$\alpha_1 = \cos r x, \quad \beta_1 = \cos r y, \quad \gamma_1 = \cos r z; \\ \lambda = \cos v x, \quad \mu = \cos v y, \quad \nu = \cos v z, \quad \omega = \widehat{v r}$$

dalle (5) si ricavano le

$$(7) \quad (X) = \frac{m A^2 a}{r(1 - A v \cos \omega)} \left\{ \frac{\alpha_1 \cos \widehat{a r}}{1 - A v \cos \omega} - A \frac{v \lambda \cos \widehat{a r}}{1 - A v \cos \omega} - \cos a x \right\} \\ \dots \dots \dots \\ (L) = \frac{m A^2 a}{r(1 - A v \cos \omega)} \left\{ \beta_1 \cos a z - \gamma_1 \cos a y + A v \cos \widehat{a r} \frac{\beta_1 \nu - \gamma_1 \mu}{1 - A v \cos \omega} \right\}, \\ \dots \dots \dots$$

nelle quali compariscono le quantità

$$(8) \quad a, v; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda, \mu, \nu, \cos \omega, \cos a x, \cos a y, \cos a z, \cos \widehat{a r}$$

di cui (assieme alle α, β, γ) convien ricercare l'espressione in termini di ρ, ϑ, φ .

Abbastanza facilmente si ottiene l'intento ponendo il centro O di σ in una posizione particolarizzata rispetto alla carica mobile. Ciò avviene se per esempio, assumiamo col Picciati come centro di σ una delle posizioni occupate dalla carica mobile, supponendo che σ sia la sfera sulla quale arrivano nell'istante t le azioni partite dal suo centro nell'istante $t - A \rho$ ed orientiamo gli assi in modo che quello delle z sia parallelo

a v. In tale ipotesi infatti a e v sono costanti riferendosi ambedue all'istante $t - A\rho$ e ρ ed r coincidono; onde segue facilmente

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha = \sin \vartheta \cos \phi, & \lambda &= 0, \\ \beta_1 &= \beta = \sin \vartheta \sin \phi, & \mu &= 0, & \omega &= \vartheta, \\ \gamma_1 &= \gamma = \cos \vartheta & ; & \nu &= 1;\end{aligned}$$

ed inoltre essendo $\cos ax$, $\cos ay$, $\cos az$; $\cos vx$, $\cos vy$, $\cos vz$ costanti si ha

$$\cos \widehat{ar} = \alpha \cos ax + \beta \cos ay + \gamma \cos az;$$

per cui, in definitiva, tutto si lascia esprimere mediante ρ , ϑ e ϕ ; e non difficilmente consegue dal calcolo dell'integrale (6) l'espressione finale data dal Picciati cioè la

$$(9) E' = -m^2 A^3 a^3 \left\{ \frac{2(A^2 v^2 + 5)}{15(1 - A^2 v^2)^4} + \frac{4A^2 v^3 (A^2 v^4 + A^2 v^2 - 2) \sin^2 \alpha z}{15(1 - A^2 v^2)^5} \right\}.$$

Maggiori difficoltà si presentano invece se il centro O di σ si assume in posizione generica. In tale caso infatti ad ogni punto P della sfera di raggio ρ rimane associato un punto Ω *variabile* con P ; e il saper esprimere le quantità (7) mediante ρ , ϑ e ϕ implica la conoscenza di espressioni *esplicite* che diano il variare di Ω al variare di P sopra σ . Ora queste espressioni sono intimamente legate alla natura delle funzioni $\phi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ che definiscono il moto della carica e che, per la generalità del problema, debbono rimanere indeterminate¹⁾.

Per gettare un po' di luce sopra le difficoltà accennate dividiamole in due tipi differenti:

1) Notiamo che tutto sarebbe risoluto qualora si potessero determinare le espressioni *esplicite* delle componenti r_x , r_y , r_z , di $r = P\Omega$, le quali son definite dalle equazioni *implicite*

$$\begin{aligned}r_x &= x - \phi(t - A\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}) \\ r_y &= y - \chi(t - A\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}) \\ r_z &= z - \psi(t - A\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2})\end{aligned}$$

essendo x , y , z coordinate di P , cioè

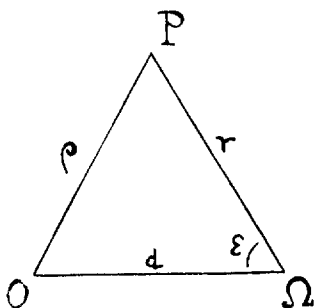
$$x = \rho \sin \vartheta \cos \phi, \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \vartheta.$$

1. Difficoltà che derivano dal variare del vettore $\mathbf{r} = \mathbf{P}\Omega$ al variare di P , *ma non dal variare di* $\bar{t} = t - A r$ (influiscono su $r, \alpha, \beta, \gamma, \omega, \cos ar$),

2. Difficoltà che derivano dal variare dell'istante t a cui si riferiscono \mathbf{a} e \mathbf{v} (influiscono su $a, v, \lambda, \mu, \nu, \omega, \cos ax, \cos ay, \cos az, \cos ar$),

e vediamo separatamente, se ed in quale modo si possono rimuovere, e quali restrizioni importi il poter ridurre l'espressione di \mathbf{E}' a conservare sempre il medesimo limite.

Non è molto difficile togliere completamente le difficoltà del 1° tipo mostrando che se, ovunque, nell'espressione di \mathbf{E}' si pongono in luogo di $r, \alpha, \beta, \gamma, \cos ar$ le quantità $\rho, \alpha, \beta, \gamma, \cos a\rho$, cioè se al vettore \mathbf{r} si sostituisce il vettore ρ , l'integrale conserva il medesimo limite. Difatti dalla figura qui sotto si ha



$$\rho^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \epsilon = r^2 \left\{ 1 + \frac{d^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos \epsilon \right\}$$

da cui facilmente

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{d}{r} \cos \epsilon + (2) \right\},$$

indicando con (2) una parte di 2° ordine in $\frac{1}{r}$; perciò

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{d}{r^2} \cos \epsilon + (3) = \frac{1}{r} + (2)' .$$

1) Si noti che $\frac{d}{r^2}$, $\frac{d^2}{r^2}$ sono effettivi termini di 2° ordine in $\frac{1}{r}$ se si suppone che d si mantenga finito; il che è lecito quando la carica si muove rimanendo sempre nel campo d'osservazione; nel qual caso d non supera la massima distanza di questo campo.

Inoltre per un generico vettore \mathbf{k} è

$$\cos \widehat{\mathbf{k}\mathbf{r}} = \cos (\widehat{\mathbf{k}\rho} + \widehat{\rho\mathbf{r}}) = \cos \widehat{\mathbf{k}\rho} \cos \widehat{\rho\mathbf{r}} - \sin \widehat{\mathbf{k}\rho} \sin \widehat{\rho\mathbf{r}},$$

e siccome si ha

$$d^2 = \rho^2 + r^2 - 2 \rho r \cos \widehat{\rho\mathbf{r}},$$

cioè

$$\cos \widehat{\rho\mathbf{r}} = \frac{r}{2\rho} + \frac{\rho}{2r} - \frac{d^2}{2\rho r},$$

segue dalla (10)

$$\cos \widehat{\rho\mathbf{r}} = 1 + (2) .$$

Si ha inoltre facilmente

$$\sin \widehat{\rho\mathbf{r}} = (2) ,$$

e quindi in definitiva

$$(11) \quad \cos \widehat{\mathbf{k}\rho} = \cos \widehat{\mathbf{k}\mathbf{r}} + (2) .$$

Le espressioni (10), (11) provano facilmente l'asserto; poichè come si desume facilmente dalle (6), (7), le espressioni di 2° ordine indicate con (2) danno luogo a termini *almeno* di 3° ordine nell'integrale da calcolarsi, e quindi, al limite, portano contributo nullo.

La questione sarebbe a questo punto risolta ove supponessimo che durante il calcolo dell'integrale i due vettori \mathbf{a} e \mathbf{v} rimanessero costanti. Infatti allora, ponendo l'asse delle z parallelo a \mathbf{v} , le (7), e quindi la (6) si espliciterebbero mediante ρ , ϑ e ϕ come nel calcolo del Picciati, e si avrebbe ancora, quale espressione finale, la (9).

Ma quì entrano in campo le difficoltà del 2° tipo, in quanto \mathbf{a} e \mathbf{v} dipendono da t e quindi da r . Se noi vogliamo confrontare i risultati con quelli ottenuti dal Picciati ¹⁾ non possiamo lasciare variabili \mathbf{a} e \mathbf{v} ma bisogna che le supponiamo costanti cioè che le riferiamo ad un medesimo istante, per esempio all'istante $t - A\rho$. Sarà quindi necessario che le differenze

$$v(t - A\rho) - v(t - Ar) = \Delta v ,$$

$$a(t - A\rho) - a(t - Ar) = \Delta a ,$$

1) E se vogliamo poter esplicitare la quantità sotto il segno \int rispetto a ρ, ϑ, ϕ .

portino all' integrale da calcolarsi contributi trascurabili ¹⁾; e ciò avverrà precisamente quando Δv e Δa si possono considerare come infinitesime rispetto a v ed a perchè allora i termini che contengono Δv e Δa divengono infinitesimi di 3° ordine *almeno*.

Ora Δv e Δa sono incrementi corrispondenti ad incrementi di tempo:

$$t - A\rho - (t - Ar) = A(\rho - r),$$

dell'ordine di quelli impiegati dalla luce a percorrere la distanza $\rho - r$ che è, come si riconosce facilmente ²⁾, dell'ordine di d .

La stessa conclusione si avrebbe se, invece di riferire v ed a all'istante $t - A\rho$, li avessimo riferiti all'istante $t - Ar$, essendo $\rho_1 = O, P$; purchè la differenza $\rho_1 - r$ sia dell'ordine delle distanze del campo; e questa conclusione porta a supporre per v ed a quelle restrizioni che abbiamo fatte nella breve premessa a questo lavoro.

Problema relativo a due cariche: posizione di esso.

Siano m ed m_1 due cariche mobili nel campo C ; porremo un indice in basso a tutte le lettere indicanti elementi del campo generato da m_1 , mentre conserveremo senza indice quelle relative ad m .

I due campi generati da m e da m_1 si sovrappongono, di modo che le componenti delle forze totali del campo sono

$$X' = X + X_1, \dots; L' = L + L_1, \dots;$$

1) Oltre a v ed a occorrerebbe considerare anche $\cos vx, \dots, \cos ax, \dots, \cos \widehat{ar}, \cos \widehat{vr}$, notando che ai due ultimi si possono rispettivamente sostituire $\cos \widehat{a\rho}$ e $\cos \widehat{v\rho}$: ma si riconosce facilmente che gl'incrementi di queste quantità sono dello stesso ordine di $\Delta v, \Delta a$.

2) Difatti si ha

$$\rho = r \left\{ 1 + \frac{d^2}{r^2} - \frac{2d}{r} \cos s \right\}^{1/2}$$

$$\rho = r \left\{ 1 + \frac{d}{r} \cos s + (2) \right\}$$

$$\rho = r + d \cos s + (1)$$

$$\rho - r = d \cos s + (1)$$

e $\cos s$ varia con P assumendo tutti i valori da -1 a $+1$.

e quindi all'energia che passa nell'unità di tempo attraverso ad una superficie σ spetta l'espressione :

$$H = \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ L' & M' & N' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma ,$$

che tenendo conto delle sole parti di X', \dots, L', \dots che si annullano all'infinito di 1° ordine, diviene :

$$H = \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} (X') & (Y') & (Z') \\ (L') & (M') & (N') \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma ,$$

cioè

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} (X) + (X_1) & (Y) + (Y_1) & (Z) + (Z_1) \\ (L) + (L_1) & (M) + (M_1) & (N) + (N_1) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} (X) & (Y) & (Z) \\ (L) & (M) & (N) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma + \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} (X_1) & (Y_1) & (Z_1) \\ (L_1) & (M_1) & (N_1) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma + \\ &+ \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} (X) & (Y) & (Z) \\ (L_1) & (M_1) & (N_1) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma + \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} (X_1) & (Y_1) & (Z_1) \\ (L) & (M) & (N) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma . \end{aligned}$$

Da questa formola si riconosce che, se E, E_1 sono le quantità di energia dispersa relative, rispettivamente, ai campi generati da m, m_1 e si pone

$$T = \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \left\{ \begin{vmatrix} (X) & (Y) & (Z) \\ (L_1) & (M_1) & (N_1) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (X_1) & (Y_1) & (Z_1) \\ (L) & (M) & (N) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \right\} d\sigma ,$$

è

$$H = E + E_1 + T ;$$

e quindi l'energia complessiva non eguaglia la somma delle energie relative ai due campi parziali, ma questa, aumentata .

del termine T . Poichè E ed E_1 si ricavano dalla (9) basterà, pel nostro scopo, calcolare T , ossia

$$T_1 = 4\pi AT = \int_{\sigma} \left[\left\{ (N) (Y_1) - (M) (Z_1) + (N_1) (Y) - (M_1) (Z) \right\} \alpha + \right. \\ \left. + \left\{ \dots \right\} \beta + \left\{ \dots \right\} \gamma \right] d\sigma.$$

Per eseguire questo calcolo ci converrà assegnare l'espressione esplicita della quantità sotto il segno in termini di ρ, ϑ, ϕ il che si potrà fare in base alle due seguenti considerazioni:

1. È lecito, per considerazioni analoghe alle precedenti, sostituire ad r (o r_1) e alle quantità che dipendono da r, ρ e le analoghe quantità che dipendono da ρ ;

2. È lecito supporre a, v, a_1, v_1 costanti riferendole ad un medesimo istante $t - A\rho$, dappoichè supponendo valida per E e E_1 la formola (9) del Picciati noi abbiamo implicitamente fatta l'ipotesi che $\Delta v, \Delta a, \Delta v_1, \Delta a_1$ siano trascurabili rispetto a v, a, v_1, a_1 .

Si ricavano allora, ricordando le (7), pei varî termini sotto il segno espressioni del tipo di

$$(N) (Y_1) \alpha = \frac{mm_1 A^2 a a_1}{\rho^2 (1 - Av \cos \omega) (1 - Av_1 \cos \omega_1)} \left\{ \alpha \cos ay - \beta \cos ax + \right. \\ \left. + Av \frac{(\alpha\mu - \beta\lambda) \cos \widehat{a\rho}}{1 - Av \cos \omega} \right\} \left\{ \frac{\beta \cos \widehat{a_1\rho}}{1 - Av_1 \cos \omega_1} - A \frac{v_1 \mu_1 \cos \widehat{a_1\rho}}{1 - Av_1 \cos \omega_1} - \cos a_1 y \right\} \alpha,$$

le quali si esplicitano subito rispetto a ρ, ϑ, ϕ . Ne risulta però per la quantità sotto il segno una espressione sì complicata e di materiale integrazione sì enormemente difficoltosa da arrestare qualunque buona volontà: per cui abbiamo stimato opportuno di limitarci a calcolare T_1 nell'ipotesi che si possano trascurare (rispetto all'unità) i termini contenenti $A^2 v^2, A^2 v_1^2, A^2 vv_1$; il che introduce come vedremo, semplificazioni notevoli nelle operazioni e nei risultati finali.

Calcolo effettivo del termine T_1 .

Attenendoci all'ipotesi sopra introdotta, poniamo

$$T_1 = \int_{\sigma} T_1 d\sigma$$

e sviluppiamo T_2 per le potenze di Av e di Av_1 , sicchè si abbia

$$T_2 = B + AvB_1 + Av_1B_2 + C,$$

C essendo una espressione che dipende da potenze di Av e di Av^4 superiori alla prima, in modo che la parte dello sviluppo di T_2 che a noi interessa, consta dei primi tre termini dello sviluppo ora scritto. Un'ulteriore semplificazione si può portare osservando che, per ovvie ragioni di simmetria, il coefficiente di Av_1 si otterrà da quello di Av , sostituendo alle quantità senza indici quelle con indici; onde potremo occuparci soltanto dei due termini

$$B + AvB_1.$$

Per ottenere questi, anzitutto si porrà $Av_1 = 0$, indi si svilupperà l'espressione ottenuta per le potenze di Av arrestandosi alla prima. La posizione $Av_1 = 0$ unita a quella $r = r_1 = \rho$, ci dà

$$T_2 = \frac{2mm_1 A^4 aa_1}{\rho^2 (1 - Av \cos \omega)^2} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha^2 \cos ay \cos a_1 y + \alpha\beta \cos ax \cos a_1 y \\ -\alpha^2 \cos az \cos a_1 z + \alpha\beta \cos ay \cos a_1 x \\ -\beta^2 \cos ax \cos a_1 x + \alpha\gamma \cos ax \cos a_1 z \\ -\beta^2 \cos az \cos a_1 z + \alpha\gamma \cos az \cos a_1 x \\ -\gamma^2 \cos ax \cos a_1 x + \beta\gamma \cos ay \cos a_1 z \\ -\gamma^2 \cos ay \cos a_1 y + \beta\gamma \cos az \cos a_1 y \\ -(\alpha^2 + \beta^2) \frac{Av \cos \widehat{a\rho} \cos a_1 z}{1 - Av \cos \omega} \\ + \alpha\gamma \frac{Av \cos \widehat{a\rho} \cos a_1 x}{1 - Av \cos \omega} + \beta\gamma \frac{Av \cos \widehat{a\rho} \cos a_1 y}{1 - Av \cos \omega} \end{array} \right\},$$

da cui sviluppando per potenze di Av ¹⁾ si ottiene

$$T_2 = \frac{2mm_1 A^4 aa_1}{\rho^2} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha^2 \cos ay \cos a_1 y + \alpha\beta \cos ax \cos a_1 y \\ -\alpha^2 \cos az \cos a_1 z + \alpha\beta \cos ay \cos a_1 x \\ -\beta^2 \cos ax \cos a_1 x + \alpha\gamma \cos ax \cos a_1 z \\ -\beta^2 \cos az \cos a_1 z + \alpha\gamma \cos az \cos a_1 x \\ -\gamma^2 \cos ax \cos a_1 x + \beta\gamma \cos ay \cos a_1 z \\ -\gamma^2 \cos ay \cos a_1 y + \beta\gamma \cos az \cos a_1 y \end{array} \right\} +$$

1) Fatta l'ipotesi che Oz sia parallelo a v cioè che sia $\cos \omega = \cos \vartheta = \gamma$.

$$Av \left\{ \begin{array}{l} -\alpha^2 \gamma \cos ay \cos a_1 y + \alpha \beta \gamma \cos ax \cos a_1 y \\ -\alpha^2 \gamma \cos az \cos a_1 z + \alpha \beta \gamma \cos ay \cos a_1 x - \alpha^2 \cos \widehat{ap} \cos a_1 z \\ -\beta^2 \gamma \cos ax \cos a_1 x + \alpha \gamma^2 \cos ax \cos a_1 z - \beta^2 \cos \widehat{ap} \cos a_1 z \\ -\beta^2 \gamma \cos az \cos a_1 z + \alpha \gamma^2 \cos az \cos a_1 x + \alpha \gamma \cos \widehat{ap} \cos a_1 x \\ -\gamma^3 \cos ax \cos a_1 x + \beta \gamma^2 \cos ay \cos a_1 z + \beta \gamma \cos \widehat{ap} \cos a_1 y \\ -\gamma^3 \cos ay \cos a_1 y + \beta \gamma^2 \cos az \cos a_1 y \end{array} \right\}.$$

Integriamo ora separatamente la parte di T_2 indipendente e quella dipendente da Av ; dovremo moltiplicare dapprima per $d\sigma = \rho^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ e poi eseguire il calcolo. Anzitutto possiamo osservare che il ρ^2 il quale sta a fattore nell'espressione di $d\sigma$ manda via quello che si trova a denominatore nell'espressione di T_2 , per cui la quantità sotto il segno diviene indipendente da ρ , il che ci risparmia il passaggio al limite per $\rho = \infty$ e di più ci permette di eseguire il calcolo sulla sfera ω di raggio 1. Ciò posto osservando che si ha

$$\int_{\omega} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} d\omega = 4\pi,$$

da cui segue

$$\int_{\omega} \alpha^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} \beta^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} \gamma^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \frac{4\pi}{3},$$

e che inoltre per ovvie ragioni di simmetria è

$$\int_{\omega} \alpha \beta \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} \alpha \gamma \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} \beta \gamma \sin \vartheta d\vartheta d\phi = 0,$$

il calcolo del termine di T_1 indipendentemente da Av è agevolissimo e dà come risultato l'espressione

$$-\frac{16\pi}{3} \cos \widehat{aa_1} mm_1 A^2 aa_1.$$

In modo analogo riconosciuto che

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \alpha^3 \sin \vartheta d\vartheta d\phi &= \int_{\omega} \beta^3 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} \gamma^3 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \\ &= \int_{\omega} \alpha^2 \beta \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \int_{\omega} \alpha^2 \gamma \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \dots = \int_{\omega} \alpha \beta \gamma \sin \vartheta d\vartheta d\phi = 0, \end{aligned}$$

si ha facilmente che il coefficiente di $A v$ (e quindi di $A v_1$) nell'espressione cercata è nullo; rimane adunque:

$$T_1 = -\frac{16\pi}{3} \cos \widehat{aa_1} mm_1 A^3 aa_1$$

cioè

$$T = \frac{T_1}{4\pi A} = -\frac{4}{3} A^3 mm_1 aa_1 \cos \widehat{aa_1}.$$

Qualche interpretazione dei risultati ottenuti.

Ricordando che

$$H = E + E_1 + T,$$

e che per E, E_1 (nell'ipotesi che siano trascurabili i termini di 2° ordine in $A v, A v_1$) valgono le formole (ricavate dalla (9); cfr. la nota del Picciati):

$$E = -\frac{2}{3} A^3 m^2 a^2, \quad E_1 = -\frac{2}{3} A^3 m_1^2 a_1^2,$$

otterremo in definitiva

$$H = -\frac{2}{3} A^3 \left\{ a^2 m^2 + 2aa_1 mm_1 \cos \widehat{aa_1} + a_1^2 m_1^2 \right\}.$$

Interessante è il vedere quando H si riduca ad $E + E_1$; ciò avviene allora e solo che $T = 0$, cioè che

$$aa_1 \cos \widehat{aa_1} = 0$$

e quindi la dispersione dell'energia (relativa ad un dato-istante) dovuta al campo generato dalle due cariche è la stessa di quella che si avrebbe se le due cariche agissero separatamente, allora e solo che:

I. *a od a_1 sono nulli* (nel qual caso però anche E o, rispettivamente E_1 si annullano).

II. *le accelerazioni delle due cariche sono ortogonali.*

Di eguale interesse è pure il ricercare quando sia

$$H = 0,$$

il che avviene quando

$$a^2 m^2 + 2aa_1 mm_1 \cos \widehat{aa_1} + a_1^2 m_1^2 = (am - a_1 m_1)^2 + \\ + aa_1 mm_1 \sin^2 \frac{\widehat{aa_1}}{2} = 0 .$$

Si avranno dunque le due condizioni

$$am - a_1 m_1 = 0 \quad aa_1 mm_1 \sin^2 \frac{\widehat{aa_1}}{2} = 0 ,$$

le quali dànno (se si eccettui il caso $a = a_1 = 0$) l'unica soluzione

$$\frac{a}{a_1} = \frac{m_1}{m} , \quad \sin^2 \frac{\widehat{aa_1}}{2} = 0 , \text{ cioè } \widehat{aa_1} = \pi ,$$

e quindi *l'energia dispersa risulta nulla soltanto quando :*

I. *Le due cariche si muovono di moto uniforme,*

ovvero :

II. *Le accelerazioni delle due cariche sono dirette per verso opposto e stanno in ragione inversa delle masse.*