

Notiz über eine allgemeine Integralformel.

Von Niels Nielsen in Kopenhagen.

In einer russisch geschriebenen Arbeit hat N. von Sonin¹⁾ für die Eulersche Konstante Integraldarstellungen von sehr allgemeiner Form hergeleitet; ganz einfache Spezialfälle dieser Formel sind früher von Soldner²⁾ und Arndt³⁾ betrachtet worden, während Hermite⁴⁾ später und offenbar ohne die Arbeit von Sonin zu kennen, einen etwas allgemeineren Spezialfall untersucht hat.

Der folgende allgemeine Integralsatz kann als Analogon der Soninschen Formeln angesehen werden:

Es sei das bestimmte Integral

$$(1) \quad \Omega(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tx} dt,$$

welches für $\Re(x) > \omega$ konvergiert, für jeden endlichen Wert von x , welcher dieser Bedingung Genüge leistet, eine in x analytische Funktion, für welche außerdem

$$(2) \quad \lim_{\Re(x) = +\infty} (x^{\rho} \cdot \Omega(x)) = 0$$

ist, wo ρ eine angebbare, aber beliebig kleine positive Größe bedeutet, dann ist immer für $\Re(x) > \omega$

$$(3) \quad C \cdot \Omega(x) = \int_0^{\infty} (\Omega^{(1)}(t+x) - f(t) e^{-tx}) \log t dt,$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet.

¹⁾ Annalen der kaiserlichen Universität in Warschau 1889; der Titel der Arbeit lautet deutsch: Darstellungen des Logarithmus und der Eulerschen Konstante durch bestimmte Integrale.

²⁾ Théorie et table d'une nouvelle fonction transcendante. München 1809.

³⁾ Grunerts Archiv. Bd. 10; 1847.

⁴⁾ Casopis, Bd. 23, p. 273—274; 1894.

Aus der Integraldefinition des Integrallogarithmus

$$\operatorname{li}(e^{-xy}) = - \int_y^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t} dt, \quad \Re(x) > 0$$

ergibt sich unmittelbar vermöge (1)

$$(4) \quad - \int_y^{\infty} \frac{\Omega(t+x)}{t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tx} \operatorname{li}(e^{-ty}) dt, \quad \Re(x+y) > \omega,$$

woraus durch Anwendung der partiellen Integration

$$(5) \quad \Omega(x+y) \log y + \int_y^{\infty} \Omega^{(1)}(t+x) \log t dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tx} \cdot \operatorname{li}(e^{-ty}) dt.$$

Führt man demnach in das Integral rechter Hand in (5) die Entwicklung

$$(6) \quad \operatorname{li}(e^{-ty}) = C + \log t + \log y + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (ty)^s}{s! s}$$

ein, so entfließt eine Identität von dieser Form:

$$C \cdot \Omega(x) + F(x, y) = (\Omega(x+y) - \Omega(x)) \log y + \\ + \int_y^{\infty} (\Omega^{(1)}(t+x) - f(t) e^{-tx}) \log t dt;$$

da nun offenbar $F(x, y)$ mit y verschwindet, so hat man nur in dieser Formel $y = 0$ zu setzen, um die Integraldarstellung (3) zu erhalten.

Hinsichtlich der großen Allgemeinheit der so erhaltenen Formel (3) bemerken wir, daß sie für jede konvergente Fakultätenreihe

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \dots (x+s)}$$

giltig bleibt, so daß die Theorie der Gammafunktion uns viele spezielle Anwendungen unsererer Integralformel gestattet.

Als erstes Beispiel betrachten wir die altbekannte Formel

$$(7) \quad \frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu} = \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{\nu-1} dt, \quad \Re(x) \geq 0, \quad \Re(\nu) > 0$$

und finden dann aus (3) die entsprechende Formel

$$(8) \quad \frac{C}{x^\nu} = - \int_0^\infty \left(\frac{\nu}{(t+x)^{\nu+1}} + \frac{e^{-tx} t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \right) \log t \, dt,$$

wo dieselben Voraussetzungen über x und ν wie in (7) aufrecht zu halten sind.

Aus (7) findet man weiter durch Differentiation nach ν

$$\frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu} (\Psi(\nu) - \log x) = \int_0^\infty e^{-tx} t^{\nu-1} \log t \, dt,$$

wo der Kürze halber

$$(9) \quad \Psi(x) = D_\nu \log \Gamma(\nu) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{\nu+s} \right)$$

gesetzt worden ist, und somit entfließt aus (8) diese elegante Formel

$$(10) \quad \frac{C + \Psi(\nu) - \log x}{x^\nu} = -\nu \cdot \int_0^\infty \frac{\log t}{(t+x)^{\nu+1}} dt,$$

wo man $\Re(\nu) > 0$ voraussetzen muß, während x weder Null noch negativ reell angenommen werden darf.

Aus (10) kann eine große Menge anderer Formeln hergeleitet werden; setzt man z. B. $\nu = 1$, so kommt

$$(11) \quad \frac{\log x}{x} = \int_0^\infty \frac{\log t}{(t+x)^2} dt,$$

woraus durch Integration nach x

$$(12) \quad \frac{1}{2} (\log x)^2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+x} \right) \log t \, dt.$$

Setzt man nun weiter

$$(13) \quad \zeta(\nu, x, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\alpha^s}{(x+s)^\nu},$$

wo man demnach $|\alpha| < 1$ oder speziell $\alpha = 1$, $\Re(\nu) > 1$; $|\alpha| = 1$, $\Re(\nu) > 0$ annehmen muß, während x weder Null noch negativ ganz sein darf, so kommt aus (10) diese andere Formel

$$(14) \quad (C + \Psi(\nu)) \cdot \zeta(\nu, x, \alpha) + D_\nu \zeta(\nu, x, \alpha) = \int_0^\infty D_t \zeta(\nu, t+x, \alpha) \log t \, dt,$$

woraus für $\alpha = -1$, $\nu = 1$

$$(15) \quad \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \log s}{s} = \int_0^\infty \beta^{(1)}(t+1) \log t \, dt,$$

wo der Kürze halber

$$(16) \quad \beta(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \dots$$

gesetzt worden ist.

Aus der Formel (8) findet man in ähnlicher Weise die beiden anderen

$$(17) \quad C \cdot \beta(x) = \int_0^\infty \left(\beta^{(1)}(t+x) - \frac{e^{-tx}}{1+e^{-t}} \right) \log t \, dt, \quad \Re(x) > 0,$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} C \cdot (\Psi(x) - \Psi(x+y)) = \\ = \int_0^\infty \left(\Psi^{(1)}(t+x) - \Psi^{(1)}(t+x+y) - \frac{1-e^{-ty}}{1-e^{-t}} \cdot e^{-tx} \right) \log t \, dt, \end{array} \right.$$

wo man in (18) sowohl $\Re(x) > 0$ als $\Re(x+y) > 0$ voraussetzen muß; aus (17) findet man für $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ Integraldarstellungen für die beiden Produkte $C \cdot \lg 2$ und $C \cdot \pi$.

Es ist bemerkenswert, daß die Formel (8) als eine Verallgemeinerung der folgenden von Dirichlet herrührenden

$$(19) \quad C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - e^{-t} \right) \frac{dt}{t}$$

angesehen werden kann; setzt man in der Tat $x=1$, so leuchtet ein, daß (8) für $x=1$ auf diese andere Form

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+t)^2} - e^{-t} \right) \log t \, dt$$

gebracht werden kann, und aus dieser letzten Formel erhält man unmittelbar (19) nach einer partiellen Integration.

Indem wir vorübergehend bemerken, daß die Formel von Binet

$$\log x - \Psi(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1 \right) e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0$$

diese andere

$$(20) \quad C^2 = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \Psi^{(1)}(1+t) - \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + 1 \right) e^{-t} \right) \log t \, dt$$

liefert, wollen wir nunmehr die elementare Formel

$$(21) \quad \log \left(1 + \frac{y}{x} \right) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ty}}{t} \cdot e^{-tx} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(x+y) > 0$$

etwas eingehender untersuchen.

Aus (8) findet man unmittelbar vermöge (21)

$$(22) \quad C \cdot \log \left(1 + \frac{y}{x} \right) = - \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{(t+x)(t+x+y)} - \frac{e^{-tx} - e^{-t(x+y)}}{t} \right) \log t \, dt$$

woraus für $x=y=1$ eine neue Integraldarstellung für das Produkt $C \cdot \lg 2$; wendet man noch auf (21) die Identität (4) an, so kommt nach einer leichten Änderung der Bezeichnungen

$$(23) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s^2} = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{tx}}{t} \cdot \text{li}(e^{-t}) \, dt;$$

die Funktion linker Hand in (23) ist der sogenannte „Dilogarithmus.“¹⁾

Wegen der durch (6) hergeleiteten Integraldarstellung

$$\text{li}(e^x) - C - \log(-x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$$

findet man endlich noch aus (23) die andere Integraldarstellung

$$(24) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s^3} = \int_0^{\infty} \frac{C + \log(-tx) - \text{li}(e^{tx})}{t} \cdot \text{li}(e^{-t}) \, dt,$$

die überall da anwendbar ist, wo dies mit (23) der Fall ist.

¹⁾ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 29, p. 377; 1898.

Es ist bemerkenswert, daß die beiden Integrale rechter Hand in (23) und (24) in der durch die Ungleichung $\Re(x) \leq 1$ bestimmten Halbebene einen Sinn haben und somit die analytischen Erweiterungen der im Innern des Einheitskreises konvergierenden Potenzreihen darstellen.
