ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 1651.

Der „mittlere Fehler" und die Königlich Preussische Landestriangulation.

Von Herrn Professor Dr. *Wittstein*.

Wenn in geodätischen Arbeiten von dem „mittleren Fehler eines Winkels" oder „einer Richtung" die Rede ist, so sollte man bei flüchtiger Ansicht der Sache glauben, dass dieser Ausdruck einen so bestimmten und ein für allemal feststehenden Begriff bezeichne, dass Verschiedene, welche diesen Ausdruck gebrauchen, darunter ein und dasselbe verstehen müssen. Aber leider ist dieses keineswegs der Fall. Wir werden unten den Nachweis führen, dass bei Triangulationen der genannte Ausdruck nicht weniger als vier verschiedene Bedeutungen zulässt, welche sorgfältig unterschieden werden müssen, wenn man nicht in die grössten Widersprüche verfallen will, und da diese Unterscheidung bisher nirgends ausdrücklich hervorgehoben zu sein scheint, so dürfte damit wohl eine nähere Erörterung derselben an dieser Stelle ihre Rechtfertigung finden. Einen besonderen Anlass geben uns aber die Publicationen der Königlich Preussischen Landestriangulation aus den Jahren 1866 und 1867. Bekanntlich hat schon der erste Band dieser Publicationen vom Jahre 1866 sich keiner beifälligen Beurtheilung zu erfreuen gehabt; der nunmehr erfolgte Band vom Jahre 1867 giebt wiederum Material, um dieses Urtheil über die Arbeiten der Königlich Preussischen Landestriangulation vollauf zu unterstützen. Insbesondere bieten die pag. 29—31 dieses Bandes in Betreff des „mittleren Fehlers" eine solche Fülle von Verworrenheiten und Widersprüchen, wie wir uns nicht erinnern auf dem engen Raume von zwei Druckseiten jemals vereinigt gefunden zu haben. Wir halten uns verpflichtet im Interesse der Wissenschaft die Sache aufzudecken, und geben uns der Hoffnung hin, dass die Landestriangulation selbst unseren Beweisführungen beistimmen werde.

Die veröffentlichten Winkelmessungen sind grösstentheils mit einem 15zölligen *Ertel*'schen Kreise und zum geringeren Theile mit einem 8zölligen Universal-Instrumente von *Pistor* und *Martins* ausgeführt. Ueber das Verhältniss dieser beiden Instrumente sagt die Vorrede zu dem Bande von 1866: „Da bei früheren Triangulationen sich ergeben hatte, dass das Gewicht von 2 Beobachtungen mit dem *Ertel*'schen Kreise dem Gewichte von 3 Beobachtungen mit dem 8zölligen Universal-Instrumente gleich zu achten, so wurden die Objecte auf jeder Station mit ersterem Instrumente regelmässig 24 mal, mit letzterem 36 mal eingestellt." Worauf diese Annahme beruht, ist uns unbekannt; ein Beweis für dieses ohne allen Zweifel sehr wichtige Element wird nicht beigebracht. Dagegen wird in dem Bande von 1867 pag. 29—31 nachträglich diese Annahme aus den daselbst mitgetheilten Messungen zu stützen gesucht. Es hat nämlich aus der Küstenvermessung der mittlere Fehler einer Richtung für den 15zölligen Ertel $= 0''339$ und aus den neu mitgetheilten Messungen in der Umgegend von Berlin der mittlere Fehler einer Richtung für den 8zölligen Pistor $= 0''281$ sich ergeben, und in diesen Zahlen erblickt die Landestriangulation „einen abermaligen Beweis, wie die Sicherheit einer 36maligen Beobachtung mit dem 8zölligen Theodoliten mindestens der von 24 Beobachtungen mit dem 15-zölligen *Ertel*'schen Kreise gleichkommt." Sehen wir nach, wie dieser Schluss überall möglich war.

Zunächst muss bemerkt werden, dass der hier angegebene mittlere Fehler $0''281$ keineswegs von allem Vorwurfe frei ist. Die Landestriangulation gelangt nämlich zu diesem Werthe nur dadurch, dass sie von denjenigen Fehlern, welche zu dem mittleren Fehler concurriren, den gröbsten ausschliesst. Ein solches Verfahren, welches den Grundanschauungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung schnurstracks widerspricht, ist aber bereits längst von anderen Seiten hinreichend charakterisirt, so dass wir uns nicht dabei aufhalten wollen. Wir halten uns deshalb einfach an die obigen Zahlen, indem wir den Spuren der Landestriangulation weiter nachgehen.

Da nach der Vorrede 1866 „alle Ausgleichungen mit grösster Strenge nach den von *Bessel* ertheilten Rechnungsvorschriften durchgeführt" sind, zu einer richtigen Ausgleichung aber ohne allen Zweifel auch die Ansetzung des richtigen Verhältnisses der verschiedenen bei der Messung angewandten Instrumente gehört, so erschien es zunächst geboten nachzusehen, wie *Bessel* den in Rede stehenden Fall behandelt. Ein solcher Fall findet sich in der That in der „Gradmessung in Ostpreussen" p. 136—138. Nach der daselbst gegebenen Vorschrift muss, wenn das Gewicht einer Beobachtung, deren mittlerer Fehler $0''339$ ist, zur Einheit angenommen wird, das Gewicht einer Beobachtung, deren mittlerer Fehler $0''281$ ist, $= \left(\frac{0,339}{0,281}\right)^2 = 1,455$ gesetzt werden, oder mit anderen Worten: es sind in Ansehung des Gewichts 24

Beobachtungen mit dem 8zölligen Pistor gleich 34,9 Beobachtungen mit dem 15zölligen Ertel zu setzen. Dies ist aber beinahe vollkommen genau das Entgegengesetzte dessen, was die Landestriangulation folgert!

Wir haben in dieser Rechnung den mittleren Fehler einer Richtung in demjenigen Sinne genommen, wie ihn auch *Bessel* a. a. O. nimmt, nämlich als den mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung, d. h. der einzelnen Einstellung und Ablesung (ein anderer „mittlerer Fehler einer Richtung" kommt in der Gradmessung in Ostpreussen überall nicht vor), und haben natürlich vorausgesetzt, dass auch die Landestriangulation, dem Beispiele *Bessel*'s folgend, den mittleren Fehler in diesem Sinne aufgefasst habe. Man kann aber der Sache eine noch etwas günstigere Seite abgewinnen, wenn man annimmt, dass die Landestriangulation sich von dem Wortlaute der *Bessel*'schen Vorschrift emancipirt und, indem sie dem Geiste derselben treu blieb, den oben gegebenen mittleren Fehlern eine andere Bedeutung untergelegt habe, nämlich als mittlere Fehler der durch Ausgleichung auf der Station berechneten wahrscheinlichsten Richtungen. Es seien ε und ε' die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtung resp. mit dem 15zölligen Ertel und dem 8zölligen Pistor; mit dem ersten Instrumente ist jede Richtung 24 mal und mit dem zweiten 36 mal eingestellt; dann sind die mittleren Fehler der durch Ausgleichung auf der Station berechneten wahrscheinlichsten Richtungen resp. $\frac{\varepsilon}{\sqrt{24}}$ und $\frac{\varepsilon'}{\sqrt{36}}$. Diese Werthe sollen behufs der hinterher vorzunehmenden Ausgleichung des Dreieckssystems gleich gross sein. Nun ist aber

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{24}} = 0''339, \quad \frac{\varepsilon'}{\sqrt{36}} = 0''281$$

mithin findet die geforderte Gleichheit nur beinahe statt, und es scheint in der That hierauf der Ausdruck „mindestens", den die Landestriangulation in ihrem oben angeführten abermaligen Beweise gebraucht, bezogen werden zu müssen. Aber um dieses „beinahe" ist es doch auch eine bedenkliche Sache. Stellt man nämlich die Frage, wie viel Einstellungen auf jedes Object mit dem 8zölligen Pistor, statt der obigen 36, hätten gemacht werden sollen, damit die geforderte Gleichheit der letztgenannten mittleren Fehler wirklich eintrete und nennt diese Zahl vorübergehend x, so hat man

$$\frac{\varepsilon'}{\sqrt{x}} = 0''339$$

woraus mit Zuziehung des Obigen folgt $x = 24{,}7$. Mit anderen Worten: es sind in Ansehung des Gewichts 24,7 Beobachtungen mit dem 8zölligen Pistor gleich 24 Beobachtungen mit dem 15zölligen Ertel zu setzen, und es ist demnach ein mehr als kühner Gebrauch des Wortes „mindestens", wenn, wie oben angeführt worden ist, 36 Beobachtungen mit dem ersten Instrumente mindestens 24 Beobachtungen mit dem zweiten Instrumente gleichkommen sollen! Ohnehin muss aber in solchem Falle ein Resultat, welches nur durch „mindestens" ausgedrückt werden kann, geradezu für werthlos erklärt werden. Es kommt darauf an genau zu wissen, wie viele Beobachtungen mit den beiden Instrumenten einander gleich zu setzen sind, wenn davon ein ernstlicher Gebrauch gemacht werden soll.

Bis hierher haben wir unsere Voraussetzungen der Landestriangulation so günstig wie möglich angenommen, indem wir den gegebenen mittleren Fehlern 0″339 und 0″281 die beiden einzigen möglichen Deutungen unterlegten, bei welchen überhaupt an einen Schluss von der Art, wie ihn die Landestriangulation beabsichtigt hat, gedacht werden kann. In beiden Fällen ist, wie sich gezeigt hat, das richtige Resultat weit verschieden, ja zum Theil sogar das gerade Gegentheil von demjenigen, was die Landestriangulation behauptet, und der vorgebliche Beweis zerfällt demnach vollständig in Nichts. Eine noch weit bedenklichere Gestalt nimmt aber die Sache an, wenn man, was wir bis hierher nicht gethan haben, auf den Ursprung der oben gegebenen mittleren Fehler eingeht und die Frage stellt, was denn für mittlere Fehler dies seien; denn da wird sich zeigen, dass von den obigen Schlüssen gar nichts stehen bleiben kann. Der mittlere Fehler 0″339 in der Küstenvermessung ist entstanden aus der Ausgleichung eines Dreieckssystems mit 311 Fehlern und 86 Bedingungsgleichungen; der mittlere Fehler 0″281 der Landestriangulation aus der Ausgleichung eines Dreieckssystems mit 13 Fehlern und 5 Bedingungsgleichungen (wo, wie schon oben bemerkt, nach der Ausgleichung bei Bestimmung des mittleren Fehlers der gröbste Fehler ausgeschlossen wurde). Ein mittlerer Fehler dieser Art, d. h. also der mittlere Fehler einer aus der Ausgleichung des Dreieckssystems sich ergebenden Richtung, ist aber offenbar von Grund aus verschieden von den beiden oben aufgeführten Arten von mittleren Fehlern; er enthält zum grossen Theile ganz andere Elemente, die aus der Natur des auszugleichenden Dreiecksnetzes hervorgehen, und nur noch zu einem kleinen Theile die Fehler des Instruments in sich, und kann demnach in keiner Weise als ein Maass für die Güte des bei der Messung angewandten Instruments dienen. Ein Schluss von der Grösse dieses mittleren Fehlers auf das Gewicht, welches den Winkelbeobachtungen mit einem gewissen Instrumente beigelegt werden müsse, wäre genau ebenso ungereimt, wie wenn etwa Jemand — in einem bekannten Beispiele — es unternehmen wollte, aus Länge, Breite und Tiefe des Schiffes das Alter des Schiffskapitains zu berechnen!

Man sieht hieraus, wie wir schon im Eingange andeuteten, welche Fülle von Verworrenheit auf dieser kleinen Stelle sich zusammendrängt, und welche Unklarheit bei der Königlich Preussischen Landestriangulation in Betreff des Begriffes des mittleren Fehlers herrscht. Dies ist um so bedauerlicher bei einem Institute, dem so weitgreifende Befugnisse anvertraut sind und dessen Arbeiten nicht ignorirt werden können. Auf welche Weise aber die Landestriangulation das angenommene Verhältniss der beiden Theodoliten, mit welchem offenbar der Werth der ganzen Ausgleichung der betreffenden Dreiecksketten steht und fällt, in der That zu rechtfertigen wissen wird, das haben wir noch zu erwarten, und brechen damit ab. Doch wollen wir zum Schluss noch einmal die drei Arten des mittleren Fehlers, denen wir bis hierher begegnet sind, zusammenstellen und denselben noch eine vierte Art hinzufügen. Wir werden dabei wie bisher, um bestimmter sprechen zu können, die von *Struve* und *Bessel* eingeführte Beobachtungsform voraussetzen, obwohl es nur geringer Modificationen bedürfen wird, um auch auf andere Beobachtungsformen überzugehen.

Es seien in einer Triangulation $x, y, z, \ldots$ die zu beobachtenden Richtungen, und die Anzahl derselben $= m$. Ferner sei jede Richtung r mal eingeschnitten, es haben sich dadurch ergeben für x die r Werthe $a, a', a'', \ldots$, für y die r Werthe $b, b', b'', \ldots$, für z die r Werthe $c, c', c'', \ldots$ etc., und es sei das arithmetische Mittel aus $a, a', a'', \ldots = A$, aus $b, b', b'', \ldots = B$, aus $c, c', c'', \ldots = C$ etc. Endlich sei die Anzahl der Bedingungsgleichungen des Dreieckssystems $= n$.

Von dem „mittleren Fehler einer Richtung" kann in dieser Triangulation auf folgende vier Arten die Rede sein.

1) Der mittlere Fehler einer unmittelbar beobachteten Richtung a, a', etc., d. h. einer einzelnen Einstellung und Ablesung, welcher $= \varepsilon$ sei, ist unter allen Umständen eine Constante, welche Beobachtungen dieser Art nach ihrer Güte charakterisirt, und nur abhängig von den Fehlern des Instruments, sowie von dem Einflusse des Beobachters und der begleitenden Umstände der Beobachtung, welche wir darin mitbegreifen. Er wird am natürlichsten gefunden durch wiederholte Beobachtung einer und derselben Richtung, und zwar mit desto grösserer Sicherheit, je mehr solcher Beobachtungen gemacht werden, obwohl in der Praxis sehr bald eine Grenze einzutreten pflegt, von welcher ab der mittlere Fehler stehend wird. In einer Triangulation sind aber die Beobachtungen der einzelnen Richtungen in der Regel nicht zahlreich genug, um aus den Beobachtungen einer Richtung einen hinreichend zuverlässigen Werth von ε zu bestimmen; man kann indessen die Gesammtheit aller Richtungen dazu verwerthen wie folgt.

Da unter den Werthen $a, a', a'', \ldots$ sowie $b, b', b'', \ldots$ und $c, c', c'', \ldots$ etc. je $r-1$ Bedingungsgleichungen bestehen, so hat man

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma_r\,(A-a)^2}{r-1} = \frac{\Sigma_r\,(B-b)^2}{r-1} = \frac{\Sigma_r\,(C-c)^2}{r-1} \text{ etc.}$$

wo wir durch den Index am Summenzeichen die Anzahl der Glieder andeuten, aus denen die Summe Σ sich zusammensetzt.

Nun werden die in diesem Ausdrucke enthaltenen verschiedenen Werthe von ε^2, welche gleich sein sollten, in der That nicht gleich sein, so lange r klein ist. Man erhält aber nach einem bekannten Satze einen sehr zuverlässigen Werth von ε^2, wenn man in den vorstehenden Werthen die Summen aller Zähler und aller Nenner nimmt und mithin setzt

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma_{mr}(A-a)^2}{m\,(r-1)} \qquad (1)$$

wo der Zähler jetzt auch die Glieder $(B-b)^2$, $(C-c)^2$, etc. umfasst.

Die „Gradmessung in Ostpreussen" pag. 136 weicht von der hier gefundenen Gleichung (1), soweit man aus dem daselbst gegebenen Beispiele schliessen kann, insofern ab, als sie als Nenner mr setzt.

Man kann wünschen, der mühsamen Bildung der Quadratsummen, welche die Gleichung (1) fordert, überhoben zu sein. Dies geschieht durch eine schon viel gebrauchte Formel (siehe z. B. Küstenvermessung pag. 353), welche die Summe der Fehlerquadrate durch die Summe der absolut genommenen Fehler selbst ersetzt, und welche man gewöhnlich auf *Encke* zurückführt, obwohl sie sich schon in einer Abhandlung von *Gauss* (Zeitschrift für Astronomie, März und April 1816) findet.*) Bezeichnet nämlich allgemein α irgend einen Beobachtungsfehler und μ die Anzahl der Beobachtungsfehler, und wird die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers α proportional der Function $e^{-h^2\alpha^2}$ gesetzt, wo h eine Constante bedeutet, so lässt sich leicht beweisen, dass die Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{\Sigma_\mu\,(\alpha^2)}{\mu}} \text{ und } 1{,}2533\,\frac{\Sigma_\mu\,(\alpha)}{\mu}$$

*) Wir sehen dabei von dem Ergänzungsgliede, welches man durch das Vorzeichen $\pm$ immer damit verbunden findet, völlig ab, gleichwie wir auch dem Ausdrucke (1) kein solches Ergänzungsglied beigefügt haben (welches sich gleichfalls bei *Gauss* a. a. O. findet). In der That sind alle hier aufgeführten Werthe der mittleren Fehler nur die wahrscheinlichsten Werthe derselben, denen man deshalb ihren wahrscheinlichen Fehler mit dem Vorzeichen $\pm$ als Ergänzungsglied hinzufügen kann. Die numerische Berechnung dieses Ergänzungsgliedes erscheint uns aber für die Praxis sehr entbehrlich.

für hinreichend grosse Werthe von μ gleiche Werthe annehmen, vorausgesetzt, dass in dem zweiten dieser Ausdrücke die Werthe von α bei der Summirung ohne Vorzeichen genommen werden. Daraus aber folgt weiter, dass wenn ν irgend eine Zahl bezeichnet, auch die Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{\Sigma_\mu(\alpha^2)}{\nu}} \text{ und } 1{,}2533\,\frac{\Sigma_\mu(\alpha)}{\sqrt{\mu\nu}}$$

unter denselben Voraussetzungen gleiche Werthe annehmen, und mithin kann man statt (1) für die numerische Rechnung bequemer setzen

$$\varepsilon = 1{,}2533\,\frac{\Sigma_{mr}(A-a)}{m\sqrt{r(r-1)}} \tag{2}$$

wo die Werthe von $A-a$ wiederum nur in ihrem absoluten Betrage zu nehmen sind.

2) Der mittlere Fehler einer durch Ausgleichung auf der Station berechneten wahrscheinlichsten Richtung A, B, etc., welcher $= \varepsilon_1$ sei, wird durch die Beziehung gegeben

$$\varepsilon_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{r}$$

vermöge eines bekannten Schlusses, von welchem schon oben Gebrauch gemacht worden ist. Während demnach der mittlere Fehler ε eine Constante darstellt, welche durch wiederholte Beobachtungen nur um desto zuverlässiger bestimmt wird, zeigt dagegen der mittlere Fehler ε_1 die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass er durch Häufung der Beobachtungen auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit hinab, und dem Verschwinden so nahe wie man will gebracht werden kann.

Durch Einsetzung der Werthe (1) und (2) wird hieraus

$$\varepsilon_1^2 = \frac{\Sigma_{mr}(A-a)^2}{mr(r-1)} \tag{3}$$

und

$$\varepsilon_1 = 1{,}2533\,\frac{\Sigma_{mr}(A-a)}{mr\sqrt{r-1}} \tag{4}$$

3) Der mittlere Fehler einer aus den auf den Stationen bestimmten wahrscheinlichsten Richtungen A, B, etc. durch Ausgleichung nach den Bedingungen des Dreieckssystems sich ergebenden definitiven Richtung x, y, etc., welche $= \varepsilon_2$ sei, wird durch die Gleichung gegeben

$$\varepsilon_2^2 = \frac{\Sigma_m(x-A)^2}{n}. \tag{5}$$

Diese Formel hat *Gauss* zweimal bewiesen, nämlich in der Theoria comb. obs. § 38 und in dem Supplementum theoriæ etc. § 16.

Für die numerische Rechnung bequemer folgt daraus vermittelst der obigen Umformung

$$\varepsilon_2 = 1{,}2533\,\frac{\Sigma_m(x-A)}{\sqrt{mn}} \tag{6}$$

wo die Werthe von $x-A$ wieder nur in ihrem absoluten Betrage zu nehmen sind.

Die „Küstenvermessung" pag. 353 weicht hiervon ab, indem sie in (5) als Nenner $m-1$, in (6) als Nenner m setzt. Die Landestriangulation folgt diesem Vorgange. Beide Bestimmungen geben den hier in Rede stehenden mittleren Fehler zu klein.

4) Der mittlere Fehler einer aus den unmittelbar beobachteten Richtungen a, a', etc. durch Ausgleichung nach allen vorhandenen Bedingungen sich ergebenden definitiven Richtung x, y, etc., welcher $= \varepsilon_3$ sei, wird gegeben durch

$$\varepsilon_3^2 = \frac{\Sigma_{mr}(x-a)^2}{m(r-1)+n} \tag{7}$$

wie man sofort aus Analogie der Gleichung (5) findet. Diesem mittleren Fehler, dessen numerische Berechnung wir uns nicht erinnern irgendwo gefunden zu haben, liegt offenbar die Idee zum Grunde, man habe aus den unmittelbar beobachteten Richtungen a, a', etc. durch Ausgleichung sowohl nach den Bedingungen auf jeder Station, als auch nach den Bedingungen des Dreieckssystems in einer Rechnung die definitiven Richtungen x, y, etc. gefunden, während man sonst die Vereinfachung sich erlaubt, zuerst aus den Bedingungen auf jeder Station die den Stationen entsprechenden wahrscheinlichsten Richtungen A, B, etc. und darauf aus diesen durch die Bedingungen des Dreieckssystems die definitiven Richtungen x, y, etc. zu berechnen, was in dem Resultate der Ausgleichung bekanntlich auf dasselbe hinausläuft. Der in Rede stehende mittlere Fehler enthält demnach die Gesammtheit aller Fehlerquellen, welche eine Triangulation darbietet, in sich, und die Berechnung desselben dürfte deshalb keineswegs so überflüssig sein wie man die Sache gewöhnlich ansieht.

Es ist leicht, diesen mittleren Fehler ε_3 durch die vorigen auszudrücken. Man hat nämlich

$$(x-a)^2 = (A-a)^2 + 2(x-A)(A-a) + (x-A)^2$$

und die Summe hiervon lässt sich schreiben

$$\Sigma_{mr}(x-a)^2 = \Sigma_{mr}(A-a)^2 + 2\,\Sigma_m\,[(x-A)\,\Sigma_r(A-a)] + r\,\Sigma_m(x-A)^2$$

und da $\Sigma_r(A-a)$, wo hier $A-a$ mit Rücksicht auf Vorzeichen genommen werden muss, den Werth Null hat, so folgt durch Einsetzung in (7)

$$\varepsilon_3^2 = \frac{\Sigma_{mr}(A-a)^2 + r\,\Sigma_m(x-A)^2}{m(r-1)+n}$$

Es ist demnach entweder

$$\varepsilon_3^2 = \frac{m(r-1)\,\varepsilon^2 + nr\,\varepsilon_2^2}{m(r-1)+n} \qquad (8)$$

oder

$$\varepsilon_3^2 = r\,.\,\frac{m(r-1)\,\varepsilon_1^2 + n\,\varepsilon_2^2}{m(r-1)+n} \qquad (9)$$

was zu suchen war.

Die mittleren Fehler ε_2 und ε_3 in 3) und 4) sind übrigens offenbar gleichfalls (wie ε) Constanten, welche die Güte der Triangulation charakterisiren, und deren Werthe mit um so grösserer Zuverlässigkeit gefunden werden, je grösser resp. die Anzahl der Bedingungsgleichungen n und $m(r-1)+n$ ist. Nur sind es entweder gar nicht, oder nicht ausschliesslich die Fehler des Instruments, aus denen ε_2 und ε_3 sich zusammensetzen, während ε und ε_1 nur von den Fehlern des Instruments abhängen. Das ganze Verhältniss wird am deutlichsten übersehen, wenn man die Grenzfälle betrachtet, wie folgt.

Nimmt man $r = 1$ d. h. wird jede Richtung nur Einmal beobachtet, so erscheinen ε und ε_1 unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ oder die Werthe dieser mittleren Fehler können nicht bestimmt werden. Dagegen die Werthe von ε_2 und ε_3 fallen zusammen, und jeder dieser mittleren Fehler enthält in diesem Falle nicht nur die gesammten Fehler des Instruments, sondern auch die gesammten Fehler der Dreiecke in sich. Der mittlere Fehler ε_2 hat hier seinen grössten möglichen Werth.

Nimmt man an, dass r über alle Grenzen hinaus wachse, so geht ε in den wahren Werth des mittleren Fehlers über, während ε_1 verschwindet. Der Werth von ε_2 wird in diesem Falle ganz frei von den Fehlern des Instruments und nur noch abhängig von den Fehlern der Dreiecke, und demnach erlangt dieser mittlere Fehler hier seinen kleinsten möglichen Werth. Der Ausdruck für ε_3 in (8) endlich geht über in

$$\varepsilon_3^2 = \varepsilon^2 + \frac{n}{m}\,\varepsilon_2^2 \qquad (10)$$

als seinen Grenzwerth für $r = \infty$, welcher immerhin auch schon für eine mässige Zahl, wie $r = 24$, als Näherungswerth gebraucht werden kann. Unter allen Umständen entsteht dieser mittlere Fehler ε_3 aus dem Zusammenflusse sämmtlicher Fehler einer Triangulation und bildet den eigentlichen Total-Ausdruck für die Güte der Triangulation.

Hannover, im Juli 1867. *Wittstein.*

Planeten-Oppositionen,

beobachtet am Bonner Meridiankreise von Herrn Director, Prof. *Argelander*.

Amphitrite.

		α	δ
1866 März 14	9ᵐ1	11ʰ17ᵐ40ˢ91	+5°42′ 6″3
18	9.0	13 57,58	+5 55 11,3

Metis.

		α	δ
1866 März 14	8ᵐ9	11ʰ57ᵐ47ˢ77	+10°10′41″7
16	8.7	55 51,05	21 29,6
18	8.8	53 54,30	31 49,1

Hygea.

		α	δ
1866 April 13	8ᵐ5	13ʰ38ᵐ39ˢ34	−16°27′13″1
15	8.8	37 6,83	18 34,5
16	8.8	36 20,89	−16 14 10,0
21	8.8	32 30,77	−15 51 3,3
22	9.0	31 45,37	46 18,5
23	8.5	31 0,46	41 29,4
24	9.0	30 15,62	36 42,5
25	8.9	29 31,49	31 53,0
26	8.8	28 47,94	27 0,0

Saturn. Mitte der Ansen.

	α	δ	Durchgangszeit
1866 April 16	14ʰ33ᵐ38ˢ56	−12°17′14″8	3ˢ06
21	32 13,15	12 10,9	3,06
23	31 38,44	7 20,9	3,23
24	31 20,93	5 44,7	3,31
25	31 3,60	4 29,7	3,04
26	30 45,94	−12 3 5,1	3,09
Mai 5	28 8,05	−11 50 30,0	3,11
6	27 50,68	49 9,7	3,14

Hebe.

		α	δ
1866 Juni 20	8ᵐ7	18ʰ25ᵐ44ˢ80	− 5°22′34″8
23	8.6	22 51,13	33 30,3
Juli 10	8.7	6 11,99	− 7 8 54,7
11	8.8	5 16,68	16 2,1

Melpomone.

		α	δ
1866 Juli 11	8ᵐ8	19ʰ 3ᵐ29ˢ37	− 9° 4′ 0″9
13	8.8	1 26,76	53 11,4
16	8.8	18 58 24,92	−10 12 23,4
18	8.8	56 25,61	25 27,0
23	8.8	51 39,97	−11 1 58,8