

Correzione alla Memoria intitolata: Quando è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca un pezzo rientrante? (*)

(del prof. L. SCHLAEFLI, a Berna).

Uno scambio di lettere col sig. KLEIN, professore in Erlangen (**), m'ha convinto, che il modo di contare il numero dei nessi nelle cinque specie della superficie generale di terz'ordine, adoperato da me nella Memoria citata, è difettoso. Avuto riguardo alla sola idea del nesso, si può sostituire, per esempio, alla quinta specie il sistema di un piano e di una sfera non intersecantisi realmente; e l'errore commesso sta in ciò, che ho attribuito al piano il numero zero, come se il piano fosse equivalente alla sfera, in riguardo al nesso. Ma comunque si trasformi il piano in una superficie sferica, non si potrà far corrispondere, senza eccezione, ad ogni punto di questa un solo punto di quello e viceversa. Quando vi si adopra, per esempio, la proiezione stereografica, a quel punto unico della sfera, il quale serve di centro di proiezione, corrisponderanno gl'innumerevoli punti della retta all'infinito nel piano. Ma una siffatta singolarità reale distrugge il concetto di nesso. Questo si fonda sull'intuizione; e da ciò parrebbe che la difficoltà che proviamo nell'adattarlo al piano nascesse dall'idea dell'infinito che si sottrae all'intuizione e richiede il soccorso dell'analisi. Ma fortunatamente la retta, a cui l'analisi assegna un solo punto all'infinito, porge il sussidio bastante a vincere questa difficoltà.

Se in ciò che segue farò uso di rette e di sezioni coniche, anzichè di curve arbitrarie, ciò servirà a semplificare il discorso, senza derogare alla generalità delle considerazioni. Con questi sussidi si potrà fare meglio attenzione al passaggio delle superficie attraverso il piano all'infinito.

(*) Nel tomo 5° di questi Annali, p. 289.

(**) Ora professore a Monaco (Baviera).

Qual numero dei nessi per la superficie sferica io assegnai lo zero. Imperocchè, fissati su questa superficie due punti A e B qualsivogliano, è possibile di muovere un cerchio per modo da descrivere tutta la superficie senza passare due volte per verun punto, a cominciare da un cerchio piccolissimo intorno ad A e terminando con un cerchio simile intorno a B . Lo stesso non è possibile in una porzione del piano racchiusa, per esempio, in un cerchio; si può fissare un solo punto A , e poi descrivere tutta la superficie cominciando da un circoletto intorno ad A e terminando al contorno. Ma se si volesse fissare ancora un altro punto B , la linea rappresentante il nesso intorno ad A (un circoletto positivo) si cambierebbe al più nel sistema del contorno positivo e di un circoletto negativo intorno a B . L'ostacolo che il contorno della superficie oppone alla linea del nesso ordinario, mentre questa col suo moto tenderebbe a circondare il punto B , m'ha indotto ad assegnare alla porzione del piano il numero 1.

Ora consideriamo il piano illimitato e fissiamo in esso due punti A e B , coll'intento di descrivere tutto il piano con una sezione conica mobile, che abbia da sorpassare ogni punto del piano una sola volta, tranne i punti A e B , e che cominci da un piccolo cerchio intorno ad A . La curva, dopo avere percorso una serie di ellissi e infine una parabola intorno ad A , tali che B rimanga sempre di fuori di esse, sarà obbligata a cambiarsi in un'iperbola, di modo che A si trovi dalla parte concava di un ramo di essa, mentre B sta dalla convessa per ambedue i rami. L'ultimo termine del moto della curva del nesso sarebbe una retta doppia passante pel punto B , o, poichè questo termine, come singolarità, non deve ammettersi, sarebbe un'iperbola vicinissima a quella retta doppia, fra i cui rami troverebbesi il punto B , e non sarebbe già un circoletto intorno a B . Benchè quella retta doppia passante per B non sia affatto determinata, come lo sarebbe un contorno di superficie, nondimeno credo di doverla riguardare come un ostacolo alla curva del nesso ordinario intorno ad A , e da ciò mi veggo costretto ad assegnare il numero 1 al piano illimitato, e non già lo zero, come venne fatto nella Memoria citata.

A conferma di questa decisione adduco ancora un'altro procedimento, sempre contando il punto del piano una sola volta. Una retta illimitata non separa il piano in due pezzi, giacchè si può partire da un lato di essa ed arrivare all'altro lato, seguendo, per esempio, un'altra retta. Quella retta, essendo un taglio circolare, conta per zero, epperò non muta il numero de' nessi. Dopo fatto questo taglio, la superficie ha un solo orlo, come facilmente si vede sostituendo alla retta doppia, quale orlo, un'iperbola pochissimo differente da

essa; e si può descrivere tutta la superficie con una conica mobile, che cominci da un piccolo cerchio e finisca nell'orlo; perlocchè si ha da attribuire alla superficie segata il numero 1 di nessi. Lo stesso numero dunque appartiene anche al piano.

Il sistema di un piano e di una superficie sferica, che non lo interseca realmente, conta in conseguenza di ciò, 1 per il piano, 0 per la sfera, e -2 per la separazione delle due superficie; in somma -1 . E poichè, riguardo al numero dei nessi, tale sistema è equivalente alla specie quinta della superficie generale di terz'ordine, mi veggo obbligato a correggere i numeri dati nella Memoria citata in 7, 5, 3, 1, -1 per le cinque specie.

Il sig. KLEIN nella sua Memoria: *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* (t. 7 Mathematische Annalen, pag. 549) s'è deciso a contare ogni punto d'una superficie due volte; la prima volta come punto della faccia superiore, la seconda come punto della faccia inferiore. Allora la retta doppia cessa di costituire una singolarità, atteso che una retta appartiene alla faccia superiore, l'altra all'inferiore, e che esse non hanno in comune che i loro punti all'infinito, precisamente come i due rami d'un'iperbola, uno nella faccia superiore, l'altro nell'inferiore (*). La retta doppia dunque, la quale, per fissar le idee, immaginiamo diretta dall'indietro all'avanti, costituisce lo stato di transito da un'iperbola infinitamente poco diversa dalla retta, ed il cui ramo superiore corre alla sinistra del ramo inferiore della medesima, ad un'altra iperbola il cui ramo superiore corre alla destra del proprio altro ramo. Da ciò si fa evidente che, dati due punti A e B , per esempio ambedue nella faccia superiore del piano, una conica variabile può descrivere tutte e due le faccie del piano passando una sola volta per ciascun punto di ciascuna faccia, e cominciando da un circoletto intorno ad A e terminando in un circoletto intorno a B ; epperò si deve attribuire al piano il numero zero di nessi.

Alla stessa conclusione si giunge per mezzo di un taglio. Una retta doppia, composta di una retta superiore e di una inferiore, che ancora vogliamo immaginare diretta dall'indietro all'innanzi, sega il piano in due pezzi, uno consistente della parte sinistra della faccia superiore e della destra della faccia inferiore del piano, l'altro consistente delle parti rimanenti. Ciascun pezzo ha

(*) Immaginando una retta che seghi il piano sotto angolo piccolissimo, si può riconoscere più facilmente ciò che or ora si disse, vale a dire, che al punto tendente all'infinito in una retta della faccia superiore del piano, ed in un senso che diremo anteriore, succeda nella corrispondente retta della faccia inferiore il punto che tende all'infinito nel senso contrario, cioè posteriore.

un solo orlo ed è semplicemente connesso; e poichè lo spezzamento semplice conta per -2 , il numero dei nessi del sistema dei due pezzi si trova essere

$$1 + 1 - 2 = 0.$$

Siccome poi il taglio fatto nel piano è circolare, epperò non conta nulla, così per il piano illimitato, qual numero dei nessi, si ottiene lo zero.

Ma ormai anche nella superficie sferica si deve distinguere la faccia esterna dalla interna; e poichè non v'è alcun nesso tra le due facce, si ottiene

$$0 + 0 - 2 = -2$$

come numero dei nessi per la superficie sferica. Il piano contava zero, la separazione del piano e della sfera conta per -2 ; dunque il sistema del piano e della sfera non intersecantisi conta per -4 .

In conseguenza di ciò, i numeri da assegnarsi alle cinque specie della superficie generale del terzo ordine diventano 12, 8, 4, 0, -4 .

Berna, 2 settembre 1875.