

**VIII. Ueber die Abhängigkeit des Brechungsquotienten der Luft von der Temperatur;  
von Victor v. Lang.**

(Aus den Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 69, Abth. II. (1874) mitgetheilt vom gen. Verf.)

Die berühmten Versuche von Biot und Arago<sup>1)</sup> zur Ermittlung des Brechungsquotienten der Luft gegen den leeren Raum waren bei Temperaturen zwischen  $-1,5$  und  $-12,0^{\circ}$  C. angestellt. Bald darauf wiederholte Biot<sup>2)</sup> allein diese Versuche bei einer Temperatur von ungefähr  $25^{\circ}$  C. Derselbe folgert aus den vorliegenden Beobachtungen, daß der Satz von der Constanz des Brechungsvermögens auch für den Fall gelte, wo die Temperatur der Luft sich ändert: hiernach müßte der Brechungsquotient der atmosphärischen Luft von der Form

$$n = 1,0002945 - 0,000001081 t \quad . \quad . \quad (I)$$

sey, Fizeau<sup>3)</sup> gab später eine Tabelle des Brechungsquotienten der Luft zwischen  $0$  und  $75^{\circ}$ , von der er sagt, daß sie aus den Angaben von Biot und Arago berechnet worden sey. Diese Zahlen schreiten aber, wie leicht ersichtlich, nach der Reihe

$$n = 1,0002945 - 0,000001057 t + 0,00000000289 t^2 \quad (II)$$

fort und widersprechen wegen des letzten Gliedes natürlich dem Satze von der Constanz des Brechungsvermögens. Wie Fizeau diese Berechnung ausgeführt hat, ist mir unbekannt geblieben. Ich habe wohl auch versucht, die Beobachtungen von Biot und Arago zu berechnen, habe aber ziemlich abweichende Resultate erhalten. Das Verfahren, das ich hierbei einschlug, war folgendes. Die von Biot und Arago mit Hülfe des Satzes von der Constanz des Brechungsvermögens auf  $0^{\circ}$  reducirten Beobachtungen

1) Mém. de la classe des sciences mathém. et phys. de l'Inst. nat. premier sem. 1806 (t. VII, 1) pag. 301. Paris 1806.

2) Ib. second sem. 1807, pag. 39. Paris 1808.

3) Ann. de chim. et de phys. sér. 4, t. II, pag. 158. Paris 1864.

wurden wieder auf die ursprüngliche Temperatur gebracht, wobei der von jenen Forschern angewandte Ausdehnungscoefficient der Luft (0,00375) benutzt wurde. Wendet man dann zur Berechnung der Constanten die Methode der kleinsten Quadrate an, so geben die sieben gemeinschaftlich angestellten Beobachtungen

$$n = 1,0002947 - 0,000001224 t + 0,00000000967 t^2 \text{ (III).}$$

Verbindet man mit diesen Beobachtungen aber auch noch das von Biot bei 25° C. gefundene Resultat, indem man demselben das Gewicht 3 ertheilt, da es aus zehn Beobachtungen abgeleitet ist, so wird jetzt

$n = 1,0002947 - 0,000001141 t + 0,00000000064 t^2 \text{ (IV),}$   
in welcher Formel das letzte Glied schon fast verschwindend klein geworden ist. Ich will nun gerne zugeben, daß vielleicht eine Berechnung, die auf die ursprünglichen Beobachtungsdaten Biot's und Arago's zurückgeht, zu etwas anderen Resultaten führen mag. Jedenfalls schien mir aber so viel klar zu seyn, daß keine der angeführten Formeln hinreichende Garantien ihrer Genauigkeit bietet, um auch nur Correctionen damit sicher berechnen zu können, die fast bei jedem optischen Versuche, der bei höherer Temperatur unternommen wird, ins Spiel kommen. Ich habe daher geglaubt, daß es nicht ohne Interesse seyn dürfte, neue Versuche über die Abhängigkeit des Brechungsquotienten der atmosphärischen Luft von der Temperatur anzustellen. Nachdem ich diese Versuche schon abgeschlossen hatte, wurde ich mit der kurz zuvor erschienenen Note Mascart's<sup>1)</sup> bekannt, worin er die Resultate einer Untersuchung mittheilt, die er unternommen, um den Satz von der Constanz des Brechungsvermögens der Gase nach Druck und Temperatur zu prüfen. Für atmosphärische Luft ergibt sich aus seinen Angaben

$$n = 1,0002923 - 0,000001321 t . . . \text{ (V).}$$

Mascart wandte eine Interferenz-Methode an, wobei die Temperaturunterschiede seiner Beobachtungen 40° be-

1) Comptes rend. de l'acad. des sciences. t. LXXVIII, pag. 617. Paris 1874.

trugen; eine weitere Kritik der Formel (IV) muß aber bis dahin verschoben werden, wo Mascart auch die Daten seiner Beobachtungen mittheilt.

#### Beschreibung des Apparates.

Die von mir gewählte Methode ist, wie ich glaube, neu und dürfte gerade für die Untersuchung der Gase Vortheile bieten. Ein großer Spectralapparat wurde nämlich mit einem zweiten Beobachtungsfernrohre versehen, auf den Prismentisch des Apparates aber eine Erhitzungsvorrichtung gestellt ganz ähnlich der von Director Stefan<sup>1)</sup> beschriebenen; nur war dieselbe an einer Messingplatte befestigt, die auf drei Stellschrauben ruhte. Die Dimensionen des angewandten Apparates ergeben sich aus Fig. 6 Taf. III, welche eine Ansicht von oben, und aus Fig. 7, welche eine solche von vorn darstellt. Die durch Glasplatten ( $p$ ,  $q$ ) geschlossenen Seiten der Erhitzungsvorrichtung stehen senkrecht auf der Axe des Collimators: in letzterem aber wurde statt der Spalte ein Fadenkreuz eingesetzt und dasselbe durch eine Gasflamme beleuchtet.

Das Innere der Erhitzungsvorrichtung enthält ein kleines Glasprisma von ungefähr 60" in einer solchen Lage, daß die Halbierungslinie dieses Winkels in die Verlängerung des Collimators fällt. Das Prisma ist durch einen Bügel mit einer Schraube an einer kleinen Messingplatte festgehalten, letztere aber wieder mit drei Stellschrauben versehen. Die von den beiden Prismenflächen entworfenen Bilder des Collimatkreuzes wurden durch die vordere Glasplatte ( $p$ ) hindurch mit Hülfe der zwei Fernrohre ( $x$ ,  $y$ ) beobachtet. Die Fadenkreuze dieser Fernrohre können durch Mikrometerschrauben bewegt werden und gestatten so die Verschiebung der reflectirten Bilder zu messen, sobald durch eine Temperaturverschiedenheit zwischen dem Inneren der Erhitzungsvorrichtung und der

1) Sitzber. der Akad. d. Wiss., math.-naturw. Cl. Bd. LXIII (2) S. 223. Wien 1871.

äußeren Luft eine Brechung der Lichtstrahlen an der vorderen Glasplatte stattfindet.

Die Brennweite der Objectivlinse des Fernrohres  $x$  beträgt beiläufig 45 Ctm., für das Fernrohr  $y$  nur 35 Ctm.; letzteres Fernrohr hatte jedoch ein stärkeres Ocular, so daß die Vergrößerung desselben noch die des ersteren Fernrohres übertrifft. An beiden Mikrometerschrauben ist der Umfang in 100 Theile getheilt.

Zur Bestimmung der Temperaturdifferenz wurden zwei Thermometer verwendet, von denen das eine ( $t$ ) mit seiner Kugel durch eine Oeffnung der Erhitzungsvorrichtung von oben in das Innere derselben hineinragte. Das andere Thermometer ( $t'$ ) hing mit seiner Kugel im Niveau der beiden Beobachtungsfernrohre zwischen denselben in einer Entfernung vom Centrum des Apparates, die ungefähr der Mitte der Fernrohre entsprach.

Um aber die Erhitzungsvorrichtung auf verschiedene Temperaturen zu bringen, wurde mit Hülfe der Zuleitungsröhre ( $r$ ) und der Ableitungsröhre ( $s$ ) Wasser von constanter höherer Temperatur hindurch geleitet. Wendet man nur größere Wassermengen an, so kann man auf diese Weise die Temperatur der Erhitzungsvorrichtung sehr gut constant erhalten. Da es aber Schwierigkeiten bietet, größere Wassermengen im Zimmer auf Temperaturen nahe dem Siedepunkte zu bringen, so kann man so hohe Temperaturen allerdings nicht leicht auf die angegebene Weise erzielen. Dies gelingt aber bekanntlich leicht durch Hindurchleiten von Wasserdampf. Nur hat man es mit letzterem nicht so in seiner Gewalt, den Apparat langsam zu erwärmen, und es ist daher, wenn man die anfängliche Stellung des Apparates möglichst bewahren will, zweckmäßig, vor dem Durchleiten von Wasserdampf den Apparat zuerst durch warmes Wasser auf eine höhere Temperatur zu bringen. Es wurde dies jedoch bei den nachfolgenden Beobachtungen öfters absichtlich unterlassen, um hierdurch dem Prisma eine kleine Drehung zu erthei-

len und so an verschiedenen Stellen der Mikrometerschrauben beobachten zu können.

Das Hindurchleiten von Wasser wurde auch benutzt, um die Temperatur der Erhitzungsvorrichtung unter die der Umgebung zu bringen, das Wasser wurde dabei durch schmelzendes Eis auf  $0^{\circ}$  erhalten. Auch hier war zur Erzielung einer constanten Temperatur nothwendig, das Wasser in nicht zu kleinen Mengen durchzuleiten.

Sämmtliche Metalltheile um die Erhitzungsvorrichtung herum waren mit Tüchern belegt und vor die vordere Glasplatte noch ein Papierschirm mit zwei entsprechenden Oeffnungen gehängt, um die Wärmeausstrahlung und dadurch auch Luftströmungen möglichst zu verhindern. In der That zeigten nach dieser Anordnung die reflectirten Bilder in den beiden Fernrohren keine Schwankungen mehr. Auch das äußere Thermometer  $t'$ , dessen Kugel freilich durch ein Stück Papier vor directer Bestrahlung geschützt war, wurde durch die Erhitzungsvorrichtung kaum beeinflusst, und wenn das Thermometer während solcher Beobachtungen stieg, so war daran nur die Nähe des Beobachters und der Umstand Schuld, daß durch die Erwärmung der nöthigen Wassermenge auch die Temperatur des Beobachtungslocales stieg. Natürlich waren aber noch genügend durchsichtige und undurchsichtige Schirme angebracht, um den Apparat sowohl vor den Strahlen der früher erwähnten Gasflamme als auch denen des zur Erhitzung des Wassers dienenden Gasheerdes zu schützen.

Was die beiden Glasplatten betrifft, die zum Verschlusse der Erhitzungsvorrichtung dienten, so wurde hinten ein gutes Stück Spiegelglas ungefähr  $5,7^{\text{mm}}$  dick verwendet. Hier war keine besondere Vorsicht geboten, da diese Platte von den Lichtstrahlen unter senkrechter Incidenz durchlaufen wird. Etwas anderes ist es aber mit der vorderen Glasplatte, an der die Brechung stattfindet. Abgesehen davon, daß dieselbe vollkommen eben seyn muß, soll sie auch möglichst dünn seyn. Versuche mit dickeren Gläsern zeigten nämlich bald, daß dieselben bei hö-

herer Temperatur wie Concavlinen wirken, indem offenbar der Rand der Glasplatten durch die Erhitzungsvorrichtung mehr erwärmt wird, als die Mitte. Ich habe mir daher bei H. Steinheil eine quadratische planparallele Glasplatte von nur einer Linie ( $2,1^{\text{mm}}$ ) Dicke und  $6,7^{\text{mm}}$  Seitenlänge bestellt: eine Aufgabe, die trotz ihrer evidenten Schwierigkeit von H. Steinheil mit großer Präcision gelöst wurde. Um aber eine möglichst gleichförmige Erwärmung der Glasplatte zu sichern, wurde noch zwischen dieselbe und den Erhitzungsapparat eine dünne Messingplatte eingeschaltet, aus welcher nur zwei kleine Oeffnungen für die zwei reflectirten Lichtbündel ausgeschnitten waren. — Diese Messingplatte mit der Glasplatte davor in bestimmter Lage zu erhalten, bot noch Schwierigkeiten, da die zwei Federn des Erhitzungsapparates, welche dazu bestimmt sind, die Glasplatte anzudrücken, eine so dünne Platte ungeheuer entstalteten.

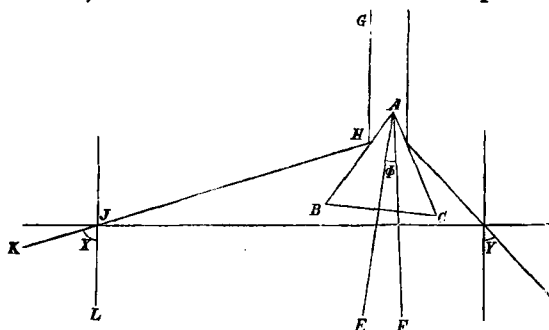
Schließlich wurde folgendes Arrangement getroffen. In die Messingplatte wurden von hinten mit einem Körner drei kleine Eindrücke gemacht, wie dies auch in Fig. 8 Taf. III angegeben ist. Auf der andern Seite ruhte so die Glasplatte auf drei Punkten, gegen welche sie durch eine einzige schwache Feder festgehalten wurde, die natürlich zwischen den drei Punkten drückte. Messing- und Glasplatte saßen aber auch mit ihrer unteren Kante auf. Auf diese Weise brachte man es dahin, daß selbst bei einer Erhitzung auf  $95^{\circ}\text{C.}$  die Glasplatte genau ihre ursprüngliche Stellung bewahrte, was leicht mit dem Fernrobre durch Beobachtung des an der Glasplatte reflectirten Bildes einer entfernten Flamme constatirt werden konnte. Während des Erhitzungsprocesses änderte die Glasplatte allerdings ihre Stellung, es kommt dies aber nur daher, daß die verschiedenen Theile des Apparates sich zugleich schnell erwärmen: ein Uebelstand, dem sich nicht abhelfen läßt, wenn die Erhitzung durch eine einzige Zuleitungsröhre vorgenommen werden muß.

Auf das Prisma hatte die Erwärmung einen doppelten

Einfluß; war bei der Erhitzung der stationäre Temperaturzustand eingetreten, so fand sich das Prisma um eine verticale Axe, ganz wenig aber auch um eine zum Collimator parallele Axe gedreht. Letztere Drehung verschwand wieder, sobald Temperaturgleichheit eintrat, nicht so die Drehung um die verticale Axe. Es soll aber gleich gezeigt werden, daß beide Drehungen bei der Berechnung der Beobachtungen bei ihrem so geringen Betrage vernachlässigt werden können.

#### Theorie des Apparates.

Es sey  $ABC$  der Querschnitt des Prisma und die Halbierungslinie  $AE$  mache mit der Richtung  $AF$  der einfallenden Strahlen den Winkel  $\Phi$ . An der Prismenseite  $AB$  wird der einfallende Lichtstrahl  $GH$  in der Richtung  $HIK$  reflectirt, indem er bei  $I$  die vordere Glasplatte durch-



dringt, durch die er aber, da sie planparallel, keine Ableitung erleidet, falls nur die Temperatur der Luft zu beiden Seiten der Glasplatte gleich ist. Nennen wir  $X$  den Winkel, den die Richtung  $IK$  mit der Richtung  $IL$  der einfallenden Lichtstrahlen bildet, so hat man

$$X = A + 2\Phi.$$

Nun soll aber die Temperatur zu beiden Seiten der Glasplatte verschieden seyn und  $n$  den Brechungsquotienten der Luft im Innern des Erhitzungsapparates,  $n'$  aber den Brechungsquotienten der Luft außerhalb bedeuten. Dreht sich dann gleichzeitig noch das Prisma um den

kleinen Winkel  $\varphi$  um die Verticale, so wird auch der Winkel  $X$  eine kleine Aenderung  $\xi$  erfahren, und zwar wird er wachsen, wenn  $n > n'$ . Zur Bestimmung von  $\xi$  giebt uns aber das Brechungsgesetz die Gleichung

$$\frac{\sin(A + 2\varphi - \xi)}{\sin(A + 2\varphi - 2\varphi)} = \frac{n}{n'} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

unter der Voraussetzung, daß die planparallele Glasplatte senkrecht zur Richtung der einfallenden Strahlen ist. Vernachlässigt man nun zweite und höhere Potenzen der kleinen Größen  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $n - n'$  in vorstehender Gleichung, so wird dieselbe

$$\xi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{n - n'}{n} \tan(A + 2\varphi) + 2\varphi \cdot \cdot \cdot (2).$$

In dieser Gleichung kann nun der Winkel  $\varphi$  vernachlässigt werden, auch wenn er nicht gleich Null, sondern nur überhaupt sehr klein ist. Er tritt ja in einem Gliede auf, das wegen des Factors  $n - n'$  ohnedieß schon ein Glied erster Ordnung der Kleinheit ist: die Vernachlässigung des kleinen Winkels  $\varphi$  bedingt also nur die Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung der Kleinheit. Man erhält also

$$\xi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{n - n'}{n} \tan A + 2\varphi \cdot \cdot \cdot (3).$$

Aus dem eben Gesagten ergibt sich aber, daß der Werth von  $\xi$  auch nicht durch eine kleine Drehung des Prisma um eine horizontale Axe geändert wird, oder dadurch, daß die Glasplatte nicht vollkommen senkrecht zur Richtung der einfallenden Strahlen ist; in beiden Fällen werden ja nur solche Größen kleine Aenderungen erfahren, die schon mit einem kleinen Factor multiplicirt sind.

Eine ähnliche Gleichung wie (3) erhält man natürlich auch für die Reflexion an der zweiten Prismenseite  $AC$ . Nennen wir für diesen Fall  $\eta$  die Aenderung in der Richtung des reflectirten Strahles bei ungleicher Temperatur, so ist jetzt

$$\eta = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{n - n'}{n} \tan A - 2\varphi \cdot \cdot \cdot (4).$$

Die Summe der Winkel  $\xi$  und  $\eta$  giebt nun die Aende-



zung  $D$  des Winkels, den die beiden reflectirten Strahlen miteinander machen: man hat hiefür

$$D = \xi + \eta = \frac{360^\circ}{\pi} \frac{n - n'}{n} \operatorname{tang} A \quad . \quad . \quad (5).$$

Auf den Werth von  $D$  ist somit die Stellung des Prisma und der Glasplatte innerhalb bestimmter Gränzen ohne Einfluß. Ich habe mich übrigens auch durch Ausrechnung überzeugt, daß selbst unter der Annahme von Werthen der Winkel  $\Phi$ ,  $\varphi$ , wie sie bei meinen Beobachtungen gewiß nicht vorgekommen sind, diese Winkel ohne Einfluß auf die Resultate bleiben.

Die Gleichung (5) giebt zur Berechnung der Aenderung des Brechungsquotienten der Luft:

$$n - n' = \frac{\pi}{360^\circ} n \cotg . A D \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Da nun durch wiederholte Beobachtung an einem optischen Theodoliten

$$A = 60^\circ 18' 51''$$

gefunden wurde, so wird, wenn man etwa

$$n = 1,0002945$$

setzt und  $D$  in Sekunden ausdrückt

$$n - n' = 0,000001381 D \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Der Winkel  $D$  konnte direct natürlich nur in Theilen der beiden Schraubenmikrometer beobachtet werden. Der Winkelwerth der Mikrometerschraube des Fernrohres  $\alpha$  liefs sich aber leicht ermitteln, da dessen Drehungsaxe an ihrem unteren Ende einen Spiegel ( $w$ ) trägt, dessen Drehungen durch Scale und Fernrohr bestimmt wurden; hierbei konnte die Stellung dieses Fernrohres ebenfalls durch eine Schraube geändert werden. Wiederholte Beobachtungen ergaben mir für die Mikrometerschraube  $\alpha$  den Werth

$$1 \text{ Theilstrich} = 0,7878 \text{ Sekunden.}$$

Was nun die zweite Mikrometerschraube  $y$  betrifft, so hätte ihr Verhältniß ( $k$ ) zu der ersten durch Beobachtung des an der vorderen Glasplatte reflectirten Bildes des Fadendekreuzes  $\alpha$  ermittelt werden können. Ich habe es jedoch

vorgezogen, den Werth von  $k$  aus den Beobachtungen selbst abzuleiten, da ja die bei der angegebenen Methode in das Fernrohr  $y$  gelangenden homocentrischen Strahlenbündel doch vielleicht nicht genau in derselben Ebene vereinigt werden, wie die von dem Prisma reflectirten.

Setzen wir den Werth von  $k$  als bekannt voraus, so können wir die ganze Aenderung in der Richtung der beiden reflectirten Bilder in Theilen der Mikrometerschraube  $x$  ausdrücken. Ist  $\Delta$  etwa der so bestimmte Betrag dieser Aenderung, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$D = 0,7878 \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und somit auch

$$n - n' = 0,000001088 \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

#### Correction des Apparates.

Zuerst wurden nach bekannter Methode mit Hülfe einer planparallelen Glasplatte, die Axen der beiden Fernrohre  $x$ ,  $y$  und des Collimators, sowie der Prismenstisch senkrecht zur Axe des Spectralapparates gestellt, um welche Axe das eine Fernrohr  $x$  drehbar ist. Hierauf wurde der Erhitzungsapparat sammt dem Prisma und der hintern Glasplatte auf den Prismenstisch in möglichst richtiger Lage gestellt und mit bedeutenden Metallmassen beschwert, um ihn vor zufälligen Verrückungen zu sichern. Das bewegliche Fernrohr wurde dann auf das Fadenkreuz des Collimators eingestellt, die vordere Glasplatte eingesetzt und nun die Stellschrauben des Erhitzungsapparates so lange corrigirt, bis die vordere Glasplatte senkrecht stand zur Axe des Fernrohrs  $x$ , dessen Fadenkreuz zu diesem Zwecke natürlich von dem Ocular aus beleuchtet werden mußte. Hienach war man berechtigt, anzunehmen, daß die Glasplatte senkrecht sey zu den auf das Prisma fallenden Lichtstrahlen. Die beiden Fernrohre wurden dann auf die beiden vom Prisma reflectirten Bilder gerichtet; um aber die symmetrische Stellung gegen die einfallenden Lichtstrahlen zu erreichen, wurden das Prisma und in

Folge dessen auch die Fernrohre so lange gedreht, bis das Fadenkreuz des einen Fernrohres durch Reflexion an der vorderen Glasplatte mit dem des anderen coincidirte. Mit Hülfe der Stellschrauben des Prisma wurde dann noch erreicht, daß in den reflectirten Bildern des Collimatorkreuzes die Horizontalfäden mit denen der Fernrohrkreuze übereinstimmten. Diese Correctionen mußten natürlich mehrmals wiederholt werden, schon darum, weil die Stellung des Prisma nur nach Wegnahme der vorderen Glasplatte geändert werden konnte.

#### Beobachtungen.

Die nachfolgende Tabelle giebt die Beobachtungen, die ich mit dem beschriebenen Apparate im Monate März d. J. angestellt habe. Ich übergehe dabei zahlreiche Beobachtungsreihen, die auszuführen wurden, bevor an dem Apparate noch alle im Vorhergehenden beschriebenen Corrections-Vorrichtungen getroffen waren und die noch nicht den wünschenswerthen Grad von Constanz zeigten. In der folgenden Aufzählung bedeutet nun

- h* den corrigirten Barometerstand, abgelesen an einem Aneroid;
- e* die Spannung des Wasserdampfes in der Luft beobachtet mit einem August'schen Psychrometer;
- t* die Temperatur der Erhitzungsvorrichtung;
- t'* die Temperatur außerhalb;
- x, y* die Ablesungen an den beiden Mikrometerschrauben;
- u* die fortlaufende Nummer der Beobachtung.

Die für *x* und *y* gegebenen Zahlen sind Mittel aus 7 bis 15 Ablesungen<sup>1)</sup>, die abwechselnd am ersten und zweiten Fernrohre angestellt wurden. Dazwischen mußte natürlich auch die Temperatur wiederholt abgelesen werden. Der Stand des inneren Thermometers änderte sich dabei meist gar nicht, nur das äußere Thermometer stieg

1) Die aus diesen Ablesungen berechneten wahrscheinlichen Fehler der angegebenen Mittel übersteigen nirgends die Grösse von  $\pm 0,5$  Theilstriichen.

durch die Nähe des Beobachters bisweilen um einen ganzen Grad. In einem solchen Falle wurde aus den Able-  
sungen am äusseren Thermometer das Mittel genommen.  
Diese Schwankungen des äusseren Thermometers dürften  
um so mehr ohne Einfluss auf die Berechnung der Ver-  
suche seyn, als sie letztere ziemlich gleichmässig treffen.

Datum				<i>h</i>	<i>e</i>	<i>t</i>	<i>t'</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>u</i>
März 7.	2 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	N		754	6,7	19,7	19,0	197	104	1
	6 0			753	6,8	19,5	20,0	191	98	2
	7 0			753	7,7	64,9	20,3	219	98	3
	8 30			751	7,9	89,0	20,0	242	108	4
März 8.	10 30	V		751	6,7	19,0	20,6	196	106	5
	11 15			751	6,7	4,4	20,6	162	88	6
	1 30	N		750	7,0	44,1	19,5	213	103	7
	2 45			749	8,3	84,1	20,0	240	108	8
	6 0			748	7,7	20,3	19,7	196	105	9
	6 45			749	8,0	5,3	20,4	164	89	10
	7 30			749	7,1	56,2	20,3	246	125	11
	9 0			748	7,5	85,1	20,4	274	135	12
	9 20			749	8,9	95,0	20,6	268	125	13
März 9.	1 0	N		745	6,0	17,5	19,7	241	139	14
	4 30			743	7,4	19,0	19,5	231	131	15
	5 30			743	6,0	3,6	20,0	197	116	16
	6 0			742	7,5	37,2	20,3	240	129	17
	7 0			742	8,1	52,5	20,4	244	126	18
	8 20			742	9,1	84,1	20,9	253	117	19
	9 15			740	8,7	95,0	20,6	268	125	20
Marz 10.	1 30	N		736	8,0	19,0	21,5	244	141	21
	1 50			736	8,5	5,0	21,6	213	126	22
	3 15			736	8,3	94,2	21,6	260	119	23
	6 0			735	8,0	22,1	19,7	228	126	24
März 11.	2 0	N		736	8,1	18,1	19,0	245	140	25
	6 0			738	9,2	18,9	20,0	238	135	26
März 12.	1 30	N		747	7,3	18,4	19,5	235	133	27
	3 0			747	7,5	2,4	19,2	217	130	28
	4 0			747	7,6	94,0	19,7	205	76	29
März 13.	1 0	N		752	7,4	17,3	18,5	183	92	30
	2 0			752	—	41,3	19,0	200	93	31
	3 0			752	7,4	50,0	19,0	202	92	32
	3 45			752	7,5	95,0	18,9	176	50	33
	6 45			752	7,2	20,1	17,2	130	49	34

Datum			$h$	$e$	$t$	$t'$	$x$	$y$	$u$
März 14.	11 <sup>b</sup>	45 <sup>m</sup> V	752	6,0	17,9	17,9	142	58	35
	1	0 N	751	6,7	38,2	18,3	136	43	36
	2	45	751	7,7	58,2	18,4	166	56	37
März 15.	10	0 V	743	7,4	17,7	21,9	147	65	38
	11	15	743	8,3	60,1	21,5	191	80	39
	12	0	743	9,7	94,8	20,7	191	61	40
	7	30 N	747	6,0	18,6	18,3	149	63	41

## Berechnung der Beobachtungen.

Die Berechnung dieser Versuche geschah auf folgende Weise. Nennen wir  $x_0$  und  $y_0$  die Ablesungen für den Fall, wo  $t = t'$ , ferner wie früher  $\Delta$  die Aenderung des Winkels der beiden reflectirten Strahlen in Theilen des Mikrometers  $x$ , so hat man für eine beliebige Beobachtung

$\Delta = x_0 - x + k(y - y_0) = (x_0 - ky_0) - (x - ky)$ ,  
da mit wachsendem  $n$  die Zahlen  $x$  ab-, die Zahlen  $y$  aber zunehmen. Setzen wir daher

$$\left. \begin{aligned} a &= x_0 - ky_0 \\ \frac{1}{f} &= 0,000001089 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot (11),$$

so geben die Gleichungen (9) und (10)

$$x - ky = a + f(n - n') \cdot \cdot \cdot \cdot (12).$$

Nehmen wir nun für den Brechungsquotienten der Luft die Form

$$n = n_0 + bt + ct^2 \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

an, so wird die vorhergehende Gleichung

$$x - ky = a + bf(t - t') + cf(t^2 - t'^2) \cdot (14).$$

Ich habe jedoch diese Gleichung mit den vier unbekannten Constanten  $a$ ,  $bf$ ,  $cf$  und  $k$  nicht unmittelbar auf die vorliegende Beobachtung angewandt, sondern zuerst nur auf jene, bei denen  $t$  nahezu gleich  $t'$  ist. Auf diese Beobachtungen hat nämlich das letzte Glied gar keinen Einfluß und es bleiben nur drei Constanten übrig, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den betreffenden sechszehn Beobachtungen ermittelt wurden. Die so erhaltenen Werthe sind

$$a = 67,91$$

$$bf = 0,2527$$

$$k = 1,2498.$$

Auf den Werth von  $b$  ist natürlich gar kein Gewicht zu legen, da der äußerste Temperaturunterschied nur  $4^{\circ} 2$  beträgt, der Unterschied ( $B - R$ ) zwischen den mit diesen Constanten berechneten Werthen von  $x$  und den beobachteten ergibt sich aus folgender Tabelle:

$u$	$t - t'$	$x$	$B - R$
38	- 4,2	147	- 1,1
21	2,5	244	+ 0,5
14	2,2	241	- 0,1
5	1,6	196	- 4,1
30	1,2	183	+ 0,5
26	1,1	238	+ 1,7
27	1,1	235	+ 1,1
25	0,9	245	+ 2,3
2	0,5	191	+ 0,7
35	0,0	142	+ 1,6
41	+ 0,3	149	+ 2,3
15	0,5	231	- 0,8
9	0,6	196	- 3,3
1	0,7	197	- 1,1
24	2,4	228	- 0,5
34	2,9	130	+ 0,1.

Mit Hülfe der so gefundenen Werthe von  $a$  und  $k$  konnte nun für die übrigen Beobachtungen die GröÙe  $\Delta = x - ky - a$  berechnet werden. Für dieselbe hat man nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\Delta = bf(t - t') + cf(t^2 - t'^2). \quad . \quad (15),$$

deren Constanten  $bf$  und  $cf$  ebenfalls nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den übrigen 25 Beobachtungen berechnet wurden. Die Rechnung gab

$$bf = 0,83170$$

$$cf = - 0,0021645,$$

welchen Constanten folgende Unterschiede der berechneten und beobachteten Werthe von  $\Delta$  entsprechen:

$u$	$t - t'$	$t^2 - t'^2$	$\Delta$	$B - R$	
28	17	360	14	+ 0,6	
22	17	440	12	- 1,2	
16	16	390	16	+ 3,5	+ 2,0
6	16	400	16	+ 3,6	
10	15	390	15	+ 3 4	
17	17	970	11	- 1,0	
36	20	1120	14	- 0,2	
31	22	1340	16	+ 0,6	- 0,5
7	25	1560	16	- 1,4	
32	31	2140	19	- 2,2	
18	32	2340	19	- 2,6	
11	36	2750	22	- 2,0	
29	39	3150	23	- 2,6	- 1,4
37	40	3050	28	+ 1,3	
3	45	3800	29	- 0,2	
19	63	6640	39	+ 0,9	
8	64	6670	37	- 1,8	
12	65	6830	37	- 2,3	- 1,3
4	69	7520	39	- 2,1	
23	71	8410	43	+ 0,4	
13	74	8600	44	+ 1,0	
20	74	8600	44	+ 1,0	
40	74	8560	47	+ 3,9	+ 1,1
29	74	8450	42	- 1,3	
33	76	8670	46	+ 1,5	

Die vorstehenden Beobachtungen zerfallen, wie in der Tabelle angedeutet ist, in fünf Gruppen hinsichtlich der Temperaturverhältnisse. Nimmt man für jede Gruppe das Mittel aus den Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung, so erhält man die in der letzten Spalte angeführten Zahlen, die eine gewisse Regelmäßigkeit nicht verkennen lassen. Dies würde darauf hindeuten, daß Formel (13) das Gesetz der Abhängigkeit des Brechungsquotienten nicht genau repräsentiert und daß noch ein Glied mit der dritten Potenz der Temperatur hinzuzufügen wäre. Daß übrigens die Formel (13) und ähnliche nicht das wahre Gesetz der Abhängigkeit enthalten können, ergibt sich auch daraus, daß diese Formel zufolge der an-

gegebenen Werthe der Constanten bei ungefähr 193° C. ein Minimum hat, so daß darüber hinaus der Brechungsquotient der Luft wieder wachsen würde, was doch ganz unwahrscheinlich ist.

Die letzten Werthe der Constanten  $bf$  und  $cf$  geben nun durch Division mit  $f$  schließlic für den Brechungsquotienten der Luft die Formel

$$n = n_0 - 0,000000905 t + 0,00000000235 t^2 \quad (\text{VI}).$$

#### Schlussbemerkungen.

Ich habe im Vorhergehenden einen Umstand nicht berührt, von dem man glauben könnte, daß er die Genauigkeit der erhaltenen Resultate in Frage stellt. Es läßt sich nämlich nicht die Temperatur im Innern der Erhitzungsvorrichtung steigern, ohne ungleich auch die äußere Luft an der vorderen Glasplatte zu erwärmen, eine Erwärmung, die freilich kaum bis zu den Fernrohrobjectiven vordringt. Würden nun die Aenderungen der Temperatur zwischen den Fernrohren und der Glasplatte nur in parallelen Schichten vor sich gehen, so würde dies offenbar auf die schließliche Ablenkung der reflectirten Bilder ohne Einfluß seyn. Eine solche Vertheilung der Temperatur dürfte aber wohl in den der Platte zunächst liegenden Luftschichten vorauszusetzen seyn, die entfernteren sind aber wegen ihrer geringen Erwärmung ohnedies von verschwindendem Einflusse.

Aber auch der Versuch zeigt, daß die Erwärmung der Luft zunächst der vorderen Glasplatte ganz ohne Einfluß ist. Es konnte nämlich keine Verschiebung der reflectirten Bilder wahrgenommen werden, wenn auch die Erhitzungsvorrichtung noch so lange (bis zu einer Stunde) auf der Temperatur von 95° gehalten wurde, und während dieser Zeit muß doch die Erwärmung der äußeren Luft beträchtliche Fortschritte gemacht haben. Es brachte ebenso keine Aenderung hervor, wenn die erwärmte Luft durch Blasen entfernt wurde; auch die Wegnahme des Papierschirmes von der Glasplatte hatte keinen Einfluß.



Um auch noch zu zeigen, daß die vordere Glasplatte keine Störung der beobachteten Erscheinung veranlassen konnte, will ich noch folgende zwei Beobachtungen anführen.

1. An die Stelle der vorderen Glasplatte wurde eine 5,7<sup>mm</sup> dicke Spiegelglasplatte gesetzt. Eine Temperaturerhöhung von 20 auf 95° hatte jetzt nur eine Aenderung  $\Delta$  von 22 Theilstrichen der Mikrometerschraube  $x$  zur Folge und es änderte diese Zahl sich auch durch fortgesetztes Erhitzen nicht. Wurde letzteres jedoch unterbrochen, so stieg der Werth von  $\Delta$  noch eine Weile, so daß bei etwa 85° derselbe 34 betrug.

2. Als hierauf eine planparallele Quarzplatte von nur 3<sup>mm</sup> Dicke statt der vorderen Glasplatte eingesetzt worden war, zeigten sich nur mehr schwache Spuren der vorher beobachteten Verzögerung, indem die Ablenkung nach Absperren des Dampfes noch um 1 — 2 Theilstriche zu wachsen schien. Diese geringe GröÙe fällt jedoch schon innerhalb der Gränzen der Beobachtungsfehler, da wegen der sinkenden Temperatur die Ablesungen nicht öfters wiederholt werden konnten. Es stimmen hiemit aber auch die übrigen mit Hülfe dieser Quarzplatte ausgeführten Versuche. Eine durch zwei Tage fortgesetzte Versuchsreihe gab nämlich folgende Mittelwerthe:

$t$	$t'$	$x - ky$	
20,0	19,3	43	(8 Versuche)
94,7	19,5	83	(9 Versuche).

Diese Zahlen geben für eine Temperaturveränderung von 20° 0 auf 94° 7 den Werth  $\Delta = 40$ , während die angegebenen Constanten hiefür  $\Delta = 44$  geben.

An der dünnen planparallelen Glasplatte war natürlich keine Spur einer Verzögerung mehr zu bemerken, und die Uebereinstimmung der Resultate selbst für den Fall, wo eine doppeltbrechende Quarzplatte angewandt worden war, dürfte wohl für die Richtigkeit der Formel (VI) sprechen.

Zum Schlusse habe ich noch nach dieser Formel den

Brechungsquotienten der Luft von 5 zu 5 Graden berechnet, wobei

$$n^0 = 1,0002945$$

gesetzt wurde. Die letzte Spalte enthält die Differenzen für einen Grad.

$t$	$n$	Diff. 1°
0	1,0002945	9,0
5	900	8,6
10	857	8,4
15	815	8,4
20	773	8,0
25	733	7,6
30	695	7,6
35	657	7,2
40	621	7,2
45	585	6,8
50	551	6,6
55	518	6,2
60	487	6,2
65	456	5,8
70	427	5,8
75	398	5,4
80	371	5,2
85	346	5,2
90	321	4,8
95	297	4,4
100	275	

---