

## Ueber *Jacobis* Methode, die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren und ihre Ausdehnung auf das *Pfaffs*che Problem, Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.

(Von Herrn A. Clebsch zu Karlsruhe.)

---

... Die *Jacobische* Abhandlung „nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis integrandi“, deren Herausgabe ich auf Ihren Wunsch übernahm, bin ich im Stande, Ihnen beifolgend in druckfertiger Abschrift zu übersenden. Sie enthält in vollständiger Durchführung jene neue Methode, die *Jacobi* in früheren Veröffentlichungen nur angedeutet, und selbst in seinen Vorlesungen, so viel mir bekannt, nur unvollständig mitgetheilt hat.

Das Studium dieser *Jacobischen* Abhandlung hat mich darauf geführt, seine Methode von den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf die totalen, oder auf die *Pfaffs*che Differentialgleichung auszudehnen, eine Aufgabe, mit welcher sich bereits Herr *Natani* (im vorigen Bande dieses Journals) beschäftigt hat. Herr *Natani* giebt den Grundgedanken an, auf welchem eine neue Theorie des *Pfaffs*chen Problems, wenn sie den wiederholt von *Jacobi* ausgesprochenen Forderungen genügen soll, beruhen muss, nämlich auf der Benutzung jedes gefundenen Integrals zur Reduction der vorliegenden totalen Differentialgleichung in eine andere, welche eine Veränderliche weniger enthält, und zugleich ein Integral weniger zu ihrer Integration erfordert. Doch gehört zur vollständigen Durchführung dieses Gedankens die Behandlung der simultanen Systeme, auf welche man bei der successiven Lösung des Problems geführt wird, und zu dieser Behandlung konnte ich die Methode erst aus dem Studium der *Jacobischen* Abhandlung schöpfen, indem ich seine Methode fast ohne Aenderung geeignet fand, von den partiellen Differentialgleichungen auf das *Pfaffs*che Problem übertragen zu werden.

Aber bei diesen Untersuchungen ergab sich für die Behandlung des Pfaffschen Problems ein völlig neuer Gesichtspunkt. Spricht man die Aufgabe dahin aus, dass dem Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

die Gestalt

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

gegeben werden solle, so findet man nach der gewöhnlichen Methode, dass  $f_1, f_2, \dots, f_n$  Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_i \sum_k \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

sind, wo  $R$  die Quadratwurzel der aus den Grössen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildeten Determinante,  $R_{ik}$  den Differentialquotienten von  $R$  nach  $a_{ik}$  bedeutet. Aber man kann nachweisen, dass die Functionen  $f$  vollkommen definiert werden durch ein System von  $\frac{n \cdot n + 1}{2}$  simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von diesen sind  $n$  in der obigen Gleichung enthalten; die übrigen  $\frac{n \cdot n - 1}{2}$  sind durch die Gleichung gegeben:

$$\sum_i \sum_k \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} = 0,$$

in welcher für  $\mu, \nu$  alle möglichen Combinationen von einander verschiedener Indices zu setzen sind. Von diesen Gleichungen ausgehend, kann man für das Pfaffsche Problem eine Integrationsmethode aufstellen, welche zu der von Jacobi für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gefundenen das genaue Analogon bildet.

Die oben angegebenen Differentialgleichungen besitzen noch die sehr merkwürdige Eigenschaft, dass das Theorem Poissons in der einfachsten Weise sich auf dieselben ausdehnen lässt, was auch für das Pfaffsche Problem unter Umständen wesentliche Vortheile bietet. Bezeichnet man nämlich durch  $(\varphi)$  und  $[\psi, \chi]$  die beiden Ausdrücke:

$$(\varphi) = \sum \sum \frac{R_{ik}}{R} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

$$[\psi, \chi] = \sum \sum \frac{R_{ik}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_k},$$

so kann man leicht folgende Sätze nachweisen:

1. Sind  $\varphi, \psi, \chi$  Lösungen der Gleichung

$$(\varphi) = 0,$$

so sind die Ausdrücke

$$[\varphi, \psi], [\psi, \chi], [\chi, \varphi]$$

Multiplikatoren, und also ihre Quotienten neue Lösungen derselben Gleichung.

2. Betrachtet man in der Gleichung

$$[\varphi, \psi] = 0$$

$\psi$  als gegeben, und hat man sodann zwei Lösungen  $\varphi, \chi$  dieser Gleichung gefunden, so ist auch  $[\varphi, \chi]$  eine Lösung derselben.

Man sieht also, dass im Allgemeinen für die Gleichung  $(\varphi) = 0$  aus drei Lösungen, für die Gleichung  $[\varphi, \psi] = 0$  aus zwei Lösungen alle übrigen durch Differentiation abgeleitet werden können.

Carlsruhe, im März 1861.