

Mittl. Zeit.			Conjunction.		
	^h	[']	^h	[']	
c. Eintr.	11	58 30,3	13	1 21,41	+ 0,330 x
Austr.	12	51 40,6	13	1 38,52	— 0,060 x
e. Eintr.	11	53 55,3	12	50 15,44	+ 1,549 x
Austr.	12	35 22,4	12	49 56,10	— 1,132 x

Die Dorpater Beobachtungen geben durch den Ein- und Austritt von *b* die Correction $x = -7'',355$, von *c* $= -3'',798$, von *e* $= -5'',336$ und von $\eta = -5'',392$, demnach im Mittel aus vier Bestimmungen $x = -5'',47$, oder im Mittel aus *e* und η , wo die stärkeren Coefficienten der Breitenverbesserung zur Bestimmung der letzteren vorzüglich günstig sind, $-5'',36$. Durch Vergleichung des in Dorpat beobachteten und des aus den *Bessel*-schen Sternlängen berechneten Zeitunterschiedes der Conjunctionen einzelner Sterne folgt $x = -5'',26$. Werden nun mit $x = -5'',36$ die Conjunctionen an beiden Orten verbessert, so findet sich der Längenunterschied zwischen

Kasan und Dorpat durch den Austritt von *b* $= 1^h 29' 29'',77$, von *c* $= 1^h 29' 30'',27$ und von *e* $= 1^h 29' 36'',02$, im Mittel $= 1^h 29' 32'',02$. Die Länge von Dorpat, wie ich sie *Astr. Nachr.* No. 72 gefunden habe, zu $1^{\text{st}} 37' 32'',7$ angenommen, wäre also die Länge von Kasan $= 3^h 7' 4'',7$. Nach *Bode's Astron. Jahrbuche* für 1809 S. 162 hat der verstorbene Staatsrath von *Schubert* auf seiner chinesischen Reise die Breite von Kasan im Mittel aus 70 Beobachtungen zu $55^\circ 47' 41'',4$ und die Länge aus Mondsdistanzen zu $3^h 8' 3'',6$ in Zeit bestimmt; letztere weicht nahe um eine ganze Minute von der aus obiger Bedeckung berechneten ab. Ich wünschte zu wissen, ob vielleicht Herr Professor *Littrow* Beobachtungen für die Länge und Breite von Kasan irgendwo bekannt gemacht hat, auch ob durch neuere Vermessungen dieser Punct etwa näher bestimmt seyn möchte.

Stuttgart 1826. März 14.

W u r m.

Integration der Formel $\{1 - \alpha \cdot \cos \varphi + \alpha^2\}^\lambda \cdot d\varphi$

von Herrn Professor *Moth* in Prag 1826. Febr. 24.

I. Bekanntlich haben sich die größten Analysten mit der Integration der in der physischen Astronomie vorkommenden Formel $\int (1 + n \cdot \cos \varphi)^\lambda \cdot d\varphi$ vielfältig beschäftigt. Namentlich haben *Euler* (*Instit. calc. int.*), *Klügel* (*mathem. Wörterb. Art. Integralf. No. 125.*), *La Croix* (*Traité du calc. diff. et int. §. 454 sqq.*), *La Grange*, und vorzüglich *La Place* (*Mec. cel. lib. II. no. 49*) die Entwicklung dieses Integrals in eine Reihe, die nach den Cosinussen der vielfachen des Winkels φ fortschreitet, sehr ausführlich gelehrt. In der physischen Astronomie stellt sich dieses Integral unter der Gestalt $\int \frac{d\varphi}{(r^2 - 2rr' \cdot \cos \varphi + r'^2)^m}$

dar, welche sich auf die Form $\frac{1}{(r^2 + r'^2)^m} \int \frac{d\varphi}{(1 + n \cdot \cos \varphi)^m}$,

wo $n = -\frac{2rr'}{r^2 + r'^2}$, bringen läßt.

Anstatt das vorstehende Integral nach den Cosinussen der vielfachen Winkel zu entwickeln, wollen wir dasselbe durch eine Reihe ausdrücken, die nach den Potenzen von α fortschreitet, und wollen voraussetzen, daß $\alpha < 1$, was jedesmal statt finden kann.

II. Man setze

$$\int (1 - \alpha \cdot \cos \varphi + \alpha^2)^\lambda \cdot d\varphi = A^{(0)} + A^{(1)} \cdot \alpha + A^{(2)} \cdot \alpha^2 + A^{(3)} \cdot \alpha^3 + \dots$$

so wird man A, A, A, \dots als Funktionen von φ und λ zu betrachten haben. Um diese zu finden, verwandle man $(1 - \alpha \cos \varphi + \alpha^2)^\lambda$ in eine ähnliche Reihe. Man setze also

$$(1 - \alpha \cos \varphi + \alpha^2)^\lambda = 1 + B^{(1)} \cdot \alpha + B^{(2)} \cdot \alpha^2 + B^{(3)} \cdot \alpha^3 + \dots \text{ dann ist}$$

$$A^{(0)} = \varphi, A^{(1)} = \int B^{(1)} \cdot d\varphi, A^{(2)} = \int B^{(2)} \cdot d\varphi, A^{(3)} = \int B^{(3)} \cdot d\varphi, \dots$$

$$\text{und überhaupt } A^{(i)} = \int B^{(i)} \cdot d\varphi.$$

Das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Coefficienten B , worauf es bei Bestimmung der Coefficienten A ankommt, finde ich nun:

$$B^{(i)} = \frac{\left\{ (2\lambda - i + 2) \cdot B^{(i-2)} - (\lambda - i + 1) \cdot \cos \varphi \cdot B^{(i-1)} \right\}}{i}$$

III. Wir können nun, aus diesem allgemeinen Gesetze das der Glieder des Coefficienten $B^{(i)}$ entwickeln. Man setze erstlich

$$B^{(i)} = B^{(i,0)} + B^{(i,2)} \cdot \cos^2 \varphi + B^{(i,4)} \cdot \cos^4 \varphi + \dots \text{ oder } \\ B^{(i)} = B^{(i,1)} \cdot \cos \varphi + B^{(i,3)} \cdot \cos^3 \varphi + B^{(i,5)} \cdot \cos^5 \varphi + \dots;$$

so daß wir unter $B^{(i,k)}$ den Coefficienten von $(\cos \varphi)^k$ in $B^{(i)}$ vorstellen; die erste dieser beiden Reihen gilt für ein gerades, die zweite für ein ungerades i .

Ich finde nun

$$B^{(i,k)} = \left\{ \frac{(2\lambda - i + 2) \cdot B^{(i-2,k)} - (\lambda - i + 1) \cdot B^{(i-1,k-1)}}{i} \right\}$$

worinn man für k alle ganzen Zahlen von 0 bis i zu setzen hat.

IV. Setzt man aber

$$B^{(i)} = B^{(i,0)} + B^{(i,2)} \cdot \cos 2\varphi + B^{(i,4)} \cdot \cos 4\varphi + \dots \text{ oder } \\ B^{(i)} = B^{(i,1)} \cos \varphi + B^{(i,3)} \cdot \cos 3\varphi + B^{(i,5)} \cdot \cos 5\varphi + \dots$$

so daß nun $B^{(i,k)}$ den Coefficienten von $\cos(k\varphi)$ in der Entwicklung des Coefficienten $B^{(i)}$ bedeuten; nur müssen k und i zugleich gerade oder zugleich ungerade seyn. Zur Berechnung dieses Coefficienten finde ich

$$B^{(i,k)} = \left\{ \frac{(2\lambda - i + 2) B^{(i-2,k)} - (\lambda - i + 1) \left(\frac{1}{2} B^{(i-1,k-1)} + \frac{1}{2} B^{(i-1,k+1)} \right)}{i} \right\}$$

$$B^{(1)} = -\lambda \cdot \cos \varphi;$$

$$B^{(2)} = + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} \cos^2 \varphi;$$

$$B^{(3)} = - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1} \cos \varphi - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cos^3 \varphi;$$

$$B^{(4)} = + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2} \cos^2 \varphi + \frac{\lambda \cdot (\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 \varphi;$$

$$B^{(5)} = - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2} \cos \varphi - \frac{\lambda \cdot (\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 \varphi - \frac{\lambda \cdot (\lambda-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 \varphi;$$

$$B^{(6)} = + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\lambda \cdot (\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cos^2 \varphi + \frac{\lambda \cdot (\lambda-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 \varphi + \frac{\lambda \cdot (\lambda-5)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} \cos^6 \varphi;$$

$$B^{(7)} = - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \varphi - \frac{\lambda \cdot (\lambda-4)}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 \varphi - \frac{\lambda \cdot (\lambda-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 \varphi - \frac{\lambda \cdot (\lambda-6)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7} \cos^7 \varphi;$$

u. s. w.

IV. Aehnliche Gleichungen entwickeln sich aus der Gleichung No. IV. Ich bemerke zum Voraus, daß

$$B^{(i,0)} = \frac{2\lambda - i + 2}{i} \cdot B^{(i-2,0)} - \frac{\lambda - i + 1}{2 \cdot i} \cdot B^{(i-1,1)}, \text{ und}$$

$$B^{(i,1)} = \frac{2\lambda - i + 2}{i} \cdot B^{(i-2,1)} - \frac{\lambda - i + 1}{i} [B^{(i-1,0)} + \frac{1}{2} B^{(i-1,2)}]$$

sey.

Man findet hierauf .. $B^{(1,1)} = -\lambda$, und

Ich bemerke, daß für jedes k , das $> i$, auch $B^{(i,k)} = 0$ sey.

Nun ist es nicht schwer, aus den gefundenen Formeln die Coefficienten $B^{(i)}$ zu berechnen.

V. Wir wollen zuerst die Entwicklung nach der Formel No. III machen. Man findet

$$B^{(0,0)} = 1, \quad B^{(1,1)} = -\lambda, \text{ und } \\ B^{(2,k)} = \frac{2\lambda \cdot B^{(0,k)} - (\lambda-1) B^{(1,k-1)}}{2};$$

$$B^{(3,k)} = \frac{(2\lambda-1) B^{(1,k)} - (\lambda-2) B^{(2,k-1)}}{3};$$

$$B^{(4,k)} = \frac{(2\lambda-2) B^{(2,k)} - (\lambda-3) B^{(3,k-1)}}{4};$$

$$B^{(5,k)} = \frac{(2\lambda-3) B^{(3,k)} - (\lambda-4) B^{(4,k-1)}}{5};$$

$$B^{(6,k)} = \frac{(2\lambda-4) B^{(4,k)} - (\lambda-5) B^{(5,k-1)}}{6};$$

u. s. w.

woraus man nach und nach findet:

$$B^{(2,k)} = \lambda \cdot B^{(0,k)} - \frac{\lambda-1}{4} [B^{(1,k-1)} + B^{(1,k+1)}]$$

$$B^{(3,k)} = \frac{2\lambda-1}{3} \cdot B^{(1,k)} - \frac{\lambda-2}{6} [B^{(2,k-1)} + B^{(2,k+1)}]$$

$$B^{(4,k)} = \frac{2\lambda-2}{4} \cdot B^{(2,k)} - \frac{\lambda-3}{8} [B^{(3,k-1)} + B^{(3,k+1)}]$$

$$B^{(5,k)} = \frac{2\lambda-3}{5} \cdot B^{(3,k)} - \frac{\lambda-4}{10} [B^{(4,k-1)} + B^{(4,k+1)}]$$

u. s. w.

Und aus diesen Gleichungen lassen sich nachstehende entwickeln:

$$B^{(1)} = -\lambda \cdot \cos \varphi; \quad B^{(2)} = \frac{\lambda(\lambda+3)}{4} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{4} \cos 2\varphi;$$

$$B^{(3)} = -\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda+6)}{8} \cos \varphi - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{4 \cdot 6} \cos 3\varphi;$$

$$B^{(4)} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+11\lambda+6)}{64} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+9)}{48} \cos 2\varphi + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cos 4\varphi;$$

u. s. w.

VII. Entwicklung einiger besonderer Fälle.

1^{ster} Fall. $\lambda = -\frac{1}{2}$. Für diesen Werth von λ findet man

$$B^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \cos \varphi$$

$$B^{(2)} = -\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \cos^2 \varphi = -\frac{5}{16} + \frac{3}{16} \cdot \cos 2\varphi$$

$$B^{(3)} = -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cos \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^3 \varphi = -\frac{3 \cdot 3}{64} \cos \varphi + \frac{5}{64} \cos 3\varphi$$

$$B^{(4)} = +\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4} \cos^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cos^4 \varphi = \frac{9}{16 \cdot 64} - \frac{15 \cdot 17}{16 \cdot 48} \cos 2\varphi + \frac{105}{48 \cdot 64} \cos 4\varphi;$$

u. s. w.

2^{ter} Fall. $\lambda = -\frac{3}{2}$. Wir finden: $B^{(1)} = +\frac{3}{2} \cdot \cos \varphi;$

$$B^{(2)} = -\frac{3}{2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cos^2 \varphi = -\frac{9}{16} + \frac{15}{16} \cdot \cos 2\varphi;$$

$$B^{(3)} = -\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cos \varphi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cos^3 \varphi = \frac{3 \cdot 5 \cdot 9}{64} \cos \varphi + \frac{35}{64} \cdot \cos 3\varphi;$$

$$B^{(4)} = +\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 4} \cos^2 \varphi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cos^4 \varphi = -\frac{15 \cdot 33}{16 \cdot 64} - \frac{7 \cdot 15^2}{16 \cdot 48} \cdot \cos 2\varphi + \frac{15 \cdot 63}{48 \cdot 64} \cdot \cos 4\varphi; \text{ etc.}$$

F. X. M o t h.

Gerade Aufsteigungen des Mondes und benachbarter Sterne im Jahre 1825 auf der Dorpater Sternwarte beobachtet.

Tag.		Faden Anz.	AR.	Zeit.	Tag.		Faden Anz.	AR.	Zeit.
Januar 31	η Geminor.	5	6 ^h 4' 21,59		Februar 27	9 Geminor.	2	6 ^h 6' 20,57	
	11 ———	4	8 42,96			μ ———	5	12 24,80	
	μ ———	5	12 25,06		März 6	Mond II R.	3	12 53 40,51	+ 0,18
	ν ———	5	18 36,92			Spica	5	13 16 1,80	
	Mond IR.	5	23 37,43	— 0,12	März 30	ω^2 Leonis	3	9 19 7,17	
Februar 26	τ Tauri	5	4 31 46,93			6 ———	5	22 36,82	
	Mond IR.	5	53 49,31	— 0,08		Mond IR.	5	26 5,05	+ 0,06
	118 Tauriseq.	4	5 18 32,76			10 Sextant.	5	47 11,52	
	ζ Tauri	5	27 13,59		März 31	23 Sextant.	3	10 12 2,31	
— 27	132 Tauri	4	5 38 19,11			31 ———	5	21 31,24	
	Mond IR.	5	53 45,25	— 0,06		Mond IR.	5	23 31,66	+ 0,04
	η Geminor.	5	6 3 21,22			55 Leonis	3	44 44,90	
					April 3	53 Virginis	5	13 2 48,93	
						69 ———	4	18 11,25	

*) Der Stern η Geminor. ist nicht in der Ephemeride der Mondsterne, er wurde aber beobachtet, weil er nachher vom Monde bedeckt wurde.