

7.

Bemerkungen über eine Stelle in Lagrange's „Traité de la résolution des équations numeriques article IV. No. 79.“

(Von dem Herrn Prof. Raabe in Zürich.)

In den zwei ersten N^{os}. dieser Abtheilung IV. wird die Schwierigkeit bemerkbar gemacht, aus den nach der Methode der Kettenbrüche erhaltenen transformirten Gleichungen jedesmal die zunächst liegenden ganzen Zahlen der Wurzeln derselben herauszufinden; namentlich, wenn die Wurzeln um weniger als Eins von einander abstehen. Es scheint, fährt der Verfasser fort, als müßte in diesem Falle auf jede der transformirten Gleichungen das allgemeine Verfahren (das Herstellen der Gleichung mit den Quadraten der Unterschiede der Wurzeln) besonders angewendet werden, um die einer jeden Wurzel zunächst liegende ganze Zahl zu finden. Diesem Übelstande abzuhelfen, wird nun das in No. 79. enthaltene Verfahren vorgeschlagen, welches dem Inhalte nach hier folgt.

Es seien λ und Λ Grenzwerthe der gesuchten Wurzel der vorgelegten Gleichung in x , und durch successives Anwenden der Methode der Kettenbrüche zur nähern Bestimmung dieser Wurzel sei man auf die Gleichung

$$(a.) \quad x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'},$$

gekommen, wo $\frac{\pi}{\pi'}$ und $\frac{\varrho}{\varrho'}$ zwei aufeinander folgende Näherungswerthe von x sind und t die Unbekannte der letzten transformirten Gleichung vorstellt: dann kann man zu Grenzwertthen für t auf folgendem Wege gelangen. Man hat aus Gleichung (a.)

$$(b.) \quad t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}.$$

Da nun λ und Λ Grenzwerthe von x sind, so müssen die Ausdrücke

$$\frac{\pi' \lambda - \pi}{\varrho - \varrho' \lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\pi' \Lambda - \pi}{\varrho - \varrho' \Lambda}$$

Grenzwerthe von t abgeben. Beträgt daher der Unterschied dieser Grenz-

werthe weniger als Eins, so hat man auch sogleich den verlangten ganzen Zahlenwerth von t u. s. w.

Eine Folgerung, wie die hier von *Lagrange*, scheint unserer ganzen Art zu denken völlig gemäß zu sein. Man wird kaum ein Bedenken tragen, in dem viel allgemeineren Falle, wenn aus der Gleichung

$$x = \Phi(t)$$

die Gleichung

$$t = \psi(x)$$

abgeleitet wäre, wo Φ und ψ bekannte Functionen andeuten, eine der obigen analoge Folgerung zu machen. Gleichwohl ist diese Folgerung nur unter der Beschränkung zulässig, wenn aus beiden Functionsformen Φ und ψ ein gleicher Genauigkeitsgrad für die abhängigen Variabeln erzielt werden kann.

Dafs die Gleichungen (a.) und (b.) dieser Anforderung nicht entsprechen, soll in Folgendem dargethan werden.

Die ganzen Zahlen ϱ , ϱ' , π , π' haben gleiche Zeichen; man kann daher dieselben, wie die Gröfsen t und x , als mit positiven Zeichen versehen, voraussetzen. Ferner hat man, wenn

$$\frac{\varrho}{\varrho'} > x \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\pi'} < x$$

vorausgesetzt wird, die Gleichung

$$\varrho\pi' - \pi\varrho' = 1.$$

Wird daher durch Δt der nämliche Fehler in t , und durch Δx der hieraus entspringende Fehler in x vorgestellt, so hat man, wenn in einer der Gleichungen (a.) oder (b.) t in $t + \Delta t$ und x in $x + \Delta x$ umgesetzt wird, folgende Gleichung:

$$c. \quad \Delta x = \frac{\Delta t}{(\varrho't + \pi')^2 + \varrho'(\varrho't + \pi')\Delta t}.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dafs ein Fehler in der Annahme des Werthes von t einen viel kleinern in der Bestimmung von x hervorruft. Ja sogar, wenn der Fehler in t , oder wenn man $\Delta t > 1$ hat, wird man dennoch, nach dem was über die Beschaffenheit der Gröfsen ϱ , ϱ' , π , π' , t festgesetzt ist, jedesmal $\Delta x < 1$ haben.

Hieraus folgt aber auch umgekehrt: ein in x begangener Fehler, der sogar kleiner als die Einheit ist, kann einen Fehler in t hervorrufen, der die Einheit übertrifft.

Es bieten daher die oben gefolgerten zwei Grenzwerte für t im Allgemeinen keinen Anhaltspunkt zur Bestimmung von t dar; und, wie aus dem eben Mitgetheilten erhellet, auch dann nicht, wenn ihr Unterschied kleiner als die Einheit ausfällt. Nur in dem Falle, wenn eine fehlerhafte Annahme für x einen Fehler in t hervorruft, der numerisch kleiner als die Einheit ist, wird diese Folgerung statthaft sein.

Um diesen Fall herzustellen, suche man aus der Gleichung (c.) den Werth von Δt , so hat man:

$$\Delta t = \frac{(\rho' t + \pi')^2 \Delta x}{1 - \rho'(\rho' t + \pi') \Delta x}.$$

Damit nun $\Delta t < 1$ sei, muß man die Ungleichheit haben;

$$(\rho' t + \pi')^2 \Delta x < 1 - \rho'(\rho' t + \pi') \Delta x,$$

oder

$$(d.) \quad \Delta x < \frac{1}{(\rho' t + \pi')^2 + \rho'(\rho' t + \pi')^2}.$$

Ist man nun in der Bestimmung einer Wurzel x , nach der Methode der Kettenbrüche, zur Gleichung (a.) gelangt, so ist der genaueste Werth von x der Bruch $\frac{\rho}{\rho'}$. Wenn daher

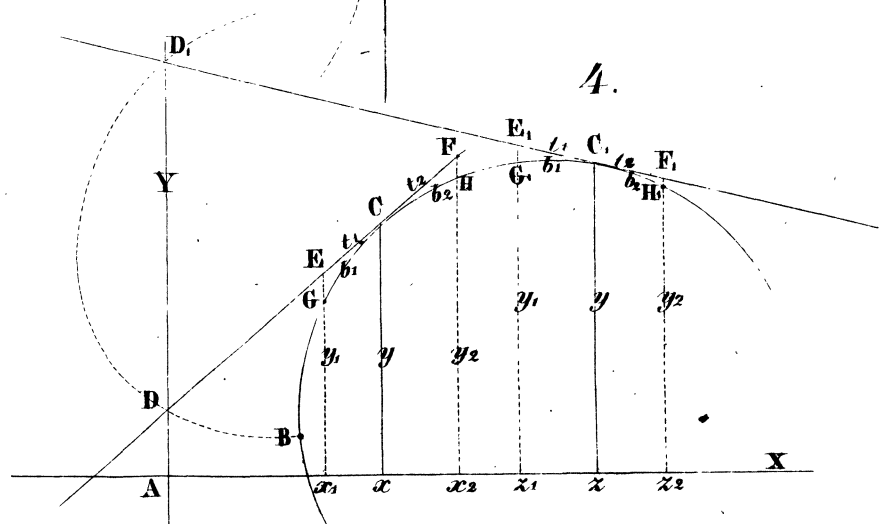
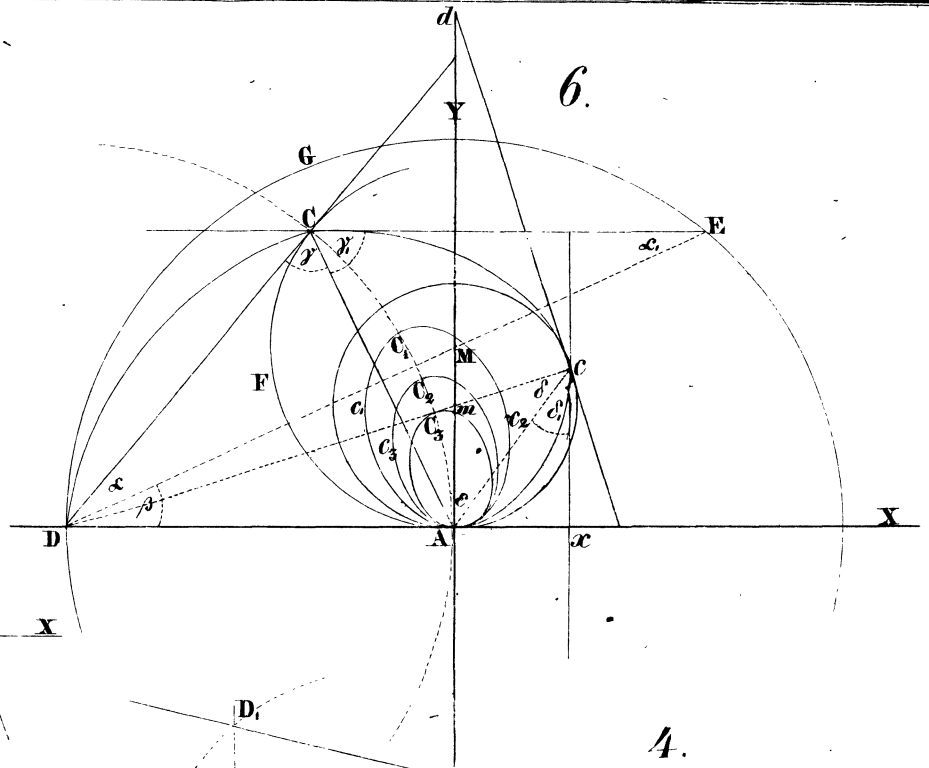
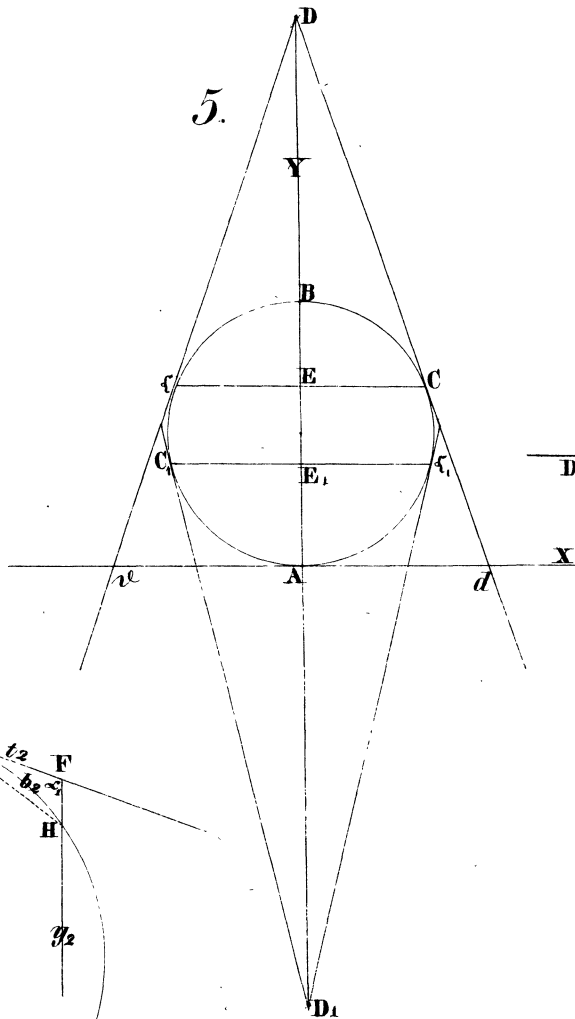
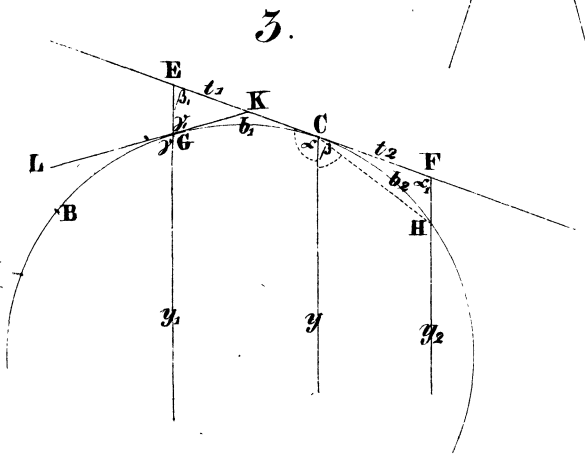
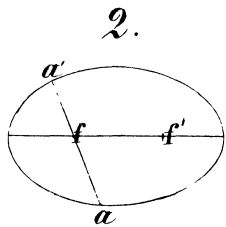
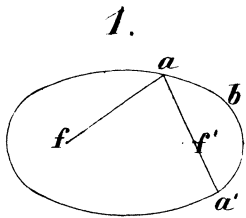
$$\frac{\rho}{\rho'} - x = \Delta x$$

angenommen wird, so hat man, mit Zuziehung der Gleichung (a.),

$$\Delta x = \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}.$$

Die von *Lagrange* durch λ und Λ angedeuteten Grenzwerte von x liegen im Allgemeinen nicht so nahe dem wahren Werthe von x als der Bruch $\frac{\rho}{\rho'}$. Die aus denselben für x entspringenden Fehler sind daher größer als der eben gefundene Bruch $\frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}$, und dieser Bruch ist endlich größer als der Bruch in der Ungleichheit (d.). Daher kann vom Statthaben der Ungleichheit (d.) bei der Annahme $x = \lambda$ oder $x = \Lambda$ um so weniger die Rede sein.

Zürich den 1. Mai 1837.



Inhaltsverzeichnis des zweiten Hefts siebenzehnten Bandes.

8. Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen. Von Herrn Prof. C. G. J. Jacobi zu Königsberg in Preussen. Seite 97
9. Recherches analytiques sur les expressions du rapport de la circonférence au diamètre trouvées par Wallis et Brounker; et sur la théorie de l'intégrale Eulérienne $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x)^q$. Par Mr. Jean Planas. (Suite du No. 1, dans le cahier précédent.) — 163