Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten.

Von

A. Voss in Dresden.

Fast gleichzeitig haben die Herren Christoffel*) und Lipschitz, freilich von sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus und in verschiedener Allgemeinheit, sich mit der Theorie der homogenen Differentialausdrücke beschäftigt, über welche bereits Riemann, wie aus dessen später veröffentlichten Werken hervorgeht, ein fundamentales Theorem gekannt hatte. Insbesondere hat Herr Lipschitz unter den allgemeinsten Voraussetzungen die Beziehungen untersucht, welche stattfinden, wenn ein homogener Differentialausdruck von n unabhängigen Variabelen x durch Einführung von n neuen Variabelen y, für welche m willkürliche Gleichungen $y_\alpha = \text{const}$ bestehen, in einen anderen transformirt wird. Herr Lipschitz hat sich dabei vornehmlich derjenigen Analogien bedient, welche sich aus einer Verallgemeinerung gewisser der Variationsrechnung angehörigen Transformationsprincipien Lagrange's ergeben. Ich habe die Transformation eines quadratischen Differentialausdruckes im Folgenden durch directe Rechnungen bewerkstelligt, und wie ich glaube, die Integrabilitätsbedingungen in einer vollständigeren Form ausgesprochen, als dies bisher geschehen war.**)

Diese Betrachtungen bilden den ersten Theil der vorliegenden Arbeit. Im zweiten Theile (§ III.—VI.) habe ich auf Grund der entwickelten Formeln versucht, die Theorie der Krümmung im gewöhnlichen Raume, wie sie von Monge und Gauss entwickelt worden ist, wenigstens in ihren Hauptgesichtspunkten auf möglichst naturgemässe Weise für höhere Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Es ist

*) Christoffel: Die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Crelle's Journal Bd. 70.

**) Von Herrn Beez ist neuerdings der Fall $m = n$ ebenfalls direct untersucht worden, Schlömilchs Zeitschrift Bd. 24.

dies freilich schon von Herrn Lipschitz auf Grund von Analogien geschehen, welche die analytische Mechanik darbietet; doch schien es mir im geometrischen Sinne erwünscht, die Krümmungstheorie von diesen gänzlich loszulösen.

Anmerkung:

Die völlige Coincidenz meiner Betrachtungen mit den Vorstellungen, welche Herr Lipschitz in einem Theile seiner ausgezeichneten Arbeiten entwickelt hat, ist mir in Folge verschiedenartiger Bezeichnung erst deutlich geworden, als es mir gelang, das von demselben auf pag. 292 Crelles Journal Bd. 71 ausgesprochene Theorem über den Zusammenhang zweier quadrilinearen Formen direct zu beweisen. Ich verweise hier auf die Arbeiten des Herrn Lipschitz:

1) Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen.
2) Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. Crelle's Journal Bd. 71. Erste Mittheilung pag. 274, zweite Mittheilung pag. 288.
3) Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. Crelle's Journal Bd. 72.
4) Ueber ein Problem der Variationsrechnung etc. Crelle's Journal Bd. 74.
5) Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. Crelle's Journ. Bd. 78.
6) Beitrag zur Theorie der Krümmung. Crelle's Journal Bd. 81, p. 230, sowie Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface, ebenda, pag. 295.

Nach Aufstellung des Begriffes der Krümmung eines Normalschnittes, der Hauptkrümmungshalbmesser und des Krümmungsmasses einer Fläche, behandle ich insbesondere die Frage, die meines Wissens bisher noch nicht aufgeworfen worden ist, unter welchen Umständen in einem Raume Schaaren von Ebenen oder Kugeln vorhanden sein können. Es kann dies, allgemein zu reden, nur dann stattfinden, wenn eine mehrfach in Differentialen lineare Covariante verschwindet. Ein hervorragendes Beispiel für diesen Fall bilden die Mannigfaltigkeiten constanter Riemann'scher Krümmung. Für diese bleibt die Monge'sche Definition der Krümmungslinien in Gültigkeit, sowie der Gauss'sche Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses bei beliebigen Biegungstransformationen.

Im § V. habe ich die Theorie der Developpabelen behandelt, namentlich gezeigt, dass im Raume von drei Dimensionen das Verschwinden des Gauss'schen Krümmungsmasses einer Fläche bedingt, dass dieselbe nach Analogie der Developpabelen des gewöhnlichen Raumes aus geodätischen Linien des Raumes zusammengesetzt ist. Auch bei beliebiger Zahl der Dimensionen behält das Verschwinden des Gauss'schen Krümmungsmasses eine interessante Bedeutung.

Endlich habe ich eine Transformation des Krümmungsmasses, welche die vorhergehenden Betrachtungen ergänzt, sowie eine Erweiterung des Begriffes der Hesse'schen Determinante angegeben, durch welche die letztere die Eigenschaft erhält, bei beliebigen Transformationen eine Covariante zu sein.

§ I.

In einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen M_n, deren Punkte durch die Coordinaten $x_1, x_2, \cdots x_n$ dargestellt werden, sei das Quadrat der Entfernung ds zweier unendlich naher Punkte x, $x + dx$ ausgedrückt durch die Gleichung:

$$ds^2 = \Sigma c_{ik}\, dx_i\, dx_k, \text{*)} \tag{1}$$

in welcher die $c_{ik} = c_{ki}$ beliebige Functionen der x sind, deren Determinante nicht verschwindet. Ueber die quadratische Form

$$F = \Sigma c_{ik} X_i X_k \tag{2}$$

zu welcher ds gehört, sollen keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden. Um in Uebereinstimmung mit bekannten geometrischen Vorstellungen zu bleiben, wird es sich allerdings empfehlen, die Form F als *definit* vorauszusetzen; doch kommt, ausser wo dies ausdrücklich hervorgehoben ist, diese Eigenschaft im Folgenden nicht in Betracht. Wird nun durch $n - m$ Gleichungen zwischen den x:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \cdots \varphi_{n-m} = 0, \tag{3}$$

welche durch das System der m independenten Variabeln:

$$u_1, u_2, \cdots u_m$$

identisch befriedigt sind, so dass die Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0, \tag{4}$$

$$\sum \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_l}{\partial u_r} + \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_s \partial u_r} = 0, \quad \text{u. s. w.} \tag{5}$$

für alle:

---

*) Hier, wie überall im Folgenden, beziehen sich vorgesetzte Summationszeichen immer *gleichzeitig auf alle diejenigen Indices, welche doppelt unter denselben auftreten.*

$$i = 1, 2, \cdots n - m,$$
$$r, s = 1, 2, \cdots m$$

bestehen, eine m-fache Mannigfaltigkeit M_m aus der M_n ausgeschieden, so ist das Quadrat des Längenelementes in dieser:

$$ds^2 = \Sigma a_{st}\, du_s\, du_t \tag{6}$$

mit der quadratischen Form:

$$\Phi = \Sigma a_{rs}\, U_s\, U_t \tag{7}$$

wobei:

$$a_{ts} = a_{st} = \sum c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial x_k}{\partial u_t}. \tag{8}$$

Setzt man ferner:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{st}}{\partial u_r} - \frac{\partial a_{rt}}{\partial u_s} + \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_t} &= 2 a_{rts}, \\ \frac{\partial c_{mi}}{\partial x_k} - \frac{\partial c_{mk}}{\partial x_i} + \frac{\partial c_{ik}}{\partial x_m} &= 2 c_{mki}, \end{aligned} \tag{9}$$

wobei wegen $a_{rts} = a_{trs}$, $c_{mki} = c_{kmi}$, die ersten Indices vertauschbar sind*), so ist:

$$a_{rst} = \sum c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_r \partial u_t} + \sum c_{mki} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial x_k}{\partial u_t} \frac{\partial x_m}{\partial u_r}. \tag{10}$$

Ferner sei die Determinante der c_{ik} durch δ, ihre ersten Unterdeterminanten durch γ_{ik}, die Determinante der a_{ik} durch Δ, die ersten negativen Unterdeterminanten derselben durch e_{ik} bezeichnet. Setzt man noch:

$$\sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} \gamma_{rk} = q_{ik}, \tag{11}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_m} & \frac{\partial x_2}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \\ q_{11} & q_{12} & & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ q_{m1} & q_{m2} & & q_{mn} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

ferner:

$$b_{ij} = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \gamma_{mn} = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} q_{jm} = \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} q_{im} \tag{13}$$

und führt man für die $n - m$-reihige Determinante der b_{ik} die Be-

---

*) Von den Herren Lipschitz und Dedekind sind diese Bildungen durch a_{srt} bezeichnet. Vgl. Riemann's Werke, herausgegeben von Weber, insbesondere die Erläuterungen von Herrn Dedekind.

zeichnung Δ'' ein, so hat man die, vermöge der Gleichungen (4) und der bekannten Relation

$$\frac{1}{\delta}\sum \gamma_{ik}\, c_{il} = [kl],$$

in welcher das Zeichen $[kl]$ für $k = l$ den Werth 1 haben soll, sonst aber gleich Null zu nehmen ist, leicht zu erweisende Gleichung:

$$\delta D^2 = \delta^{n-m} \Delta \Delta''. \tag{14}$$

Hieraus geht hervor: *So lange die Determinanten D, δ, wie vorauszusetzen ist, nicht verschwinden, können auch Δ und Δ'' nicht verschwinden.*

Wir führen ferner ein System von $(n-m)n$ Grössen λ_{jl}, in welchen der erste Index j von 1 bis $n-m$, der zweite l von 1 bis n gehen soll, durch die folgenden Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} \Sigma b_{j1}\, \lambda_{jl} &= q_{1l}, \\ \Sigma b_{j2}\, \lambda_{jl} &= q_{2l}, \\ &\vdots \\ \Sigma b_{j\,n-m}\, \lambda_{jl} &= q_{n-m\,l}. \end{aligned} \tag{15}$$

Werden die Unterdeterminanten der b_{ij} durch ε_{ij} bezeichnet, so erhält man als Auflösung der Gleichungen (15):

$$\Delta''\lambda_{jl} = \Sigma \varepsilon_{ij}\, q_{il}, \tag{16}$$

also auch:

$$\Sigma \lambda_{jl}\, q_{js} = \Sigma \lambda_{js}\, q_{jl} \tag{17}$$

und zugleich die folgenden Identitäten:

$$\Delta'' \sum \lambda_{jl}\, \lambda_{j'l'}\, c_{ll'} = \delta\, \varepsilon_{jj'}, \tag{18}$$

$$\sum \lambda_{jl} \frac{\partial \varphi_{j'}}{\partial x_l} = [jj'], \tag{19}$$

$$\sum \lambda_{jl}\, c_{lm} \frac{\partial x_m}{\partial u_r} = 0. \tag{20}$$

Setzt man endlich noch:

$$C_{rts} = \sum c_{mkt} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial x_k}{\partial u_t} \frac{\partial x_m}{\partial u_r}, \tag{21}$$

also nach (10):

$$\sum c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_r \partial u_t} = a_{rts} - C_{rts}, \tag{22}$$

ferner:

$$\sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_r \partial u_t} = B_{rti}, \tag{23}$$

so hat man aus den n Gleichungen (22) und (23) als Werthe der zweiten Differentialquotienten der x nach den u:

$$(\mathrm{A}) \qquad -\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_r \partial u_t} = \sum B_{rti}\lambda_{ik} - \frac{1}{\Delta}\sum (a_{rtm} - C_{rtm}) e_{mn} \frac{\partial x_k}{\partial u_n}$$

wobei noch die aus (5) folgende Gleichung:

$$(24) \qquad -B_{rti} = \sum \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_m \partial x_n} \frac{\partial x_m}{\partial u_r} \frac{\partial x_n}{\partial u_t}$$

zu bemerken ist.

Man kann der Formel (A) eine andere Gestalt geben, welche für die folgenden Differentiationen ein wenig bequemer ist. Dazu ist es nöthig eine Identität abzuleiten, welche auf der Betrachtung der mit beliebigen Grössen u_i, v_k geränderten Determinante:

$$(25) \qquad \Delta' = -\Sigma \gamma_{ik} u_i v_k$$

hervorgeht.

Man erhält nämlich durch geeignete Multiplication und Reduction mit Hülfe der Gleichungen (4), (15):

$$\Delta' D^2 = -\Delta \delta^{n-m-1} \Delta'' \sum u_r v_s \lambda_{jr} q_{js} + \Delta'' \delta^{n-m} \sum u_m v_n \frac{\partial x_m}{\partial u_{n'}} \frac{\partial x_n}{\partial x_{m'}} e_{m'n'},$$

und wenn für D^2 aus (14) sein Werth $\delta^{n-m-1}\Delta\Delta''$ eingesetzt wird:

$$(26) \quad -\frac{1}{\delta}\sum \gamma_{rs} u_r v_s = -\frac{1}{\delta}\sum u_r v_s \lambda_{jr} q_{js} + \frac{1}{\Delta}\sum u_r v_s \frac{\partial x_r}{\partial u_{n'}} \frac{\partial x_s}{\partial u_{m'}} e_{m'n'},$$

also zunächst durch Gleichsetzen der Coefficienten der Producte $u_r v_s$:

$$(27) \qquad -\frac{1}{\delta}\gamma_{rs} = -\frac{1}{\delta}\sum \lambda_{jr} q_{js} + \frac{1}{\Delta}\sum \frac{\partial x_r}{\partial u_{n'}} \frac{\partial x_s}{\partial u_{m'}} e_{m'n'},$$

ferner, wenn $u_r = c_{ikr} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_p} \dfrac{\partial x_k}{\partial u_q}$ genommen wird, durch Vergleichung der Coefficienten von v_s:

$$(28) \quad -\sum \frac{\gamma_{rs}}{\delta} c_{ikr} \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_q} = -\frac{1}{\delta}\sum \lambda_{jr} q_{js} \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_q} c_{ikr}$$
$$+ \frac{1}{\Delta}\sum e_{mn} \frac{\partial x_s}{\partial u_n} C_{pqn}.$$

Führt man den durch (28) bestimmten Ausdruck für die C_{pqn} in die Gleichung (A) ein, so ergiebt sich, wenn man noch (27) zur Anwendung bringt:

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_r \partial u_t} = \sum \Omega_{rtj} \lambda_{jk} - \frac{1}{\Delta}\sum a_{rtm} e_{mn} \frac{\partial x_k}{\partial u_n}$$
$$-\frac{1}{\delta}\sum \gamma_{hk} c_{ihn} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_h}{\partial u_t},$$

in welcher Formel zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(29)\qquad \Omega_{rtj} = B_{rtj} + \frac{1}{\delta}\sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m}\,\gamma_{mn}\,\frac{\partial x_{m'}}{\partial u_r}\,\frac{\partial x_{n'}}{\partial u_t}\,c_{m'n'n}.$$

Die Werthe der Ω_{rtj} spielen im Folgenden eine wichtige Rolle. Sie erscheinen besonders bemerkenswerth, *weil sie bei beliebigen Transformationen der Variabelen x in ein System von n neuen Variabelen y, also bei beliebigen Transformationen der M_n, absolute Covarianten sind,* d. h. ohne jeden Factor in die entsprechenden Formen übergehen, die aus den y gebildet sind. Man kann, obwohl bei der weiter unten hervortretenden Bedeutung der Ω_{rtj} dieser invariante Charakter zu erwarten steht, dies auf folgendem Wege erweisen.

Es sei die bei Zugrundelegung der Variabeln y gebildete Function:

$$\Omega'_{stj} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k}\,\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_s \partial u_t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n}\,\frac{\gamma'_{mn}}{\delta'}\,\frac{\partial y_i}{\partial u_s}\,\frac{\partial y_l}{\partial u_t}\,c'_{lik},$$

wo $c'_{il} = \sum c_{hk}\frac{\partial x_h}{\partial y_i}\,\frac{\partial x_k}{\partial y_l}$ und die δ', γ'_{mn} die entsprechenden Determinanten und Unterdeterminanten der c'_{ik} bedeuten. Bezeichnet man die Transformationsdeterminante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

durch T, so ist:

$$\delta T^2 = \delta',$$

ferner hat man aus:

$$T^2 \sum \gamma_{mn} v_m u_n = \sum \gamma'_{mn}\,\frac{\partial x_r}{\partial y_n}\,\frac{\partial x_s}{\partial y_m}\,v_r u_s$$

$$\frac{\gamma'_{mn}}{\delta'} = \sum \frac{\gamma_{m'n'}}{\delta}\,\frac{\partial y_n}{\partial x_{m'}}\,\frac{\partial y_m}{\partial x_{n'}},$$

$$c'_{ilm} = \sum c_{sk}\,\frac{\partial x_s}{\partial y_m}\,\frac{\partial^2 x_k}{\partial y_l \partial y_i} + \sum c_{hks}\,\frac{\partial x_s}{\partial y_m}\,\frac{\partial x_h}{\partial y_i}\,\frac{\partial x_k}{\partial y_l}.$$

Berücksichtigt man noch die Gleichungen:

$$\frac{\partial x_l}{\partial u_s} = \sum \frac{\partial x_l}{\partial y_k}\,\frac{\partial y_k}{\partial u_s},$$

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_s \partial u_t} = \sum \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_k \partial y_m}\,\frac{\partial y_m}{\partial u_t}\,\frac{\partial y_k}{\partial u_s} + \sum \frac{\partial x_l}{\partial y_k}\,\frac{\partial^2 y_k}{\partial u_s \partial u_t},$$

so findet man leicht, wenn die Werthe der γ'_{mn}, c'_{lim} eingesetzt werden:

$$\Omega'_{stj} = \Omega_{stj},$$

wie gezeigt werden sollte.

Da die Gleichungen $b_{ij} T^2 = b'_{ij}$ bestehen, so sind auch die b_{ij} covariante Formen. Dagegen sind die λ_{jk} nicht covariant, doch findet die sehr einfache Beziehung statt, dass bei beliebigen Transformationen der m_n die neuen Grössen λ'_{jk} mit den alten durch die Formeln:

$$\lambda_{jl} = \sum \lambda'_{jm} \frac{\partial x_l}{\partial y_m}$$

verbunden sind.

Wir entwickeln endlich noch einige Formeln, die in den folgenden Rechnungen besonders häufig zur Anwendung kommen werden, nämlich die Werthe der Differentialquotienten der γ_{ki} und λ_{jk}.

Da:

$$\sum \frac{\gamma_{hk}}{\delta} c_{hs} = [ks],$$

so ist

$$\sum \frac{\partial \left(\frac{\gamma_{hk}}{\delta}\right)}{\partial u_t} c_{hs} = - \sum \frac{\gamma_{hk}}{\delta} \frac{\partial c_{hs}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_t},$$

oder, wenn mit $\gamma_{ss'}$ multiplicirt und nach s summirt wird:

$$\frac{\partial \frac{\gamma_{hk}}{\delta}}{\partial u_t} = - \frac{1}{\delta^2} \sum \gamma_{mk} \gamma_{sh} \frac{\partial c_{ms}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_t}, \tag{30}$$

wobei man noch, wie aus (9) hervorgeht, setzen kann:

$$\frac{\partial c_{ms}}{\partial x_l} = c_{lms} + c_{lsm}. \tag{31}$$

Eine ganz analoge Formel gilt auch für die Differentialquotienten der a_{st}, während aus (30) wird:

$$\frac{\partial \frac{e_{mn}}{\Delta}}{\partial u_t} = + \frac{1}{\Delta^2} \sum e_{mk} e_{nh} \frac{\partial a_{kh}}{\partial u_t}. \tag{32}$$

Die Differentialquotienten der λ_{jk} bestimmt man aus den Gleichungen (19) und (20), d. h. aus dem folgenden System:

$$\sum \frac{\partial \lambda_{jl}}{\partial u_t} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} + \sum \lambda_{jl} \frac{\partial}{\partial u_t} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} \right) = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \lambda_{jl}}{\partial u_t} \frac{\partial \varphi_{n-m}}{\partial x_l} + \sum \lambda_{jl} \frac{\partial}{\partial u_t} \left(\frac{\partial \varphi_{n-m}}{\partial x_l} \right) = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \lambda_{jl}}{\partial u_t} c_{ln} \frac{\partial x_n}{\partial u_1} + \sum \lambda_{jl} \frac{\partial c_{ln}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_t} \frac{\partial x_n}{\partial u_1} + \sum \lambda_{jl} c_{ln} \frac{\partial^2 x_n}{\partial u_1 \partial u_t} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \lambda_{jl}}{\partial u_t} c_{ln} \frac{\partial x_n}{\partial u_m} + \sum \lambda_{jl} \frac{\partial c_{ln}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_t} \frac{\partial x_n}{\partial u_m} + \sum \lambda_{jl} c_{ln} \frac{\partial^2 x_n}{\partial u_m \partial u_t} = 0,$$

so dass also:

$$\frac{\partial \lambda_{jr}}{\partial u_t} = -\sum \lambda_{jl}\, \lambda_{ir} \frac{\partial}{\partial u_t} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}\right) + \frac{1}{\Delta} \sum \lambda_{jl}\, c_{ml} \frac{\partial x_r}{\partial u_{h'}}\, e_{hh'} B_{xhj'} \lambda_{j'm}$$
$$+ \frac{1}{\Delta} \sum \lambda_{jl} e_{hh'} \frac{\partial x_k}{\partial u_t} \frac{\partial x_m}{\partial u_h} \frac{\partial x_r}{\partial u_{h'}} \frac{\partial c_{ml}}{\partial x_k},$$

wobei die aus (A) sich ergebende Relation:

$$\sum \lambda_{jl} c_{ln} \frac{\partial^2 x_n}{\partial u_h \partial u_t} = \sum \lambda_{jl} c_{ln} B_{htj'} \lambda_{j'n}$$

zur Anwendung kommt, um die zweiten Differentialquotienten der x zu entfernen.

§ II.

Herleitung der Integrabilitätsbedingungen.

Die Formeln (B) kann man als eine Reihe von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ansehen, welche bestehen müssen, wenn die Massbestimmung in der M_m, wie sie durch die Form Φ gegeben ist, aus der allgemeineren Massbestimmung in einem höheren Raume M_n mit der zugehörigen Form F hergeleitet werden kann. Zum Bestehen der Differentialgleichungen (B) sind die Integrabilitätsbedingungen erforderlich, welche durch die Bedingung der Vertauschbarkeit dritter Differentialquotienten sich ergeben. Es muss daher für alle r, s, p sein

$$(1) \qquad \frac{\partial \Omega_{rsj} \lambda_{jh}}{\partial u_p} - \frac{\partial \Omega_{psj} \lambda_{jh}}{\partial u_r} - \sum \frac{\partial}{\partial u_p} \left\{ \frac{1}{\delta} \gamma_{nh} c_{ikn} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \right\}$$
$$+ \sum \frac{\partial}{\partial u_r} \left\{ \frac{1}{\delta} \gamma_{nh} c_{ikn} \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \right\}$$
$$- \sum \frac{\partial}{\partial u_p} \left\{ \frac{1}{\Delta} a_{rsm} e_{mn} \frac{\partial x_k}{\partial u_n} \right\}$$
$$+ \sum \frac{\partial}{\partial u_r} \left\{ \frac{1}{\Delta} a_{spm} e_{mn} \frac{\partial x_h}{\partial u_n} \right\} = 0.$$

Der Uebersichtlichkeit halber bilden wir diese drei Differenzen gesondert. Zunächst hat man, wenn man die zweiten Differentialquotienten aus § I. (B) ersetzt, und § I. (31) beachtet:

$$(2) \qquad \frac{\partial \Omega_{rsj}}{\partial u_p} = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial^3 x_k}{\partial u_r \partial u_s \partial u_p} + \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial u_p} \left\{ \frac{\gamma_{mn}}{\delta} c_{kim} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \right\}$$
$$+ \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial u_p} \left[\Omega_{rsi} \lambda_{ik} - \frac{1}{\Delta} a_{rsm} e_{mn} \frac{\partial x_k}{\partial u_n} \right].$$

Multiplicirt man mit λ_{jh}, und addirt man dann

$$\Omega_{rsj}\frac{\partial\lambda_{jh}}{\partial u_p}=-\sum\lambda_{jl}\lambda_{il}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_l\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial u_p}\Omega_{rsj}$$
$$+\sum\frac{1}{\delta}\lambda_{jl}\lambda_{qh'}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}\Omega_{rsj}c_{lkm}\frac{\partial x_k}{\partial u_p}\frac{\partial x_m}{\partial u_q}$$
$$+\frac{1}{\Delta}\sum\lambda_{jl}e_{qh'}c_{ml}\lambda_{im}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}\Omega_{rsj}\Omega_{pqi},$$

so entsteht:

$$(3)\quad \frac{\partial\Omega_{rsj}\lambda_{jh}}{\partial u_p}=\sum\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\frac{\partial^3 x_k}{\partial u_r\partial u_s\partial u_p}\lambda_{jh}+\frac{1}{\Delta}\sum\lambda_{jl}e_{qh'}c_{ml}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}\lambda_{im}\Omega_{pqi}\Omega_{rsi}$$
$$+\frac{1}{\delta}\sum\lambda_{jl}e_{qh'}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}\Omega_{rsj}c_{lkm}\frac{\partial x_k}{\partial u_p}\frac{\partial x_m}{\partial u_q}$$
$$+\sum\lambda_{jh}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial u_p}\left\{\frac{\gamma_{mn}}{\delta}c_{ikm}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}\right\}$$
$$+\frac{1}{\Delta}\sum\lambda_{ih}a_{rsm}e_{mn}B_{npj}.$$

Ferner findet man nach gehöriger Entwickelung:

$$(4)\quad -\sum\frac{\partial}{\partial u_p}\left\{\frac{1}{\Delta}a_{rsm}e_{mn}\frac{\partial x_h}{\partial u_n}\right\}+\sum\frac{\partial}{\partial u_p}\left[\frac{1}{\Delta}a_{spm}e_{mn}\frac{\partial x_h}{\partial u_n}\right]$$
$$=-\frac{1}{\Delta}\sum\lambda_{jh}e_{mn}\left(a_{srm}\Omega_{npj}-a_{spm}\Omega_{rnj}\right)$$
$$+\frac{1}{\delta\Delta}\sum\lambda_{hn}c_{ikn}e_{mn'}\frac{\partial x_k}{\partial u_{n'}}\left(a_{srm}\frac{\partial x_i}{\partial u_p}-a_{spm}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\right)$$
$$-\frac{1}{\Delta}e_{m'n'}\frac{\partial x_h}{\partial u_{n'}}[srm'p]_a,$$

wo:

$$(5)\quad [srm'p]_a=\frac{\partial a_{srm'}}{\partial u_p}-\frac{\partial a_{spm'}}{\partial u_r}+\sum\frac{e_{mn}}{\Delta}\left\{a_{srm}a_{m'pn}-a_{spm}a_{m'rn}\right\}.$$

Ebenso findet man:

$$(6)\quad -\sum\frac{\partial}{\partial u_p}\left\{\frac{1}{\gamma}\gamma_{hn}c_{ikn}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}\right\}+\sum\frac{\partial}{\partial u_r}\left\{\frac{1}{\delta}\gamma_{nh}c_{ikn}\frac{\partial x_i}{\partial u_p}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}\right\}$$
$$=\frac{1}{\delta}\sum\gamma_{mh}c_{ilm}\lambda_{jl}\left(\Omega_{rsj}\frac{\partial x_i}{\partial u_p}-\Omega_{spj}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\right)$$
$$+\frac{1}{\delta\Delta}\sum e_{mn'}\frac{\partial x_k}{\partial u_{n'}}\gamma_{hn}c_{ikn}\left(a_{spm}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}-a_{srm}\frac{\partial x_i}{\partial u_p}\right)$$
$$+\frac{1}{\delta}\sum\gamma_{mh}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_p}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}[lkmi]_c,$$

wo, analog wie bei (5):

$$(7)\quad [lkmi]_c = \frac{\partial c_{lkm}}{\partial x_i} - \frac{\partial c_{ikm}}{\partial x_l} - \sum \frac{\gamma_{s'm'}}{\delta}\left(c_{kls'}\, c_{imm'} - c_{iks'}\, c_{lmm'}\right)$$

gesetzt worden ist. Führt man den aus (4) bestimmten Ausdruck rechts in (3) ein, so entsteht:

$$\text{(A)}\quad \frac{\partial \Omega_{srj}\lambda_{jh}}{\partial u_p} - \frac{\partial \Omega_{spj}\lambda_{jh}}{\partial u_r} = \frac{1}{\Delta}\sum \lambda_{jl}\lambda_{im} c_{lm} e_{qh'} \frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}\left(\Omega_{pqi}\Omega_{rsj} - \Omega_{rqi}\Omega_{sqj}\right)$$

$$+\frac{1}{\delta}\sum \lambda_{jh}\frac{e_{mn}}{\Delta}\left(a_{srm}\Omega_{npj} - a_{spm}\Omega_{rnj}\right)$$

$$-\frac{1}{\delta}\sum \gamma_{hm}\lambda_{jl} e_{lim}\left(\Omega_{rsj}\frac{\partial x_i}{\partial u_p} - \Omega_{spj}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\right)$$

$$-\frac{1}{\delta}\sum \gamma_{mh}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_{h'}}\lambda_{jh}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_p}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}[lkmi]_c.$$

Addirt man jetzt die Gleichungen (4), (6) und (A), so entsteht:

$$0 = \sum \lambda_{jl}\lambda_{im}c_{lm}\frac{e_{qh'}}{\Delta}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}\left(\Omega_{pqi}\Omega_{rpi} - \Omega_{rqi}\Omega_{spj}\right)$$

$$-\sum \frac{e_{m'n'}}{\Delta}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}[srm'p]_a$$

$$+\sum \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_p}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}\frac{\partial x_m}{\partial u_q}[lkmi]_c e_{qh'}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}.$$

Endlich entsteht hieraus durch Multiplication mit $\sum c_{hr}\frac{\partial x_r}{\partial u_t}$ und Summation nach h die wichtige Formel

$$\text{(B)}\quad [srtp]_a = \sum \lambda_{jl}\lambda_{im}c_{lm}\left(\Omega_{ptj}\Omega_{rsj} - \Omega_{rti}\Omega_{spj}\right)$$

$$+\sum \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_p}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}\frac{\partial x_m}{\partial u_t}[lkmi]_c,$$

so dass die vorhergehende Formel dadurch erfüllt wird, dass alle Coefficienten der $e_{qh'}\frac{\partial x_h}{\partial u_{h'}}$ verschwinden.

Die beiden Formeln (A) und (B), zu denen man noch (4) und (6) hinzunehmen kann, stellen in einer vollständigeren Form die Bedingungen der Integrabilität dar, als sie bis jetzt gegeben wurden. Die Gleichungen (B) sind zuerst für den Fall $m = n$ von Riemann, dann von den Herren Christoffel und Lipschitz, und später von Letzterem für ein beliebiges m in Gestalt einer Identität zwischen zwei quadrilinearen Covarianten entwickelt. Insbesondere hat Herr Lipschitz gezeigt, — wie dies auch früher schon von Riemann behauptet worden war — dass das identische Verschwinden der Ausdrücke $[lkmi]_c$ die Bedingungen dafür ausspricht, dass die quadratische Form F in eine solche mit constanten Coefficienten, also das Quadrat des Längenelementes in der M_n in die Form Σdx_i^2 transformirt werden kann*). Die Formeln (A) sind bislang für den allgemeinen Fall noch nicht entwickelt worden; sie entsprechen den bekannten Differentialgleichungen für die E, F, G, welche Gauss in seinen *disquisitiones generales circa superficies curvas* gegeben hat.

Es verdient der Umstand hervorgehoben zu werden, dass in (A) und (B) *die Ω_{rsj} nur in den Verbindungen $\Sigma\Omega_{rsj}\lambda_{jh}$ vorkommen.* Aber die letzteren Grössen, welche der Kürze halber durch Γ_{rsh} bezeichnet werden sollen, *sind nicht von einander unabhängig.* Denn es gelten die Relationen:

$$\sum \Gamma_{pqh}\, e_{jh} \frac{\partial x_j}{\partial u_s} = 0,$$

$$\sum \Gamma_{pqh} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} = \Omega_{pqj},$$

in Folge deren jede n reihige Determinante, welche aus r Reihen von $\Gamma_{p^1q^11}, \Gamma_{p^1q^12} \cdots \Gamma_{p^1q^1n}$; $\Gamma_{p^2q^21}, \Gamma_{p^2q^22}, \cdots$; $\Gamma_{p^rq^r1} \cdots \Gamma_{p^rq^rn}$ gebildet ist und $n - r$ ganz willkürliche Reihen enthält, verschwindet, sobald $n - r < m$ ist, dagegen für $n - 1 = m$ gleich der Determinante der gleichnamigen $\Omega_{pq1}, \cdots \Omega_{pqn}$ wird, multiplicirt mit einem von den Ω unabhängigen Factor. *Sonach verschwinden die sämmtlichen $k < m$ reihigen Determinanten, welche sich aus den Γ bilden lassen.*

Die Zahl der Gleichungen (B), welche von einander linear unabhängig sind, ist, wie aus den bereits angeführten Untersuchungen bekannt ist, $\frac{1}{12} m^2 (m^2 - 1)$. Die Gleichungen (A) gestatten dieselben Reductionen, wonach ihre Zahl zunächst $\frac{1}{12} nm^2(m^2 - 1)$ sein würde.

Aber es bestehen, worauf hier noch aufmerksam gemacht werden soll, noch andere lineare Relationen zwischen den Gleichungen (A). Differenziirt man nämlich die Gleichungen (A) oder (B), und ersetzt dabei wieder die zweiten Differentialquotienten nach § I. (B), so erhält man weitere Bedingungen der Transformirbarkeit der Form F in Φ, die *Transformationsrelationen* des Herrn Christoffel. Diese Relationen werden im Allgemeinen mehr als vierfach linear in ersten Differentialquotienten der x werden, doch kann man aus ihnen Gleichungen zusammensetzen, welche zeigen, wie *die Formeln* (A) *und* (B) *sich zum Theil gegenseitig bedingen.* Die betreffende, etwas umständliche Rechnung möge wenigstens an der Formel (B) angedeutet werden.

---

*) Journal von Crelle 70, Seite 89 ff.

Wir bezeichnen die linke Seite der Gleichung:

$$(8)\qquad [rtmp]_a - \sum [lkhi]_c \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_p}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}\frac{\partial x_h}{\partial u_m} - \sum c_{lh}(\Gamma_{pml}\Gamma_{srh} - \Gamma_{rmh}\Gamma_{spl}) = 0$$

durch H_{rtmp}, ihre einzelnen Theile der Reihe nach durch (a), (b), (c). Wir differenziren (8) nach u_q und fügen zu derselben die analogen Gleichungen hinzu, welche entstehen, wenn man die Buchstaben p, q, r *cyklisch* (also in q, r, p; r, p, q) vertauscht. Es entspringen nun aus (a) Glieder mit zweiten Differentialquotienten der a_{pqr}; diese heben sich gegenseitig auf. Ferner Glieder mit ersten Differentialquotienten, diese lassen sich zu einer sechsgliedrigen Gruppe:

$$\frac{1}{\Delta}\sum e_{m'n'}\left[a_{npn'}\left(\frac{\partial a_{srm'}}{\partial u_q} - \frac{\partial a_{sqm'}}{\partial u_r}\right) + a_{srm'}\left(\frac{\partial a_{mpu}}{\partial u_q} - \frac{\partial a_{qmu'}}{\partial u_p}\right) + \cdots\right]$$

zusammenziehen. Ersetzt man hier die Differenzen nach der Formel (5), so entspringen Glieder von der Form α:

$$\frac{1}{\Delta}\sum e_{l'n'}a_{mpn'}\left[[lkhi]_c \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_q}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}\frac{\partial x_h}{\partial u_{l'}} + c_{lh}(\Gamma_{qm'l}\Gamma_{srh} - \Gamma_{rm'l}\Gamma_{sqh})\right]$$

und von der folgenden

$$-\frac{1}{\Delta^2}\sum e_{ln'}a_{mpn'}(a_{srm'}a_{l'ql} - a_{sqm'}a_{l'rl})\,e_{lm'},$$

welche letzteren sich gegen eine dritte bei der Differentiation von (a) auftretende, aus den Factoren $\frac{e_{m'n'}}{\Delta}$ entspringende, Gruppe aufheben. Wird jetzt am zweiten Term (b) von H die Differentiation ausgeführt, so zerstören sich die Glieder mit zweiten Differentialquotienten der c_{ikl}, von den zweiten Differentialquotienten der x_i kommen ebenso nur die Glieder

$$-\sum [lkhi]_c \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_s}\left\{\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_s \partial u_q}\frac{\partial x_h}{\partial u_m} + \frac{\partial x_k}{\partial u_s}\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_m \partial u_q}\right\}$$

und ihre cyklisch entsprechenden in Betracht. Ersetzt man hier die zweiten Differentialquotienten der x, so entsteht die Gruppe β:

$$-\sum [lkhi]_c \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_l}{\partial u_p}\left(\frac{\partial x_h}{\partial u_m}\Gamma_{sqk} + \frac{\partial x_k}{\partial u_s}\Gamma_{mqh}\right),$$

sowie die Gruppe γ:

$$+\sum [lkhi]_c \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} \frac{\partial x_h}{\partial u_m} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n''}} a_{sqm''} + \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_h}{\partial u_{n''}} a_{mqm''} \right\} \frac{e_{m''n''}}{\Delta},$$

endlich eine Gruppe von Gliedern, welche fünffach linear in ersten Differentialquotienten der x sind. Die letztere hebt sich aber identisch auf, wenn die aus der cyklischen Vertauschung folgenden Glieder hinzugezogen werden.

Es ist endlich noch (c) zu differenziren. Dabei entspringt aus der Differentiation von c_{lh} die Gruppe δ:

$$-\sum (c_{l'lh} + c_{l'hl}) \frac{\partial x_{l'}}{\partial u_q} (\Gamma_{pml} \Gamma_{srh} - \Gamma_{rmh} \Gamma_{psl}),$$

während die übrigen Terme sich zu der sechsgliedrigen Gruppe ε:

$$-\sum c_{lh} \left[\Gamma_{rmh} \left(\frac{\partial \Gamma_{sql}}{\partial u_p} - \frac{\partial \Gamma_{spl}}{\partial u_q} \right) + \Gamma_{pmh} \left(\frac{\partial \Gamma_{rsl}}{\partial u_q} - \frac{\partial \Gamma_{sql}}{\partial u_r} \right) + \cdots \right]$$

vereinigen. In dieser sind die Differenzen nach Formel (A) zu ersetzen. Nun folgt aus I. (27), wenn man mit c_{rt} multiplicirt und nach r summirt:

$$-[ts] = -\frac{1}{\delta} \sum \lambda_{jr} c_{rt} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \gamma_{sm} + \frac{1}{\Delta} \sum \frac{\partial x_r}{\partial u_{n'}} \frac{\partial x_s}{\partial u_{m'}} e_{m'n'} c_{rt}$$

und durch Multiplication mit λ_{it}

$$-\lambda_{is} = -\frac{1}{\delta} \sum \lambda_{jr} c_{rt} \lambda_{it} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \gamma_{sm},$$

oder:

$$\Gamma_{pqs} = \frac{1}{\delta} \sum \lambda_{jr} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \gamma_{sm} c_{rt} \Gamma_{pqt}.$$

Hieraus entspringt dann die Gleichung:

$$\sum \Gamma_{rmh} c_{lh} \left(\frac{\partial \Gamma_{sqh}}{\partial u_p} - \frac{\partial \Gamma_{sph}}{\partial u_q} \right)$$

$$= -\sum \Gamma_{rmh} c_{l'il} \left(\Gamma_{qsl'} \frac{\partial x_i}{\partial u_p} - \Gamma_{psl'} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} \right)$$

$$-\sum \Gamma_{rmm'} [l'km'i]_c \frac{\partial x_i}{\partial u_q} \frac{\partial x_{l'}}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_s}$$

$$+\sum c_{lh} \frac{e_{m'n'}}{\Delta} (\Gamma_{n'ph} a_{sqm'} - \Gamma_{qn'h} \Gamma_{spm'}) \Gamma_{rmh}.$$

Trägt man diese Werthe der Differenzen in der Gruppe ε ein, so entstehen drei neue Gruppen, von denen die erste sich mit der Gruppe δ, die zweite mit β aufhebt, so dass also nur eine Gruppe η:

$$\sum e_{lh} \frac{e_{m'n'}}{\Delta} \left(a_{sqm'} \Gamma_{n'ql} - a_{spm'} \Gamma_{n'ql}\right) \Gamma_{rmh} + \cdots$$

bleibt. Endlich heben sich die Gruppen α, γ, η gegen einander auf. Bezeichnet man jetzt die auf Null reducirte linke Seite der Gleichung (A) durch J_{rshp}, so folgt die *identische* Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_{rsmp}}{\partial u_q} + \frac{\partial H_{psmq}}{\partial u_r} + \frac{\partial H_{qsmr}}{\partial u_p} \\ &+ \sum \frac{1}{\Delta} e_{m'n'} \left(a_{mpn'} H_{rsm'q} + a_{srm'} H_{pmn'q} + a_{rmn'} H_{qsm'p} + a_{spm'} H_{qmn'r}\right. \\ &\qquad \left. + a_{qmn'} H_{psm'r} + a_{sqm'} H_{rmn'p}\right) \\ &- \sum c_{lh} \left(\Gamma_{rmh} J_{qslp} + \Gamma_{pmh} J_{rqlq} + \Gamma_{qmh} J_{pslr} + \Gamma_{srh} J_{pmlq}\right. \\ &\qquad \left. + \Gamma_{sph} J_{qmlr} + \Gamma_{sqh} J_{rmlp}\right) = 0. \end{aligned}$$

Eine ähnliche, weniger einfache Identität, welche die J, H gleichfalls linear und die Differentialquotienten der J in cyklischer Vertauschung enthält, ergiebt sich durch eine analoge Behandlung der Gleichung (A). *Werden also die Relationen $B = 0$ bereits als identisch für alle Werthe der u erfüllt vorausgesetzt, so liefert die obige Gleichung eine Reihe weiterer linearer Relationen für die Gleichungen* (A) *und umgekehrt.*

Indem ich mir vorbehalte, die allgemeinen Gleichungen (A), (B) auf Grund der vorausgeschickten Resultate weiter zu untersuchen, wende ich mich schliesslich zu dem *speciellen Falle, wo nur eine einzige Gleichung $\varphi = 0$ vorliegt*, wobei statt Ω_{rsl}, λ_{ll} einfach Ω_{rs}, λ_l zu setzen sein wird. Die Gleichungen (A) nehmen dann eine bedeutend einfachere Gestalt an. Um diese zu erhalten, setzen wir:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\gamma_{mn}}{\delta} = U, \tag{9}$$

$$\sum \lambda_m \lambda_n c_{mn} = \frac{1}{U}. \tag{10}$$

Da ferner:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial u_p} - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{\partial \frac{\gamma_{hk}}{\delta}}{\partial u_p}$$

$$= \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial u_p} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{\gamma_{hk}}{\delta} = U \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial u_p} \lambda_k,$$

so wird:

$$\frac{\partial \Omega_{rs}}{\partial u_p} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial u_p} \left\{ \frac{\gamma_{mn}}{\delta} c_{kim} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_s} \right\} + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial^3 x_k}{\partial u_r \partial u_s \partial u_p}$$
$$+ \sum \frac{1}{\Delta} a_{rsm} e_{mn} B_{np}$$
$$+ \sum \frac{\Omega_{rs}}{U} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial u_p} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{\partial \frac{\gamma_{hk}}{\delta}}{\partial u_p} \right),$$

oder:

$$\frac{\partial \frac{\Omega_{rs}}{\sqrt{U}}}{\partial u_p} = \frac{1}{\sqrt{U}} \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial u_p} \left\{ \frac{\gamma_{mn}}{\delta} c_{kim} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \right\}$$
$$+ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial^3 \varphi_k}{\partial u_r \partial u_s \partial u_l} \frac{1}{\sqrt{U}}$$
$$+ \Omega_{rs} \frac{\sqrt{U}}{2} \sum \lambda_m \lambda_n \frac{\partial c_{mn}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_p}$$
$$+ \sum \frac{1}{\Delta \sqrt{U}} a_{rsm} e_{mn} B_{np}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \frac{\Omega_{rs}}{\sqrt{U}}}{\partial u_p} - \frac{\partial \frac{\Omega_{ps}}{\sqrt{U}}}{\partial u_r} = \frac{\sqrt{U}}{2} \Omega_{rs} \sum \lambda_m \lambda_n \frac{\partial c_{mn}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_p}$$
$$- \frac{\sqrt{U}}{2} \Omega_{ps} \sum \lambda_m \lambda_n \frac{\partial c_{mn}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_r}$$
$$+ \frac{1}{\Delta \sqrt{U}} \sum a_{rsm} B_{np} - a_{psm} B_{nr}) e_{mn},$$
$$- \sqrt{U} \sum \lambda_m \lambda_h c_{lhm} \left(\Omega_{sr} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} - \Omega_{sp} \frac{\partial x_l}{\partial u_r} \right)$$
$$- \sum \frac{e_{mn'}}{\Delta \sqrt{U}} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n'}} c_{ikq} \frac{1}{\delta} \gamma_{nq} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \left(a_{spm} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} - a_{srm} \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \right)$$
$$- \frac{1}{\delta \sqrt{U}} \sum \gamma_{mn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} [lkmi]_c.$$

Man kann nun die erste und dritte Differenz zu:

$$- \frac{\sqrt{U}}{2} \sum \lambda_m \lambda_n \left\{ \Omega_{sr} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} - \Omega_{sp} \frac{\partial x_l}{\partial u_r} \right\} \left\{ \frac{\partial c_{lm}}{\partial x_n} - \frac{\partial c_{nl}}{\partial x_m} \right\},$$

welches identisch Null ist, die zweite und vierte dagegen zu:

$$\frac{1}{\Delta \sqrt{U}} \sum (a_{srm} \Omega_{np} - a_{psm} \Omega_{nr}) e_{mn}$$

zusammenziehen und erhält so die Gleichung:

$$(11)\quad \frac{\partial \frac{\Omega_{rs}}{\sqrt{U}}}{\partial u_p} - \frac{\partial \frac{\Omega_{ps}}{\sqrt{U}}}{\partial u_r} = \frac{1}{\Delta\sqrt{U}} \sum (a_{rsm}\Omega_{np} - a_{psm}\Omega_{nr}) e_{mn}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{U}} \sum \frac{\gamma_{mn}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} [lkmi]_c,$$

von der weiterhin eine wichtige Anwendung zu machen sein wird.

An Stelle der Gleichung $\varphi = 0$ kann man auch eine andere Bestimmungsweise der M_{n-1} einführen, welche im Folgenden ihre geometrische Erläuterung finden wird. Wir betrachten die $x_1 \cdots x_n$ als irgendwie bestimmte Functionen der $n-1$ Variabeln u und führen n Grössen p durch die folgenden n Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{aligned} &\sum c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} p_k = 0 \\ &\sum c_{ik} p_i p_k = 1 \end{aligned}$$

ein. Aus den Gleichungen (12) erhält man:

$$\varrho \sum \alpha_i p_i = \begin{vmatrix} \sum c_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \cdots & \sum c_{nk} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \\ \sum c_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \sum c_{nk} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n-1}} \\ \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Da ferner:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \\ \Sigma\alpha_s\gamma_{s1} & \cdots & \Sigma\alpha_s\gamma_{sn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum c_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \cdots & \sum c_{nk} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum c_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \sum c_{nk} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n-1}} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix},$$

so ist:

$$\varrho^2 \left(\sum p_i \alpha_i\right)^2 = \Delta \sum \alpha_s \alpha_k \gamma_{si} + \delta \sum \alpha_m \alpha_n \frac{\partial x_m}{\partial u_{m'}} \frac{\partial x_n}{\partial u_{n'}} e_{m'n'},$$

oder, da $\varrho^2 = \delta\Delta$ zu nehmen ist,

$$(13)\quad \sum (p_i \alpha_i)^2 = \frac{1}{\delta} \sum \alpha_s \alpha_k \gamma_{si} + \frac{1}{\Delta} \sum \alpha_m \alpha_n \frac{\partial x_m}{\partial u_{m'}} \frac{\partial x_n}{\partial u_{n'}} e_{m'n'}.$$

Differenzirt man ferner die Gleichungen (12), so erhält man:

$$\Delta \frac{\partial p_h}{\partial u_s} = \sum \left(\Omega_{ms} + p_i c_{lik} \frac{\partial x_k}{\partial u_m} \frac{\partial x_l}{\partial u_s} \right) l_{mn} \frac{\partial x_h}{\partial u_n}$$
$$- \Delta p_h \frac{1}{2} \sum p_i p_k \frac{\partial c_{ik}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_s}$$

oder, wenn man nach (13) die Producte der $p_h p_k$ einträgt und wieder einen identisch verschwindenden Theil fortlässt:

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial p_h}{\partial u_s} = - \sum \Omega_{ms} \frac{e_{mn}}{\Delta} \frac{\partial x_h}{\partial u_n} - \sum p_i c_{lik} \frac{\gamma_{hk}}{\delta} \frac{\partial x_l}{\partial u_s}.$$

Will man zu den Formeln (A), (B) übergehen, so ist zu setzen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \Sigma c_{ik} p_i, \quad \lambda_k = p_k, \quad U = \Sigma p_i p_k c_{ik} = 1,$$

so dass:

$$\text{(15)} \qquad \frac{\partial \Omega_{rs}}{\partial u_p} - \frac{\partial \Omega_{ps}}{\partial u_r} = \sum \frac{e_{mm'}}{\Delta} (a_{srm} \Omega_{m'p} - a_{spm} \Omega_{m'r})$$
$$+ \sum p_k \frac{\partial x_m}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_r} \frac{\partial x_h}{\partial u_s} [lhkm]_c,$$

$$\text{(16)} \quad [srqp]_a = (\Omega_{pq} \Omega_{sr} - \Omega_{rq} \Omega_{sp}) + \sum \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_t}{\partial u_q} [lkti]_c.$$

§ III.

Krümmung einer Mannigfaltigkeit.

Herr Lipschitz hat zuerst die Lehre von der Krümmung der Flächen auf die allgemeine Vorstellung der Massverhältnisse einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen übertragen, für welche die Hauptformeln in den beiden vorhergehenden Paragraphen durch directe Betrachtungen entwickelt sind. Herr Lipschitz hat sich dabei derjenigen Analogien bedient, welche durch Begriffe, die der analytischen Mechanik angehören, an die Hand gegeben werden. Ich werde im Folgenden zeigen, dass man, *von den geometrischen Betrachtungen ausgehend, auf denen die Lehre von der Krümmung der Flächen im gewöhnlichen Raume beruht, genau zu derselben Verallgemeinerung der Flächenkrümmung gelangt, wie sie von Herrn Lipschitz bereits entwickelt ist.*

Im gewöhnlichen Raume von 3 Dimensionen gilt bekanntlich das Folgende. In jedem nicht singulären Punkte P einer Fläche existiren zwei Haupttangenten, deren winkelhalbirende Tangenten die Richtungen der Krümmungslinien bestimmen. Ferner gilt für die Krümmung eines (Normal)schnittes die Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2\delta}{ds^2},$$

wo δ die Entfernung eines unendlich benachbarten Punktes P' auf dem (Normal)schnitte von der Tangente derselben in P, ds die Länge des Elementes PP', ϱ den Krümmungshalbmesser bedeutet, und die Maxima resp. Minima von ϱ entsprechen den Richtungen der Krümmungslinien. Ferner schneiden sich unendlich benachbarte Normalen der Fläche nur dann, wenn ihre Fusspunkte einer Krümmungslinie angehören, und bestimmen durch die Länge der auf ihnen entstehenden Abschnitte die zugehörigen Hauptkrümmungsradien (Fläche der Centra). Endlich sei hier noch an den Ausdruck erinnert, welchen Gauss als Krümmungsmass der Fläche bezeichnet hat, dessen Invarianteneigenschaft bei beliebigen Biegungstransformationen in den vorliegenden Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt.*)

Wenn diese Begriffe auf ein Gebiet von mehr Dimensionen unter Voraussetzung ganz willkürlicher Massverhältnisse übertragen werden sollen, so erscheint es naturgemäss, *an die Stelle der geraden Linien des gewöhnlichen Raumes die geodätischen Linien der M_n*, also an Stelle der Haupttangenten osculirende geodätische Linien zu setzen.

Dabei tritt dann der für die höheren Mannigfaltigkeiten charakteristische Umstand ein, dass neben der Mannigfaltigkeit der osculirenden geodätischen Linien noch eine *Reihe von Mannigfaltigkeiten von höher berührenden Curven* dieser Art vorhanden sein wird. Die genauere Untersuchung derselben, die für das Studium der allgemeinen Metrik im Raume von n Dimensionen vermöge einer Reihe covarianter Beziehungen, die nach Analogie bekannter geometrischer Gesichtspunkte sich von selbst darbieten, von fundamentaler Bedeutung sein dürfte, habe ich im § VI. zunächst auf die Betrachtung der *Berührung dritten Grades* ausgedehnt, hoffe aber, bei einer andern Gelegenheit dieselbe in verallgemeinerter und vereinfachter Gestalt wieder aufnehmen zu können.

Ich wende mich nun zunächst zur *Betrachtung der geodätischen Linien der M_n*.

Die geodätischen Curven der M_n, in welcher das Längenelement durch die Gleichung

$$ds = \sqrt{\Sigma c_{ik}\, dx_i\, dx_k}$$

---

*) Ueber die Unveränderlichkeit des weiter unten als Krümmungsmass einer Fläche bezeichneten Ausdruckes bei Biegungen in gewissen Räumen hat bereits Herr Lipschitz ausführlich gehandelt, weshalb ich auf diesen Punkt nicht weiter hier einzugehen brauche. Es ist indessen zu beachten — worauf Herr Beez zuerst aufmerksam gemacht hat (Schlömilch's Zeitschrift Bd. XX u. XXI) — dass Transformationen, bei welchen die sämmtlichen a_{rs} ungeändert bleiben, bei höheren Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen nicht mehr eine wirkliche Biegung derselben anzeigen.

ausgedrückt wird, sind bestimmt durch die Bedingung:

$$\delta V = 0,$$

wo:

$$V = \int dt \sqrt{\sum c_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}}.$$

Hiernach sind die Differentialgleichungen derselben, wenn noch:

$$\sum c_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 1$$

gesetzt wird, d. h. wenn die Variabele t die *Länge der geodätischen Linie* vorstellt:

$$(1) \qquad \frac{d^2 x_l}{dt^2} = -\sum c_{iks} \frac{\gamma_{sl}}{\delta} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}.$$

Demnach sind die Coordinaten x_l einer geodätischen Linie, welche vom Punkte x_0, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ ausgeht:

$$(2) \qquad x_l = x_l^0 + t\left(\frac{dx_l}{dt}\right)_0 - \frac{t^2}{2}\left(\sum c_{iks} \frac{\gamma_{sl}}{\delta} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}\right)_0 + \cdots$$

Soll dagegen in der M_m, welche durch die Gleichungen $\varphi_1 = 0 \cdots \cdots \varphi_{n-m} = 0$ bestimmt wird, eine geodätische Linie construirt werden, so wird zu setzen sein:

$$(3) \qquad \frac{d^2 x_l}{dt^2} = -\sum c_{iks} \frac{\gamma_{sl}}{\delta} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} + \sum \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} \frac{\gamma_{sl}}{\delta},$$

mithin:

$$(4) \quad x_l = x_l^0 + t\left(\frac{dx_l}{dt}\right)_0 - \frac{t^2}{2}\sum\left(c_{iks}\frac{\gamma_{sl}}{\delta}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt} - \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s}\frac{\gamma_{sl}}{\delta}\right)_0 + \cdots.$$

Andererseits ist die Gleichung der geodätischen Linien in der M_m, deren Coordinaten etwa die $u_1 \cdots u_m$ sind:

$$(5) \quad u_h = u_h^0 + t\left(\frac{du_h}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\sum\left(a_{iks}\frac{e_{sh}}{\Delta}\frac{du_i}{dt}\frac{du_k}{dt}\right)_0 + \cdots$$

Sieht man die x als Functionen der u an, so hat man demnach aus (5) die mit (4) identische Gleichung:

$$(6) \quad x_l = x_l^0 + \sum \frac{\partial x_l}{\partial u_h}\left[t\left(\frac{du_h}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\sum\left(a_{iks}\frac{e_{sh}}{\Delta}\frac{du_i}{dt}\frac{du_k}{dt}\right)_0\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 x_l}{\partial u_h \partial u_k} t^2 \left(\frac{du_h}{dt}\right)_0 \left(\frac{du_k}{dt}\right)_0 + \cdots$$

Durch Vergleichung der Potenzen von t in (4) und (6) findet man:

$$(7)\quad -\sum\left(c_{iks}\frac{\gamma_{sl}}{\delta}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}\right)_0+\lambda_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_s}\frac{\gamma_{sl}}{\delta}$$
$$=\left(\sum\frac{\partial x_l}{\partial u_h}\frac{e_{sh}}{\Delta}a_{iks}\frac{du_i}{dt}\frac{du_k}{dt}+\sum\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_h\partial u_k}\frac{du_h}{dt}\frac{du_k}{dt}\right)_0.$$

Man bestimmt endlich die Coefficienten λ_j, wenn man die Bedingung ausdrückt, dass die x_l in (4) die Gleichungen $\varphi_j=0$ erfüllen müssen. Bildet man daher die Gleichungen $\varphi_j[x_1\cdots x_n]=0$, in welcher alle Coefficienten der Potenzen von t verschwinden müssen, so ergiebt sich durch das Verschwinden des Coefficienten von t^2:

$$\sum\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_m\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\frac{dx_m}{dt}+\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_s}\frac{\gamma_{sl}}{\delta}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_l}-c_{jks}\frac{\gamma_{sl}}{\delta}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_l}=0,$$

woraus:

$$(8)\qquad \sum\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_s}\frac{\gamma_{sl}}{\delta}=\sum\Omega_{mnj}\lambda_{jl}\frac{du_m}{dt}\frac{du_n}{dt}.$$

Setzt man diesen Werth in (7) ein, so erhält man wieder die Gleichung § I. (B).

Soll nun eine geodätische Linie in der $\varphi_j=0$ *osculiren*, so muss

$$(9)\qquad \Sigma\Omega_{srj}\,du_s\,du_r=0$$

sein. *Wenn nur eine einzige Gleichung $\varphi=0$, also in der M_n eine Fläche gegeben ist, so bestimmt die Gleichung* (9) *eine quadratische M_{n-1} von Richtungen auf der Fläche φ, welche als Richtungen der vom Punkte x ausgehenden Haupttangentencurven aufzufassen* sind. Da nun die Massverhältnisse in der durch $\varphi=0$ bestimmten M_{n-1} abhängen von dem Längenelement:

$$ds^2=\Sigma a_{ik}\,du_i\,du_k,$$

so werden die Gleichungen:

$$(10)\qquad \Sigma[a_{rs}-\lambda\Omega_{rs}]\,du_s=0,$$

welche auf die Determinantengleichung

$$(11)\qquad \Omega=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda\Omega_{11} & \cdots & a_{1\,n-1}-\lambda\Omega_{1\,n-1}\\ a_{n-1\,1}-\lambda\Omega_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1}-\lambda\Omega_{n-1\,n-1}\end{vmatrix}=0$$

führen, die Axen der Mannigfaltigkeit der Haupttangentenrichtungen, *d. h. die Richtungen der Krümmungslinien bestimmen.* Wenn man einem allgemein anerkannten Sprachgebrauche folgt, so kann man in Rücksicht auf die bekannten Eigenschaften der Gleichung $\Omega=0$ sagen, dass *die Richtungen der Krümmungslinien in der Tangentenebene der Fläche gegenseitig auf einander senkrecht stehen.*

Es fragt sich jetzt, ob die Wurzeln der Gleichung $n-1^{\text{ten}}$ Grades (11) gleichzeitig als Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser von

Normalschnitten aufgefasst werden können. Wir gehen wieder zu dem allgemeinen Falle von $n-m$ Gleichungen $\varphi_j = 0$ zurück. Um die Krümmung eines Normalschnittes zu erhalten, welcher dem Punkte P entspricht, hat man die mit 2 multiplicirte Entfernung eines unendlich benachbarten Punktes P' von einer geodätischen Linie gleicher Richtung in der M_n durch das Quadrat des Bogenelementes zu dividiren. Jene Entfernung ist aber der Abstand von zwei gleich langen Elementen geodätischer Linien gleicher Richtung, von denen die eine in der M_n, die andere in der durch die $\varphi_j = 0$ bestimmten M_m verläuft. Gemessen in der M_n, ist dieselbe bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung:

$$\frac{1}{2} t^2 \left[\sum \lambda_j \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \gamma_{sl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Bezeichnet man den in der Klammer enthaltenen Ausdruck durch V, so hat man zur Bestimmung desselben die Gleichungen:

$$\sum \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s} \frac{\gamma_{sr}}{\delta} = \sum \Omega_{mni} \frac{du_n}{dt} \frac{du_m}{dt},$$

$$\sum \lambda_j \Omega_{mnj} \frac{du_n}{dt} \frac{du_m}{dt} = V,$$

mithin:

$$\Sigma \Omega_{mnj} \Omega_{m'n'i} \lambda_{ik} \lambda_{jl} c_{ml} du_m du_n du_{n'} du_{m'} = V. \tag{12}$$

Demnach ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2\delta}{ds^2} = \frac{[\Sigma \Omega_{mnj} \Omega_{m'n'i} \lambda_{ik} \lambda_{jl} c_{ml} du_n du_m du_{n'} du_{m'}]^{\frac{1}{2}}}{\Sigma a_{mn} du_n du_m}. \tag{13}$$

Wird wieder nur eine einzige Gleichung vorausgesetzt, so tritt ein Factor, welcher die λ_{ik} enthält, ganz heraus, die Quadratwurzel lässt sich ausziehen und man erhält als Krümmungsmass eines Normalschnittes:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{\Sigma \Omega_{mn} du_n du_m}{\Sigma a_{mn} du_n du_m}. \tag{14}$$

Die Gleichung (14) lehrt, *dass in der That den Richtungen der Krümmungslinien Maxima resp. Minima der Krümmungshalbmesser entsprechen, und dass für* $\lambda = \frac{\varrho}{\sqrt{U}}$ *die* $n-1$ *Wurzeln* $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_{n-1}$ *die Hauptkrümmungshalbmesser vorstellen.*

Auf die Behandlung des Falles, wo mehrere Gleichungen $\varphi = 0$ gegeben sind, werde ich hier nicht weiter eingehen. Wird die quadratische Form F als *definit* vorausgesetzt, so kann eine Haupttangentenrichtung nur dann stattfinden, wenn in (12) alle Coefficienten der c_{mi} verschwinden, d. h. wenn die $n-m$ quadratischen Gleichungen

$$\Sigma \Omega_{mnj}\, du_n\, du_m = 0$$

erfüllt sind.

§ IV.

Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung.

Von besonderem Interesse würde es sein, wenn auch bei unserer verallgemeinerten Betrachtung die Richtungen der Krümmungslinien die Eigenschaft bewahren, dass ihnen zugehörige unendlich benachbarte geodätische Normalen der Fläche $\varphi = 0$, welche in der M_n gezogen sind, sich schneiden und wenn zugleich die Abschnitte auf diesen Normalen als Krümmungshalbmesser der Fläche gedeutet werden könnten. Es ist evident, dass dies stattfindet für dasjenige System von (krummen) geodätischen Normalen einer Fläche, welches in einem Raume betrachtet wird, dessen Linienelement in ein solches mit constanten Coefficienten transformirt werden kann*). Indem ich die Untersuchung der unendlich benachbarten geodätischen Normalen einer Fläche einer anderen Gelegenheit vorbehalte, werde ich hier zunächst eine Frage behandeln, die mit den vorigen Betrachtungen im engsten Zusammenhang steht, *ob nämlich in einem beliebigen Raume überhaupt Flächen constanter Krümmung, also nach gewöhnlichem Sprachgebrauch Ebenen und Kugeln, existiren können.***)

Die erforderliche Bedingung hierfür ist

$$(1) \qquad \Omega_{rs} = K a_{rs} \sqrt{U},$$

wo K eine Constante. Führt man diesen Werth von Ω_{rs} in die Gleichung § II. (11) ein, so ergiebt sich die Bedingung:

$$(2) \qquad \sum \frac{\gamma_{m\varkappa}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} [lkmi]_c = 0.$$

Es scheint indessen nicht unmittelbar ersichtlich, ob diese Bedingung auch hinreichend ist. Auch geht nicht direct aus dem Vorigen hervor, *welches die zu lösenden Differentialgleichungen sind, die eine Mannig-*

---

*) Von Interesse scheint es hierbei, dass man die Bestimmung der Hauptkrümmungshalbmesser lediglich durch algebraische Rechnungen und Differentiation bestimmen kann, dagegen nicht erforderlich ist, die Differentialgleichungen zu integriren, welche die M_n in eine im Riemann'schen Sinne ebene verwandeln.

**) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass diese Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung nicht mit solchen zu verwechseln sind, welche im Riemann'schen Sinne constantes Krümmungsmass besitzen. Die letzteren sind im Folgenden als *M. constanter Riemann'scher Krümmung* bezeichnet.

faltigkeit constannter Krümmung liefern, und *in welchem Umfange* sie eine solche bestimmen. Ich werde daher die Bedingungen (1) auf einem anderen Wege untersuchen, bei dem freilich zunächst die Vortheile der Symmetrie verloren gehen. *Dabei wird sich allerdings ergeben, dass die Bedingungen* (2) *vollkommen hinreichend sind.* Um die Bedingungen (1) oder:

$$(3)\qquad \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s}$$
$$= \sum \frac{\gamma_{hk}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} c_{i'k'h} \frac{\partial x_{i'}}{\partial u_r} \frac{\partial x_{k'}}{\partial u_s} + K a_{rs} \sqrt{U}$$

in eine einfachere Form zu bringen, setzen wir voraus, dass:

$$(4)\qquad \varphi = x_n - \psi(x_1 x_2 \cdots x_{n-1}) = 0$$

sei und dass die $n-1$ unabhängigen Variabelen $x_1 \cdots x_{n-1}$ die Stelle der $u_1 \cdots u_{n-1}$ einnehmen. Dann ist $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = 0$, wenn i oder k gleich n ist, sonst aber gleich $-\frac{\partial^2 x_n}{\partial u_i \partial u_k}$; ferner ist $\frac{\partial x_i}{\partial u_r} = 0$, ausser in den Fällen $i = n$ und $i = r$, in welch letzterem der Quotient den Werth eins hat. Mithin wird aus der Gleichung (3):

$$(5)\qquad -\frac{\partial^2 x_n}{\partial u_r \partial u_s} = \sum \frac{1}{\delta}\left(\gamma_{hn} - \sum \gamma_{ht} \frac{\partial x_n}{\partial u_t}\right)$$
$$\times \left(c_{nnh} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nsh} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nrh} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} + c_{rsh}\right) + a_{rs} K \sqrt{U}.$$

Dabei soll zur Abkürzung:

$$\sum \frac{1}{\delta} \gamma_{hk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = q_h = \sum \frac{1}{\delta}\left(\gamma_{hn} - \sum \gamma_{ht} \frac{\partial x_n}{\partial u_t}\right)$$

gesetzt werden. Der Index t (sowie später t') soll dabei nur von 1 bis $n-1$ gehen, während Indices wie $h, k \cdots$ alle Werthe von 1 bis n in den Summationen*) annehmen. Für das Bestehen der Differentialgleichungen (5) sind die Bedingungen der Integrabilität erforderlich, welche durch Bildung der dritten Differentialquotienten erhalten werden. Es ergiebt sich nun — abgesehen von solchen Gliedern, welche durch Vertauschung von r mit p in der Differenz:

$$(6)\qquad \frac{\partial^3 x_n}{\partial u_r \partial u_s \partial u_p} - \frac{\partial^3 x_n}{\partial u_p \partial u_s \partial u_r} = 0$$

sich aufheben —

---

*) Der Buchstabe n ist überhaupt in dem Folgenden kein Summationsindex.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial^3 x}{\partial u_r \partial u_s \partial u_p} = \sum q_h \Big(& \frac{\partial c_{nnh}}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_s}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + \frac{\partial c_{nrh}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_s} \\
& + \frac{\partial c_{nsh}}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + \frac{\partial c_{nrh}}{\partial u_p}\frac{\partial x_h}{\partial u_s} + \frac{\partial c_{rsh}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_p} + \frac{\partial c_{rsh}}{\partial u_p}\Big) \\
& + \sum q_h \left(c_{nnh}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nrh}\right) \frac{\partial^2 x_n}{\partial u_s \partial u_p} \\
- \sum \Big(c_{nnh} & \frac{\partial x_n}{\partial u_s}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nsh}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nrh}\frac{\partial x_n}{\partial u_s} + c_{rsh}\Big) \\
\times \Big[\frac{\gamma_{sh}}{\delta} q_{h'} & \left(\frac{\partial c_{h's}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_p} + \frac{\partial c_{h's}}{\partial u_p}\right) + \frac{\gamma_{ht}}{\delta}\frac{\partial^2 x_n}{\partial u_t \partial u_p}\Big] + K\frac{\partial a_{rs}\sqrt{U}}{\partial u_p}.
\end{aligned}
$$

Ersetzt man hier die zweiten Differentialquotienten nach (5), so folgt, wenn zunächst $K = 0$ genommen wird, und zugleich diejenigen Terme fortgelassen werden, welche sich bei der Vertauschung von r und p aufheben werden:

$$
\begin{aligned}
(7)\quad -\frac{\partial^3 x_n}{\partial u_r \partial u_s \partial u_p} = \sum q_{h'} \Big\{ & \frac{\partial c_{nnh'}}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_s}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + \frac{\partial c_{rnh'}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_s} \\
+ \frac{\partial c_{nsh'}}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} & + \frac{\partial c_{rnh'}}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_s} + \frac{\partial c_{rsh'}}{\partial u_p} + \frac{\partial c_{rsh'}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_p} \\
- \frac{\gamma_{s'h}}{\delta} \Big(c_{nnh} & \frac{\partial x_n}{\partial u_s}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nsh}\frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{rnh}\frac{\partial x_n}{\partial u_s} + c_{rsh}\Big) c_{ph's'} \\
+ c_{rsh}\, c_{nh's'}\frac{\partial x_n}{\partial u_p} & + c_{nrh}\, c_{nh's'}\frac{\partial x_n}{\partial u_s}\frac{\partial x_n}{\partial u_p}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Bildet man jetzt die Differenz (6), so folgt:

$$
\begin{aligned}
(8)\quad \sum q_{h'} \Big(& \frac{\partial x_n}{\partial u_s}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}[nnh'p]_c - \frac{\partial x_n}{\partial u_p}\frac{\partial x_n}{\partial u_s}[nnh'r]_c + \frac{\partial x}{\partial u_s}[rnh'p]_c \\
& + \frac{\partial x_n}{\partial u_r}[nsh'p]_c - \frac{\partial x_n}{\partial u_p}[nsh'r]_c + [rsh'p]_c\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Führt man jetzt auch in (2) die unter (4) über die Variabeln u gemachte Voraussetzung ein, so erhält man, da Coefficienten, wie $[nsmn]_c$, identisch verschwinden, genau die Bedingungen (8). *Die Bedingung (2) ist daher hinreichend und nothwendig, wenn Flächen mit der Krümmung Null vorhanden sein sollen, d. h. M_{n-1}, in denen sich nach jeder Richtung von jedem Punkte aus geodätische Linien der M_n so ziehen lassen, wie es mit den geraden Linien in der Ebene des gewöhnlichen Raumes der Fall ist. Ist die Bedingung (2) erfüllt, so wird man aus den Gleichungen (5) im Allgemeinen die x_n als Function der $n-1$ u mit n willkürlichen Constanten x_n^0 $\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_r}\right)_0$ darstellen können.*

Dabei wird aber vorausgesetzt, dass die Bedingungen (2) *nicht durch eine specielle Form der Gleichung* $\varphi = 0$, *sondern lediglich vermöge der identisch erfüllten Gleichungen* $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} = 0$ *befriedigt werden.*

Wir führen jetzt die oben begonnene Untersuchung der Integrabilitätsbedingungen weiter fort. Wenn K einen beliebigen constanten Werth hat, so kommt rechterhand bei (7) noch hinzu:

$$\text{(9)} \qquad K \sum q_h \left(c_{nnh} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nrh} \right) a_{sp} \sqrt{U}$$

$$+ \sum \frac{\gamma_{ht}}{\delta} \left(c_{nnh} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nsh} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nrh} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} + c_{rsh} \right) a_{tp} \sqrt{U} K$$

$$+ K \frac{\partial a_{rs} \sqrt{U}}{\partial u_p}.$$

Man kann aber zeigen, dass diese Glieder sich gegen diejenigen, welche nach Vertauschung von r mit p subtrahirt werden müssen, aufheben. Hiermit ist dann erwiesen, *dass die Bedingungen für das Vorhandensein von Flächen constanter Krümmung genau dieselben sind, wie für das von Flächen ohne Krümmung**). Um die in Rede stehende Behauptung zu erweisen, hat man sich der folgenden Formeln zu bedienen:

Bedeuten t und t' wieder Indices, welche sich nur von 1 bis $n-1$ erstrecken, so ist:

$$U = \sum \left(\frac{\gamma_{nn}}{\delta} - 2 \frac{\gamma_{nt}}{\delta} \frac{\partial x_n}{\partial u_t} + \frac{\gamma_{tt'}}{\delta} \frac{\partial x_n}{\partial u_t} \frac{\partial x_n}{\partial u_{t'}} \right).$$

Mithin wird:

$$\frac{\partial U}{\partial u_p} = - \sum q_k q_h \left[\frac{\partial x_n}{\partial u_p} (c_{nkh} + c_{nhk}) + (c_{pkh} + c_{phk}) \right]$$

$$+ 2 \sum q_t q_k \left[c_{nnk} \frac{\partial x_n}{\partial u_t} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{ntk} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{npk} \frac{\partial x_n}{\partial u_t} + c_{ptk} \right]$$

$$+ 2 K \sqrt{U} \sum a_{pt} q_t.$$

Fügt man rechterhand hinzu:

$$-2 \sum q_k q_n \left(c_{nnk} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{pnk} \right),$$

---

*) Es liegt hier nahe, nach einer Construction zu suchen, durch welche aus den Flächen mit der Krümmung Null solche mit constanter Krümmung hergeleitet werden.

so kann man, da:

$$\sum q_k q_h (c_{phk} - c_{pkh}) = 0,$$

setzen:

$$\frac{\partial U}{\partial u_p} = 2K\sqrt{U} \sum q_t a_{pt} + 2 \sum q_t q_k \left(c_{nnk} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{npk}\right) \frac{\partial x_n}{\partial u_t}$$
$$- 2 \sum q_k q_n \left(c_{nnk} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{pnk}\right).$$

Mithin wird:

$$\frac{\partial a_{rs}\sqrt{U}K}{\partial u_p} = K\sqrt{U} \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_p} + K^2 a_{rs} \sum q_t a_{pt}$$
$$+ \frac{K a_{rs}}{\sqrt{U}} \sum q_t q_k \frac{\partial x_n}{\partial u_s} \left(c_{nnk} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{npk}\right)$$
$$- \frac{K a_{rs}}{\sqrt{U}} \sum q_k q_n \left(c_{nnk} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{npk}\right).$$

Fügt man noch die übrigen Glieder aus (9) hinzu, so wird sich nach geeigneter Reduction, bei welcher die Gleichung

$$U = q_n - \sum q_t \frac{\partial x_n}{\partial u_t}$$

zur Anwendung kommt, an Stelle des Ausdruckes (9) ergeben:

$$(10) \qquad K\sqrt{U} \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_p} + K^2 a_{rs} \sum q_t a_{pt}$$
$$+ \sqrt{U} K \sum a_{pt} \frac{\gamma_{th}}{\delta} \left(c_{nnh} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nsh} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nrh} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} + c_{rsh}\right).$$

Zur weiteren Behandlung von (10) ist die Gleichung:

$$(11) \qquad a_{rs} = c_{nn} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{ns} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nr} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} + c_{rs}$$

zu benutzen, welche der Transformation (4) entspricht. Daher wird:

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial u_p} = 2 c_{pnn} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \frac{\partial x_n}{\partial u_s}$$
$$- \left(c_{nn} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} + c_{nr}\right) \left[\sum q_h \left(c_{nnh} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{nsh} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{pnh} \frac{d x_n}{\partial u_s} + c_{psh}\right)\right.$$
$$\left. + K\sqrt{U} a_{ps}\right].$$

Setzt man ferner, wie unmittelbar aus (11) folgt:

$$\sum a_{tp} \frac{\gamma_{th}}{\delta} = - q_h \left(c_{nn} \frac{\partial x_n}{\partial u_p} + c_{up}\right) + \frac{\partial x_n}{\partial u_p} [hn] + [ph],$$

so bleibt aus (10) nach Vertauschung von r mit p und Subtraction der entsprechenden Glieder übrig:

$$(12) \qquad -\left(c_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}+c_{nr}\right)K^2 U a_{pst}\sum(q_t a_{pt})\, a_{rs} K^2.$$

In diesem Ausdrucke setze man:

$$-K^2 a_{ps} U\left(c_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}+c_{nr}\right)=-\left(c_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}+c_{nr}\right)q_n K^2 a_{ps}$$
$$+K^2 a_{ps}\left(c_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}+c_{nr}\right)\sum q_t\frac{\partial x_n}{\partial u_t},$$

$$K^2 a_{rs}\sum q_t a_{pt}=K^2 a_{rs}\left(c_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial u_p}+c_{np}\right)\sum q_t\frac{\partial x_n}{\partial u_t}$$
$$+K^2 a_{rs}\sum\left(c_{nt}\frac{\partial x_n}{\partial u_p}+c_{pt}\right)q_t.$$

Werden diese Werthe in (12) eingesetzt, subtrahirt man dann den Ausdruck (12), nachdem p mit r vertauscht ist, so bleibt:

$$-K^2 a_{ps}\sum q_h\left(c_{hn}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}+c_{hr}\right)+a_{rs}K^2\sum q_h\left(c_{hn}\frac{\partial x_n}{\partial u_r}+c_{ph}\right),$$

welches identisch Null ist, wie man leicht erkennt, wenn man für q_h seinen Werth einsetzt und die Relationen I. (4) beachtet. Hiermit ist aber die obige Behauptung vollständig nachgewiesen. Wird dagegen auch K als variabel betrachtet, so tritt zu der linken Seite der Bedingungen (2) noch hinzu:

$$\sqrt{U}\left(a_{rs}\frac{\partial K}{\partial u_p}-a_{sp}\frac{\partial K}{\partial u_r}\right).$$

Für solche Räume, in denen Flächen mit constanter Krümmung möglich sind, muss daher dieser Ausdruck verschwinden, falls die Covarianten (2) nicht für eine specielle Form der Flächengleichung, sondern lediglich, wie wir voraussetzen, in Folge der Gleichungen I. (4) verschwinden. Multiplicirt man mit e_{sh} und summirt nach s, so kommt die Bedingung:

$$\frac{\partial K}{\partial u_p}-\frac{\partial K}{\partial u_r}=0.$$

Aber hieraus ergiebt sich, da der obige Ausdruck nicht durch $a_{rs}=a_{ps}$ zum Verschwinden gebracht werden darf:

$$\frac{\partial K}{\partial u_p}=\frac{\partial K}{\partial u_r}=0,$$

also:

$$K=\text{const.}$$

Wir haben mithin das Resultat:

In einem Raume, in welchem ein System von n-fach unendlich vielen Flächen mit der Krümmung Null vorhanden ist, können keine Flächen existiren, welche in jedem Punkte eine nach allen Richtungen hin gleich grosse, aber von Punkt zu Punkt veränderliche Krümmung der Normalschnitte besitzen, d. h. welche aus lauter Nabelpunkten bestehen. Diese Eigenschaft steht mit dem bekannten Satze in Uebereinstimmung, dass die Kugel im gewöhnlichen Raume die einzige Fläche ist, welche nach allen Richtungen in jedem Punkte die nämliche Krümmung besitzt.

Die *covariante Natur der Bedingungen* (2) erweist man leicht, wenn man die aus § II. (B) für $m = n$ folgende Transformationsformel:*)

$$[l' k' m' i']_c' = \sum [l k m i]_c \frac{\partial x_l}{\partial y_{l'}} \frac{\partial x_k}{\partial y_{k'}} \frac{\partial x_m}{\partial y_{m'}} \frac{\partial x_i}{\partial y_{i'}},$$

in welcher die gestrichenen Ausdrücke linkerhand sich auf die durch Einführung der Variabelen y transformirten Coefficienten c'_{ik} beziehen, beachtet.

Wir fassen das Hauptergebniss des vorliegenden Paragraphen noch einmal in dem folgenden Satze zusammen:

Jede Fläche $\varphi = 0$ constanter Krümmung muss die covarianten Bedingungen (2) *erfüllen. Daher sind, allgemein zu reden, in einem beliebig gegebenen Raume keine Ebenen oder Kugeln möglich. Sind die Bedingungen* (2) *unabhängig von der Form der Gleichung $\varphi = 0$ erfüllt, also:*

$$[l k m i]_c = A_{lk} c_{mi} + B_{li} c_{mk} + C_{ki} c_{lm},$$

wo die A_{lk}, B_{li}, C_{ki} beliebige Coefficienten sind, so enthält der Raum ein System von n-fach unendlich vielen Ebenen, resp. Kugeln.

Ich schliesse hieran noch die folgende Bemerkung:

Setzt man in den Gleichungen § II. (B) die Werthe:

$$\Omega_{rs} = K U a_{rs}$$

ein, multiplicirt man ferner mit den Differentialen $du_r\, du_s\, du_p\, du_t$, so gilt die für alle correspondirenden Differentialänderungen der dx_i bestehende Gleichung:

$$\Sigma [s p r t]_a\, du_s\, du_r\, du_p\, du_t = K^2\, \Sigma (a_{ps} a_{rs} - a_{rs} a_{sp})\, du_r\, du_s\, du_p\, du_t$$
$$+ \Sigma\, dx_i\, dx_l\, dx_k\, dx_m\, [l k m i]_c.$$

*) Dies ist die Formel, welche (ursprünglich von Riemann) von Herrn Christoffel bewiesen, später von Beez durch directe Rechnung abgeleitet ist.

Unter derselben Voraussetzung ist aber:

$$\Sigma(a_{pt}a_{rs}-a_{rt}a_{ps})\,du_r\,du_s\,du_p\,du_t=\Sigma(c_{lm}c_{ik}-c_{im}c_{lk})\,dx_l\,dx_m\,dx_i\,dx_k.$$

Mithin kommt:

$$\frac{\Sigma[sprt]_a du_s du_r du_p du_t}{\Sigma(a_{ps}a_{rs}-a_{rt}a_{ps})du_s du_r du_p du_t} - \frac{\Sigma[lkmi]_c dx_i dx_l dx_k dx_m}{\Sigma(c_{lm}c_{ik}-c_{im}c_{lk})dx_l dx_m dx_i dx_k}=K^2.$$

Hieraus geht hervor:

Die Differenz des Riemann'schen Krümmungsmasses einer M_{n-1} von constanter Krümmung K und des Riemann'schen Krümmungsmasses der M_n, aus welcher erstere durch eine Gleichung $\varphi=0$ ausgeschieden ist, ist für correspondirende Differentialänderungen gleich der Constanten K^2.

§ V.

Räume von speciellem, insbesondere constantem Riemann'schen Krümmungsmasse.

Es sei zunächst ein Fall hervorgehoben, in welchem Flächen constanter Krümmung vorhanden sind, welcher zugleich eine Verallgemeinerung einer Haupteigenschaft der Euklidischen Räume darstellt. Es seien die c_{ik} partielle zweite Differentialquotienten einer Function ψ. Dann ist:

$$2\,c_{iks}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_k\partial x_s}.$$

Nimmt man jetzt:

$$\varphi=\psi-\text{const}=0$$

an, so wird:

$$B_{mn}=-\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_m}\frac{\partial x_l}{\partial u_n}=-a_{mn},$$

also:

$$\Omega_{mn}=-a_{mn}+\sum\frac{\partial\psi}{\partial x_{n'}}\frac{\gamma_{m'n'}}{\delta}\frac{\partial x_i}{\partial u_m}\frac{\partial x_k}{\partial u_n}c_{ikm'}.$$

Ist nun ψ eine homogene Function q^{ter} Ordnung, so wird:

$$q\psi=\sum\frac{\partial\psi}{\partial x_n}x_n,\quad (q-1)\frac{\partial\psi}{\partial x_{n'}}=\sum x_h c_{hn'},$$

$$\Omega_{mn}=-\frac{q a_{mn}}{2(q-1)},\quad \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\gamma_{ik}}{\delta}=\frac{qc}{q-1}.$$

Der Krümmungshalbmesser erhält hiernach den constanten Werth:

$$\varrho=2\sqrt{c\,\frac{q-1}{q}}.$$

In der That sind denn auch die Covarianten des § IV. gleich Null.

Eine andere Ausnahme leitet zu denjenigen Räumen, denen nach Riemann ein constantes Krümmungsmass zugeschrieben wird. Setzt man voraus, dass das Quadrat des Längenelements durch einen quadratischen Differentialausdruck gegeben ist, dessen Coefficienten Constanten proportional sind, so wird:

$$c_{ik} = X b_{ik}$$

wo X eine Function von $x_1 \cdots x_n$ bedeutet. Bezeichnet man die ersten und zweiten Differentialquotienten von X durch Indices als X_i, X_{ik}, so wird:

$$c_{ikk'} = \frac{1}{2}\left[X_k b_{ik'} - X_{k'} b_{ik} + X_i b_{kk'}\right].$$

Mithin wird:

$$\Omega_{rs} = -\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} - \frac{1}{2} X a_{rs} \sum \frac{\gamma_{mk'}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} X_{k'}.$$

Der erste Term verschwindet, wenn φ eine in den x lineare Function ist. Ist dagegen:

$$\varphi = K \Sigma b_{ik} x_i x_k - c,$$

so wird:

$$\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 2 \frac{K}{X} a_{rs}.$$

Wenn also die Coefficienten c_{ik} Constanten proportional sind, so haben Flächen, welche durch lineare Gleichungen, resp. durch die specielle quadratische Gleichung $K\Sigma b_{ik} x_i x_k = c$ dargestellt werden, eine nach allen Richtungen in jedem Punkte gleich grosse, aber von Punkt zu Punkt veränderliche Krümmung.

Ferner ist:

$$\begin{aligned}[ikk'i']_c = {} & \frac{1}{2}\sum(X_{ki'} b_{ik'} + X_{k'i} b_{i'k} - X_{ki} b_{i'k'} - X_{k'i'} b_{ik}) \\ & - \frac{3}{4X}\sum(X_i X_{k'} b_{i'k} + X_k X_{i'} b_{ik'} - X_{i'} X_{k'} b_{ik} - X_i X_k b_{i'k'}) \\ & - \frac{1}{4}(b_{ik} b_{i'k'} - b_{i'k} b_{ik'}) \sum \left(X_l X_{l'} \frac{\gamma_{ll'}}{\delta}\right).\end{aligned}$$

Führt man diesen Werth in die Covarianten des § IV. ein, so verschwinden die aus dem ersten, dritten, sechsten, achten und letzten Term der Summen rechterhand herrührenden Beiträge. Setzt man für die Function X die Bedingung

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} = f b_{ik} + \frac{3}{2} \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial X}{\partial x_k},$$

in welcher f eine beliebige Function von X sein möge, fest, so werden überhaupt für jedes φ die Covarianten identisch verschwinden. Die Integrabilitätsbedingungen, denen die voranstehenden Differentialgleichungen für X zu genügen haben, liefern für die Function f die Gleichung:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{3}{2}\frac{1}{X}$$

oder:

$$f = MX^{\frac{3}{2}}.$$

wo M eine Constante. Man hat also:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k} = b_{ik} M X^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial X}{\partial x_k}.$$

Um diese Differentialgleichungen zu lösen, setzt man

$$X = \frac{1}{Y^2}$$

und erhält·

$$Y = -\frac{M}{4}\cdot\sum x_i x_k b_{ik} + \sum a_i x_i + \text{const.},$$

oder wenn die linearen Glieder als überflüssig fortgelassen werden:

$$X = \frac{1}{\left(c - \frac{M}{4}\Sigma x_i x_k b_{ik}\right)^2}.$$

Durch diese letztere Gleichung ist die Mannigfaltigkeit als eine von *constantem Riemann'schen Krümmungsmass charakterisirt und enthält Flächenschaaren constanter Krümmung in der bezeichneten Allgemeinheit.**) Die Mannigfaltigkeiten constanten Riemann'schen Krümmungsmasses befriedigen übrigens neben den Bedingungen § IV. (2) noch die speciellere Gleichung:

$$\sum \frac{\gamma_{kn}}{\delta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}[ii'k'k] = 0.$$

Bei der eben gewählten Darstellung der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses werden die Ebenen des Raumes nicht durch lineare, sondern durch *quadratische* Gleichungen dargestellt. Soll überhaupt die Gleichung einer Ebene *linear* sein, so muss für

$$\varphi = \Sigma a_i x_i + c$$

der Ausdruck:

$$\sum \gamma_{mn}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} c_{ikn}\frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_k}{\partial u_s}$$

für alle r, s verschwinden.

Die Bedingungen, denen die Coefficienten des Längenelementes zu genügen haben, wenn eine n-fach unendliche Schaar von Ebenen oder,

---

*) Dass die Covarianten des § IV. identisch verschwinden für Räume constanter Riemann'scher Krümmung, erkennt man übrigens unmittelbar, wenn man die bekannten Ausdrücke, welche für die $[lkmi]_c$ in diesem Falle gesetzt werden können, an deren Stelle einträgt.

was dasselbe ist, von geodätischen Linien, mit linearen Gleichungen vorhanden sein soll, sind also durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$\sum \gamma_{ms} c_{hrm} = 0 \quad \text{für} \quad r \lessgtr s, \; h \lessgtr s,$$

$$2\delta \sum c_{rhm}\gamma_{ms} = \sum c_{hhm}\gamma_{mh} \quad \text{für} \quad r = s.$$

Sie führen, was ich hier nicht beweise, *vermöge ihrer Integrabilitätsbedingungen für die c_{ik} auf die Relationen:*

$$[lrjh]_c = M(c_{lr}c_{jh} - c_{hr}c_{jl})$$

d. h. *im Allgemeinen auf Räume von constantem Krümmungsmass.* Hiermit ist ein von Herrn Beltrami zuerst ausgesprochener Satz erhalten. (Vgl. insbesondere dessen schöne Integration der Bedingungen für $n = 2$, Annali di M. VII, 185.)

Ich gehe nun zu der Untersuchung über, inwieweit die *geometrischen Constructionen*, die mit dem Begriff der Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche zusammenhängen, und an welche im § III. erinnert wurde, ihre Analogie bei den eben betrachteten speciellen Räumen finden. Man kann im Euklidischen Raume die Richtungen der Krümmungslinien als solche ansehen, längs welcher die Coordinaten der Fläche der Centra eine verschwindende Variation haben.

Sollen überhaupt Ausdrücke von der Form:

$$X_i = x_i + \frac{t}{\sqrt{U}} \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\gamma_{mi}}{\delta}, \tag{1}$$

welche dem Ausdrucke der Coordinaten der Centrafläche entspricht, die Eigenschaft haben, dass ihre Variation längs gewisser Richtungen in der Fläche $\varphi = 0$ gleich Null ist, und bezeichnet man die Variation nach den x_i durch d, so muss sein:

$$\begin{aligned} dX_i = 0 = &\sum du_s \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \frac{t}{\sqrt{U}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x} \frac{\partial x_n}{\partial x_s} \frac{\gamma_{mi}}{\delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \frac{\gamma_{mi}}{\delta}}{\partial u_s} \right) \\ &- \sum du_s \frac{t}{2U^{\frac{3}{2}}} \frac{\gamma_{mi}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial u_s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\gamma_{mn}}{\delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial \frac{\gamma_{mn}}{\delta}}{\partial u_s} \right) \\ &+ \frac{dt}{\sqrt{U}} \sum \frac{\gamma_{mi}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wird mit $\sum c_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_r}$ multiplicirt und nach i summirt, so entsteht:

$$0 = \sum \left[a_{rs} + \frac{t}{\sqrt{U}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \frac{\partial x_m}{\partial u_s} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} c_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \frac{\partial \frac{\gamma_{mi}}{\delta}}{\partial u_s} \right) \right] du_s, \tag{3}$$

während die analoge Operation mit $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ liefert:

$$(4) \qquad 0 = \frac{t}{2\sqrt{U}} \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_m} \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \frac{\partial \frac{\gamma_{mn}}{\delta}}{\partial u_s} \right) du_s + dt\sqrt{U}.$$

Die Factoren von t in den $n-1$ Gleichungen (3) haben die Form:

$$-\frac{1}{\sqrt{U}} \left(\Omega_{rs} + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_m} \frac{\gamma_{mh}}{\delta} c_{lhh'} \frac{\partial x_l}{\partial u_s} \frac{\partial x_{h'}}{\partial u_r} \right).$$

Im Allgemeinen führt daher diese Untersuchung nicht zu den Richtungen der Krümmungslinien. Es ist dies auch nicht zu erwarten, da die Ausdrücke (1) nicht Coordinaten von geodätischen Linien des Raumes sind. In dem besonderen Falle, wo die $c_{ik} = Xb_{ik}$, erhält man:

$$\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_m} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} c_{ik} \frac{\partial \frac{\gamma_{mi}}{\delta}}{\partial u_s} = 0.$$

und die Gleichungen (3) werden:

$$(5) \qquad 0 = \sum \left[a_{rs} - \frac{t}{\sqrt{U}} \left(\Omega_{rs} + \frac{1}{X} a_{rs} \mathsf{P} \right) \right] du_s$$

wo:

$$\mathsf{P} = \sum X_h \frac{\gamma_{mh}}{\delta} \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}.$$

Die Gleichungen (5) *liefern in der That die Richtungen der Krümmungslinien.* Um den Fall des Raumes constanter Riemann'scher Krümmung genauer zu untersuchen, gehen wir von der Beltrami'schen Form des Längenelementes aus, da bei dieser die Gleichungen der geodätischen Linien in linearer Form ausgedrückt werden.

Herr Beltrami setzt als Ausdruck für das Längenelement voraus:*)

$$ds = \frac{R}{x}\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2},$$

wobei:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 - x^2.$$

Dieser Gleichung entspricht die in unabhängigen Coordinaten ausgedrückte:

$$(6) \qquad ds^2 = \Sigma c_{ik} dx_i dx_k,$$

wo:

---

*) Beltrami, Teoria generale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica Ser. II. Tom. II.

$$(7)\qquad \frac{c_{ik}}{R^2} = \frac{x_i x_k}{(a^2-\varrho^2)^2} + \frac{[ik]}{a^2-\varrho^2},$$

$$\gamma_{ik} = \frac{a^2-\varrho^2}{a^2 R^2}\left([ik]\,a^2 - x_i x_k\right),$$

in welchen Gleichungen ϱ^2 zur Abkürzung für Σx_i^2 gesetzt ist. Die Gleichungen der Ebenen sind linear, die der Kugeln quadratisch von der Form:

$$\frac{a^2 - \Sigma x_i x_i^0}{\sqrt{a^2-\varrho^2}} = \text{const},$$

wenn die x_i^0 beliebige Constanten bedeuten. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien werden, wenn:

$$\Omega = \sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2},$$

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$$

gesetzt wird,

$$(8)\qquad dx_i = c_i x \Omega$$

$$-\frac{dx}{\sqrt{1-c^2x^2}} = \Omega.$$

Wird also $\int x\Omega = t = \frac{1}{c^2}\sqrt{1-c^2x^2}$ genommen, so werden die Coordinaten X_i einer geodätischen Linie ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$(9)\qquad X_i = c_i t + b_i,$$

in denen die Constanten b_i, c_i den Bedingungen

$$a^2 - \frac{1}{c^2} - \sum b_i^2 = 0 \qquad \sum b_i c_i = 0$$

zu unterwerfen sind, damit die Gleichung $X^2 = a^2 - \varrho^2$ erfüllt sei. Soll nun $x, x_1, x_2 \cdots x_n$ der Anfangspunkt einer geodätischen Linie sein, so kann man setzen:

$$(10)\qquad X_i - x_i = \frac{c_i}{c^2}\left\{\sqrt{1-c^2X^2} - \sqrt{1-c^2x^2}\right\},$$

womit die eben angeführten beiden Bedingungsgleichungen sich auf:

$$(11)\qquad \sum c_i x_i = \sqrt{1-c^2x^2}$$

reduciren, und hat, wenn zur Abkürzung

$$(12)\qquad \sqrt{1-c^2X^2} - \sqrt{1-c^2x^2} = \lambda$$

genommen wird, als Gleichung der geodätischen Linien

$$(13)\qquad X_i - x_i = \frac{c_i}{c^2}\,\lambda.$$

Ist nun in diesem Raume eine Fläche $\varphi = 0$ gegeben, so wird der geodätischen Normale im Punkte $x_1 \cdots x_n$ die Bestimmung:

$$c_i = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\gamma_{mi}}{\delta}$$

entsprechen. Wählt man demgemäss

(14)
$$c_i = \frac{a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - v x_i}{a \sqrt{a^2 - \varrho^2} \sqrt{W}},$$

wo zur Abkürzung:

$$v = \sum x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

$$W = a^2 \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - v^2$$

gesetzt ist, so wird:

(15)
$$c^2 = \frac{W a^2 - (\varrho^2 - a^2) v^2}{a^2 (a^2 - \varrho^2) W}$$

und zugleich die Gleichung (11) erfüllt sein.

Man erhält nun als Bedingungen, unter denen die Fortschreitungsrichtungen du_i solchen geodätischen Normalen entsprechen, welche sich im Punkte X schneiden:

$$0 = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u_s} du_s + \lambda \frac{d c_i}{c^2} + \lambda c_i d \frac{1}{c^2} + \frac{c_i}{c^2} d\lambda.$$

Bei der Multiplication mit $\sum c_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_r}$ und der nachfolgenden Summation über i ist zu beachten, dass, dem in (7) angegebenen Werthe der c_{ik} entsprechend:

$$\sum c_i c_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} = 0,$$

$$\frac{a_{rs}}{R^2} = \frac{\sum x_k \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \sum x_k \frac{\partial x_k}{\partial u_s}}{(a^2 - \varrho^2)^2} + \frac{\sum \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s}}{a^2 - \varrho^2}$$

Mithin wird:

$$\sum d c_i c_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} =$$

$$= \frac{1}{a \sqrt{a^2 - \varrho^2} \sqrt{W}} \sum \left(\frac{R^2 a^2}{a^2 - \varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_n} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_n}{\partial u_s} - a_{rs} x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) du_s,$$

$$\sum c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\sqrt{W}}{a \sqrt{a^2 - \varrho^2}},$$

$$\sum d c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\sqrt{W}}{a} \partial \frac{1}{a^2 - \varrho^2}, \qquad \frac{a^2 - \varrho^2}{a^2 R^2} W = U.$$

Also entsteht das System der $n-1$ Gleichungen:

$$0=\sum du_s\left[a_{rs}-\frac{\lambda}{ac^2\sqrt{a^2-\varrho^2}\sqrt{W}}\left(\frac{R^2a^2}{a^2-\varrho^2}\,\Omega_{rs}+a_{rs}\,v\right)\right],$$

oder, wenn

$$\mu=\frac{\dfrac{\lambda R}{c^2a^2-\varrho^2}}{1-\dfrac{\lambda v}{ac^2\sqrt{W}\sqrt{a^2-\varrho^2}}}$$

gesetzt wird:

$$(16)\qquad 0=\sum du_s\left(a_{rs}-\frac{\mu}{\sqrt{U}}\,\Omega_{rs}\right)$$

und die Multiplication mit $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ liefert als Bedingung für die Variation, welche dem λ zu ertheilen ist:

$$(17)\qquad d\left(\frac{\lambda}{c^2a\sqrt{a^2-\varrho^2}}\right)=0.$$

Nun ist die Länge s einer geodätischen Linie, welche zwischen den Punkten x, X, denen die Werthe ϱ, Π entsprechen, sich erstreckt, wie man aus den von Herrn Beltrami gegebenen Formeln leicht erkennt, ausgedrückt durch:

$$\frac{\lambda}{c^2\sqrt{a^2-\varrho^2}\sqrt{a^2-\Pi^2}}=\frac{e^{\frac{s}{R}}-e^{\frac{-s}{R}}}{2}.$$

Mithin entspricht der durch (17) bestimmten Variation von λ die Variation $ds=0$.

Für den Raum constanten Krümmungsmasses bleibt demnach, wie aus den Gleichungen (16) *hervorgeht, die Monge'sche Construction der Richtungen der Krümmungslinien gültig. Gleichzeitig bleiben, wie zu erwarten war, die Längen der geodätischen Normalen, welche den Krümmungslinien entsprechen, constant;* dagegen stehen die Hauptkrümmungshalbmesser selbst zu diesen in keiner einfachen Beziehung mehr. Nur wenn $v=0$ ist, wird

$$\mu=\frac{\lambda R}{c^2a^2-\varrho^2}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{a^2-\Pi^2}{a^2-\varrho^2}}\left(e^{\frac{s}{R}}-e^{\frac{-s}{R}}\right).$$

Dann aber ist φ homogen in den Variabeln x, die Fläche $\varphi=0$ enthält ein ausgezeichnetes System geodätischer Linien des Raumes und einer der Hauptkrümmungshalbmesser ist unendlich gross.

Es möge endlich noch untersucht werden, ob die Abbildung des Normalensystemes, auf welche Gauss den Begriff des Krümmungsmasses einer Fläche begründete, in höheren Mannigfaltigkeiten, insbesondere bei denjenigen von constanter Krümmung, ihre Analogie findet. Den Richtungen der Krümmungslinien entsprechen Zuwachse der u_i, deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} du_1' & du_2' & \cdots & du_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ du_1^{n-1} & du_2^{n-1} & \cdots & du_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

durch Λ bezeichnet werden möge. Multiplicirt man Λ^2 mit Δ, so entsteht nach den bekannten Eigenschaften der Gleichungen, denen die du_i^k genügen, die Relation:

$$\Delta\Lambda^2 = ds_1^2\, ds_2^2 \cdots ds_{n-1}^2, \tag{18}$$

in welcher die ds_i die Längenelemente jener Fortschreitungsrichtungen bezeichnen. Da die letzteren auf einander senkrecht stehen, so kann das Product der ds_i als Inhalt eines Parallelepipeds dJ aufgefasst werden und man hat:

$$dJ = \Lambda\sqrt{\Delta}. \tag{19}$$

Wählt man zur Bestimmung der Mannigfaltigkeit die Richtungszahlen p_i der Normalen derselben, so kann man der Abbildung des Normalensystems auf die Kugelfläche, wie sie im gewöhnlichen Raume ausgeführt wird, die Gleichung:

$$\Sigma p_i p_k c_{ik} = 1$$

entsprechen lassen. Den Fortschreitungsrichtungen du_i^k entsprechen dabei die $dp_i^k = \sum \frac{\partial p_i}{\partial u_s} du_s^k$, mithin dem Element dJ ein Element dJ',

$$dJ' = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ dp_1' & dp_2' & \cdots & dp_n' \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ dp_1^{n-1} & dp_2^{n-1} & \cdots & dp_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Lambda'. \tag{20}$$

Setzt man:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial u_1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial p_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial p_2}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = \Lambda'',$$

so wird:

$$\Lambda' = \Lambda\Lambda''. \tag{21}$$

Ferner folgt aus:

$$\sum p_k c_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} = 0,$$

$$(22) \qquad \sum c_{ik} \frac{\partial p_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} = -\left(\Omega_{rs} + \sum p_k c_{lki} \frac{\partial x_l}{\partial u_s} \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\right) = -\Omega'_{rs}.$$

Beachtet man endlich, dass:

$$\Lambda''' = \begin{vmatrix} \sum c_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \cdots & \sum c_{nk} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \\ \vdots & & \\ \sum c_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \sum c_{nk} \frac{\partial x_k}{\partial u_{n-1}} \\ \sum c_{1k} p_k & \cdots & \sum c_{nk} p_k \end{vmatrix} = \sqrt{\delta \Delta},$$

so wird nach (22):

$$\Lambda'' \Lambda''' = \omega,$$

wo ω, abgesehen vom Zeichen, die Determinante der Ω'_{rs} bezeichnet. Aus (19) und (20) folgt jetzt:

$$(23) \qquad \frac{dJ'}{dJ} = \frac{\omega}{\Delta \sqrt{\delta}}.$$

Da dJ' nicht mehr zu beliebigen Transformationen des Raumes covariant sich verhält, so kann diese Formel nur unter speciellen Voraussetzungen für das Linienelement ds in Rücksicht auf die vorliegende Frage benutzt werden. Sind die c_{ik} Constanten, so werden die Ω'_{rs} den Ω_{rs} gleich und der Quotient (23) wird, wie bekannt, gleich dem reciproken Product der $n-1$ Hauptkrümmungshalbmesser, d. h. gleich dem Krümmungsmass der Fläche. Sind dagegen die c_{ik} Constanten proportional, $c_{ik} = X b_{ik}$, so wird:

$$\Omega'_{rs} = \Omega_{rs} + p\, a_{rs},$$

wo $p = \frac{1}{2X} \sum p_k X_k$.

Vergleicht man die Determinante ω mit der Gleichung $n-1^{\text{ten}}$ Grades $\Omega = 0$, so erhält man:

$$\frac{dJ'}{dJ} = \frac{(1+\varrho_1 p)(1+\varrho_2 p)\cdots(1+\varrho_{n-1} p)}{\sqrt{\delta}\; \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{n-1}},$$

wo die ϱ_i die $n-1$ Hauptkrümmungshalbmesser bezeichnen.

Wenn also auch hiernach eine weitere Verfolgung der Analogie bei Räumen von constantem Krümmungsmass fraglich erscheint, so soll trotzdem das *reciproke Product der Hauptkrümmungshalbmesser als Gauss' sches Krümmungsmass einer Fläche* allgemein bezeichnet werden.

§ VI.

Flächen mit verschwindendem Gauss'schen Krümmungsmasse. Developpabele Flächen.

Um eine wichtige Eigenschaft derjenigen Flächen zu erkennen, deren Gauss'sches Krümmungsmass verschwindet, gehen wir wieder zur Betrachtung der geodätischen Linien der M_n zurück.

Wenn man die Coordinaten einer geodätischen Linie der M_n, welche vom Punkte x ausgeht, durch:

$$z_k = x_k + \eta_k \tag{1}$$

bezeichnet, so ist die Bedingung, unter welcher dieselbe in der Fläche $\varphi = 0$ enthalten ist:

$$\varphi(z) = 0,$$

oder:

$$\varphi + \sum \eta_k \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} + \frac{1}{2} \sum \eta_i \eta_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_k} + \frac{1}{6} \sum \eta_i \eta_k \eta_l \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_i \partial z_k \partial z_l} + \cdots = 0. \tag{2}$$

Setzt man nun:

$$\eta_k = t \frac{dx_k}{dt} + \frac{1}{2} t^2 \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \frac{1}{6} t^3 \frac{d^3 x_k}{dt^3} + \cdots,$$

und entwickelt man (2) nach Potenzen von t, so ist, falls der Punkt x und die Anfangsrichtung der geodätischen Linie in der Fläche gewählt werden, die Bedingung der Berührung zweiten Grades, wie schon oben gefunden wurde:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 0. \tag{3}$$

Soll die Berührung auf den dritten Grad steigen, so muss ausserdem:

$$\sum \frac{1}{6} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{d^3 x_k}{dt^3} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \frac{\partial x_k}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_l}{dt} = 0 \tag{4}$$

werden. In den Gleichungen (3) und (4) sind die zweiten und dritten Differentialquotienten nach t durch ihre aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linien bestimmten Werthe zu ersetzen. Nun folgt aus:

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = - \sum \frac{\gamma_{rs}}{\delta} c_{ikr} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}$$

$$\frac{d^3 x_s}{dt^3} = - \sum \frac{d \dfrac{(\gamma_{rs} c_{ikr})}{\delta}}{\partial x_l} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_l}{dt} + \frac{\gamma_{rs}}{\delta} c_{ikr} \left(\frac{dx_i}{dt} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \frac{dx_k}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right).$$

Mithin wird die Bedingung (4):

$$-\frac{1}{6}\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\,\frac{\partial \frac{(\gamma_{rs} c_{ikr})}{\partial}}{\partial x_l}\,\frac{dx_l}{dt}\,\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dx_k}{dt}$$

$$+\frac{1}{3}\sum \frac{\gamma_{rs}}{\delta}\,c_{ikr}\,\frac{\gamma_{r'i}}{\delta}\,c_{i'k'r'}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\,\frac{dx_k}{dt}\,\frac{dx_{i'}}{dt}\,\frac{dx_{k'}}{dt}$$

$$-\frac{1}{2}\sum \frac{\gamma_{rk}}{\delta}\,c_{mnr}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dx_m}{dt}\,\frac{dx_n}{dt}$$

$$+\frac{1}{6}\sum \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\,\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dx_k}{dt}\,\frac{dx_l}{dt} = 0,$$

oder wenn man die Differentiation nach t entfernt:

$$(5)\quad \sum \frac{du_\alpha}{dt}\,\frac{du_\beta}{dt}\,\frac{du_\gamma}{dt}\left\{-\frac{1}{6}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\,\frac{\partial \frac{\gamma_{rs}}{\delta}}{\partial x_l}\,c_{ikr}\,\frac{\partial x_l}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\gamma}\right.$$

$$+\frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta}\,\frac{\partial x_l}{\partial u_\gamma}$$

$$+\frac{1}{3}\,\frac{\gamma_{rs}}{\delta}\,c_{ikr}\,\frac{\gamma_{r'i}}{\delta}\,c_{i'k'r'}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_{i'}}{\partial u_\beta}\,\frac{\partial x_{k'}}{\partial u_\gamma}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}$$

$$\left.-\frac{1}{2}\,\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\,c_{mnr}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_m}{\partial u_\beta}\,\frac{\partial x_n}{\partial u_\gamma}\right\} = 0.$$

Man kann diese Bedingung in eine andere Form bringen. Da:

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta} + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\,c_{mnr}\,\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta},$$

so wird:

$$\frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} = -\sum \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial u_\beta}\,\frac{\partial x_l}{\partial u_\gamma}$$

$$+\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,\frac{\partial \frac{\gamma_{rk}}{\delta}}{\partial x_l}\,c_{mnr}\,\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta}\,\frac{\partial x_l}{\partial u_\gamma}$$

$$-\sum \frac{\partial \left(\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta}\right)}{\partial u_\gamma}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_n} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\,c_{mnr}\right)$$

$$+\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\,c_{mnr}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\gamma}\,\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\,\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta},$$

und die Bedingung (5) nimmt, wenn man die dritten Differentialquotienten von φ eliminirt, die Form an:

$$(6)\quad \sum \frac{du_\alpha}{dt}\frac{du_\beta}{dt}\frac{du_\gamma}{dt}\Bigg\{\frac{1}{3}\left(\frac{\gamma_{rs}}{\delta}\, c_{ikr}\gamma_{r'i}\, c_{i'k'r'}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\frac{\partial x_k}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_{i'}}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_{k'}}{\partial u_\gamma}\right.$$

$$\left. -\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\, c_{mnr}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_m}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_n}{\partial u_\gamma}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma}-\frac{1}{6}\,\frac{\partial\left(\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta}\right)}{\partial u_\gamma}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_m\partial x_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\, c_{mnr}\right)\Bigg\}=0.$$

Hierin ist noch für die Differentialquotienten nach u_γ zu setzen:

$$(7)\quad \frac{\partial}{\partial u_\gamma}\left(\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta}\right)=\sum\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta}\left[\Omega_{\alpha\gamma}\lambda_m-\frac{1}{\delta}\,\gamma_{hm}\, c_{ik'h}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_{k'}}{\partial u_\gamma}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta}\, a_{\alpha\gamma m'}\, e_{m'n'}\,\frac{\partial x_m}{\partial u_{n'}}\right]$$

$$+\sum\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\left[\Omega_{\beta\gamma}\lambda_m-\frac{1}{\delta}\,\gamma_{hm}\, c_{ik'h}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_{k'}}{\partial u_\gamma}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta}\, a_{\beta\gamma m'}\, e_{m'n'}\,\frac{\partial x_n}{\partial u_{n'}}\right].$$

Führt man diesen Werth in (6) ein, so hebt sich in letzterer Gleichung das erste mit $\frac{1}{3}$ multiplicirte Glied unter dem Summationszeichen fort und es bleibt:

$$0=\sum\frac{du_\alpha}{dt}\frac{du_\beta}{dt}\frac{du_\gamma}{dt}\left\{\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_m\partial x_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\, c_{mnr}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta}\left[\Omega_{\alpha\gamma}\lambda_n\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{\Delta}\, a_{\alpha\gamma m'}\, e_{m'n'}\,\frac{\partial x_m}{\partial u_{n'}}\right]+\frac{\partial x_m}{\partial u_\alpha}\left[\Omega_{\beta\gamma}\lambda_n-\frac{1}{\Delta}\, a_{\beta\gamma m'}\, e_{m'n'}\,\frac{\delta x_n}{\partial u_{n'}}\right]\right)\right\},$$

oder nach gehöriger Zusammenziehung:

$$(8)\quad 0=\sum\frac{du_\alpha}{dt}\frac{du_\beta}{\partial t}\frac{du_\gamma}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_m\partial x_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\gamma_{rk}}{\delta}\, c_{mnr}\right)\frac{\partial x_n}{\partial u_\beta}\,\Omega_{\alpha\gamma}\lambda_n-\Omega_{n'\beta}\, a_{\alpha\gamma m'}\,\frac{e_{m'n'}}{\Delta}\right].$$

Sind demnach die Anfangsrichtungen du_ι so gewählt, dass die Gleichung (3) oder:

$$\Sigma\Omega_{\alpha\beta}\, du_\alpha\, du_\beta=0$$

und (8) erfüllt sind, so wird die entsprechende geodätische Linie die Fläche *vierpunktig* berühren.

Es möge jetzt angenommen werden, *dass das Krümmungsmass der Fläche in jedem Punkte verschwindet*, d. h.:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Omega_{n-1\,1} & \Omega_{n-1\,2} & \cdots & \Omega_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} = K\varphi.$$

In diesem Falle existirt in jedem Flächenpunkte eine ausgezeichnete Richtung, bestimmt durch die $n-1$ homogenen Gleichungen:

$$(10)\qquad \Sigma\Omega_{ik}\, du_k = 0.$$

Aus (10) folgt erstens:

$$(11)\qquad \Sigma\Omega_{ik}\, du_i\, du_k = 0,$$

ferner, wenn man die ersten Unterdeterminanten der Determinante (9) durch ω_{ik} bezeichnet:

$$(12)\qquad du_i\, du_k = N\omega_{ik}.$$

Die Gleichung (11) sagt aus, dass nach jener Richtung eine geodätische Linie Haupttangente der Fläche ist. Ferner folgt aus der Gleichung (9) durch Differentiation nach u_α

$$\sum \frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial u_\alpha}\, \omega_{ik} = 0$$

oder nach (12):

$$(13)\qquad \sum \frac{\partial\Omega_{ik}}{\partial u_\alpha}\, du_i\, du_k = 0.$$

Führt man die Gleichungen (11) und (13) in die Bedingung (8) ein, so wird dieselbe erfüllt. Hieraus folgt:

Verschwindet das Gauss'sche Krümmungsmass einer Fläche, welche in einem willkürlich bestimmten Raume betrachtet wird, so enthält dieselbe in jedem Punkte eine ausgezeichnete Richtung, längs welcher eine geodätische Linie des Raumes vierpunktig berührt. In dem besonderen Falle, wo $n = 3$ ist, sagt das Verschwinden der Determinante der Ω_{rs} aus, dass die beiden Haupttangentenrichtungen zusammenfallen. Da nun längs der Richtung dieser zusammenfallenden Haupttangenten zugleich eine vierpunktige Berührung mit einer geodätischen Linie stattfindet, so ergiebt sich, *dass die Fläche $\varphi = 0$ genau so aus den geodätischen Linien des Raumes gebildet ist, wie eine Developpabele des gewöhnlichen Raumes aus den geraden Linien desselben. Hiernach ist erwiesen, dass für das Gebiet von drei Dimensionen, welches auch der Ausdruck des durch eine quadratische Function der Differentiale dargestellten Längenelementes ist, das Verschwinden des Gauss'schen Krümmungsmasses den wesentlichen Charakter der developpabelen Flächen bedingt, nach welcher dieselben Regelflächen sind, die aus lauter singulären Erzeugenden bestehen.* — Man würde ebenso für $n = 3$ *die Differentialgleichung der Regelflächen* überhaupt erhalten, wenn man die Bedingung bildet, unter welcher die quadratische Gleichung (3) und die cubische Gleichung (8) für ein gemeinsames System der du_1, du_2 erfüllt sind.

Die Flächen mit verschwindendem Krümmungsmasse können freilich nur in sehr uneigentlichem Sinne als *Developpabele* bezeichnet werden. Herr Bonnet hat bekanntlich bewiesen*), dass bei der Abwickelung einer windschiefen Fläche in eine andere im gewöhnlichen Raume die Geraden der Fläche nothwendig Gerade bleiben. Die Developpabelen machen hiervon eine Ausnahme: sie können so gebogen werden, dass ihre Erzeugenden wieder Erzeugende werden; die Biegung kann aber auch so vor sich gehen, dass an Stelle derselben irgend welche (krumme) geodätische Linien der Fläche entstehen. Der Gauss'sche Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses lehrt, dass in diesem Falle ein anderes System von geodätischen Linien der Fläche in gerade Linien übergeht und die Erzeugenden der transformirten Fläche bildet.

Wenn wir die allgemeinen Betrachtungen des vorliegenden Paragraphen wieder aufnehmen, so folgt:

Bei allen Transformationen des Raumes, d. h. bei beliebiger Transformation der x Coordinaten, bleiben die sämmtlichen Ω_{rs} ihrer Form nach unverändert; mithin entstehen, was übrigens selbstverständlich ist, aus developpabelen Flächen wieder Developpable. Kann der Raum in sich transformirt werden, so wird eine Biegung der Developpabelen erfolgen, welche man als eine wirkliche, nach willkürlichem Gesetze erfolgende Abwickelung auffassen kann, wenn der Raum ein System von unendlich kleinen Transformationen in sich zulässt. Dies ist insbesondere der Fall bei den Räumen constanten Riemann'schen Krümmungsmasses.

Wenn wir die auf Seite 162 gewählte Form des Längenelementes beibehalten (an deren Stelle aber ersichtlich jede andere treten kann, welche überhaupt die Riemann'schen Differentialgleichungen der Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsmasses befriedigt), so ist:

$$[ikk'i']_c = -cm(c_{ik}c_{i'k'} - c_{i'k}c_{ik'}),$$

mithin wird:

$$\sum [lkti]_c \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_l}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_t}{\partial u_q} = cm(a_{rs}a_{pq} - a_{ps}a_{rq}).$$

Für Mannigfaltigkeiten constanter Riemann'scher Krümmung gilt also, wie aus der Betrachtung der Gleichungen § II. (B) *hervorgeht, das meines Wissens bisher nicht ausgesprochene wichtige Theorem, dass die sämmtlichen Ausdrücke:*

---

*) Journal de l'École polytechnique, Tome XXV.

$$\Sigma \lambda_{ik} \lambda_{jl} c_{kl} [\Omega_{pqi} \Omega_{rsj} - \Omega_{psi} \Omega_{rqj}]$$

lediglich von den Coefficienten a_{rs} *des Linienelementes in der durch eine beliebige Zahl von Bedingungen ausgeschiedenen* M_m *abhängen. Hiernach ist das Krümmungsmass einer Fläche ebenfalls eine reine Function jener Coefficienten, mithin für* $n = 3$ *bei allen Biegungen der Fläche unveränderlich.* Ebenso gelten hier die oben besprochenen Eigenschaften der developpabelen Flächen.

Im Allgemeinen dagegen wird eine Fläche, welche wir oben als „developpabel" bezeichneten, bei beliebigen Biegungen derselben *nicht* wieder in eine Fläche derselben Art übergehen. Hierzu würde vielmehr erforderlich sein, dass auch der Ausdruck:

$$\sum [lkti]_c \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{\partial x_l}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \frac{\partial x_t}{\partial u_1}$$

denselben Werth beibehält, wenn statt der x die Coordinaten eines Punktes der ursprünglichen oder die des entprechenden der gebogenen Fläche als Functionen der u_1, u_2 eingesetzt werden.

Es entsteht nun die Frage, *welches bei einer beliebigen Zahl der Dimensionen die charakteristischen Gleichungen einer Developpabelen sind?* Zur Beantwortung derselben leitet die folgende Untersuchung.

Wir betrachten die Flächenschaar mit der Krümmung Null:

$$\Psi(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0,$$

in welcher die willkürlichen Constanten den Parameter t enthalten. Wird die Enveloppe dieser Schaar gesucht, so ist t aus:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

zu eliminiren. Das Resultat der Elimination sei $\varphi = 0$. Zur Untersuchung der Krümmungsverhältnisse von φ sind die Ausdrücke Ω_{rs} zu bilden. Nun folgt aus den Gleichungen (14):

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u_s}\right) = 0, \\ &\sum \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_s \partial u_r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial t}{\partial u_r}\right) = 0, \\ &\sum \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \partial u_s} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial t}{\partial u_s}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

mithin:

$$\sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial t}{\partial u_r} = \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial t}{\partial u_s}. \tag{16}$$

Aber nach der Voraussetzung, dass die Flächen ψ nach jeder Richtung hin eine Krümmung gleich Null besitzen, ist:

$$\sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} = \sum \frac{\gamma_{mh}}{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial x_m} c_{ikh} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \frac{\partial x_i}{\partial u_s},$$

demnach wird aus den Gleichungen (15)

$$\sum \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \left[\frac{\gamma_{mh}}{\delta} c_{ikh} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_r \partial u_s} \right] = - \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial t}{\partial u_r}$$
$$= - \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial t}{\partial u_s},$$

Bezeichnet man jetzt die Determinante n^{ter} Ordnung, bei welcher die ersten $n-1$ Reihen aus den $\frac{\partial x_i}{\partial u_r}$, die letzte aus beliebigen Grössen x_i gebildet ist, mit V, so ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = q \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

wo q ein Proportionalitätsfactor. Multiplicirt man dann den Ausdruck:

$$q \sum \frac{\partial V}{\partial x_m} \left(\frac{\gamma_{mh}}{\delta} c_{ikh} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} + \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_r \partial u_s} \right)$$

mit der Determinante D, deren $n-1$ erste Reihen aus den

$$\sum c_{im} \frac{\partial x_m}{\partial u_r},$$

die letzte aus den $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ gebildet ist, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{q\Delta}{D} \Omega_{rs} = - \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_s} \frac{\partial t}{\partial u_r} = - \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial t}{\partial u_s}.$$

Mithin besteht die Gleichung:

(17) $$\Omega_{rs} \Omega_{pq} - \Omega_{rq} \Omega_{ps} = 0,$$

d. h. es verschwinden alle zweireihigen Determinanten, welche aus den Grössen Ω_{rs} gebildet werden können.

Nun schneiden sich je zwei consecutive Flächen $\psi = 0$ *und* $\psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = 0$ *der Schaar in einer Mannigfaltigkeit von geodätischen Linien der* M_n. Um den Sinn dieser Behauptung genauer zu präcisiren, betrachten wir den Durchschnitt von $n-1$ Flächen, $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_h, \cdots \Theta_{n-1}$, welche die Krümmung Null besitzen. Alsdann ist:

(18) $$\Omega^h_{pq} = \sum \frac{\partial \Theta_h}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_p \partial u_q} + \sum \frac{\partial \Theta_h}{\partial x_m} \frac{\gamma_{mh}}{\delta} c_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial x_k}{\partial u_q} = 0.$$

Da ferner der Schnitt eine Mannigfaltigkeit von einer Dimension ist, deren Längenelement durch dt bezeichnet sein möge, so ist:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_p \partial u_q} \frac{d u_p}{dt} \frac{d u_q}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{d^2 u_q}{dt^2} + \frac{\partial x_i}{\partial u_q} \frac{d^2 u_p}{dt^2},$$

also folgt aus (18):

$$\sum \frac{\partial \Theta_h}{\partial x_m} \left[\frac{d^2 x_m}{dt^2} + \frac{\gamma_{mh}}{\delta} c_{ikh} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} \right] = 0,$$

also:

$$(19) \qquad \frac{d^2 x_m}{dt^2} + \frac{\gamma_{mh}}{\delta} c_{ikh} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = \mu \frac{dx_m}{dt}.$$

Soll aber t die Länge der Schnittcurve bezeichnen, so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \sum c_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 0,$$

dass $\mu = 0$ sein muss. Mithin ist jede solche Durchschnittscurve eine geodätische Linie des Raumes, wie es allerdings vorauszusehen war.

*Demnach kann die Fläche $\varphi = 0$ als Analogon einer Developpabelen betrachtet werden, insofern sie wie eine solche aus geodätischen Linien der M_n erzeugt ist.**) Da alle zweireihigen Determinanten der Ω_{rs} verschwinden, so bewahrt eine Developpabele die Eigenschaft, *dass $n-2$ ihrer Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte unendlich gross werden, und nur einer der Hauptkrümmungshalbmesser einen endlichen Werth besitzt.*

Die vorige Betrachtung setzt nach den Untersuchungen des § IV. eine gewisse specielle Eigenschaft der M_n voraus. Ob das Verschwinden der sämmtlichen zweireihigen Determinanten der Ω_{rs} auch in dem Falle, wo keine „Ebenen" im Raume vorhanden sind, noch Developpabele im analogen Sinne charakterisirt, muss für die Fälle $n > 3$ einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

§ VII.

Das Gauss'sche Krümmungsmass und die Hesse'sche Determinante.

Die sämmtlichen Formeln der vorhergehenden Paragraphen setzen voraus, dass an Stelle der Coordinaten $x_1 \cdots x_n$ ein System von inde-

---

*) In höheren Räumen lässt sich der Begriff von „Developpabelen" — überhaupt von „Regelflächen" — auf sehr verschiedenartige Weise erweitern. Der im Texte eingeschlagene Weg, nach welchem eine „Developpabele" die grösstmöglichste Mannigfaltigkeit von „geradesten" Linien besitzt, schien mir der zunächst sich darbietende. Die weitere Behandlung, insbesondere die Untersuchung der Flächen, welche eine ein- oder mehrfach unendliche Schaar von geodätischen Linien des Raumes enthalten, muss ich auf eine demnächstige Gelegenheit verschieben.

pendenten Variabeln $u_1 \cdots u_{n-1}$ eingeführt ist (*Gauss'sche Coordinaten*). Da es vortheilhaft sein kann, von dieser Transformation abzusehen, so sollen hier noch einige Formeln angegeben werden, von denen auch in der Geometrie des gewöhnlichen Raumes Gebrauch gemacht werden kann.

Man kann die Determinante der Ω_{ik} in Beziehung setzen zu einer aus den zweiten Differentialquotienten von φ gebildeten Determinante, welche als *Erweiterung der Hesse'schen Determinante* anzusehen ist.

Setzt man:

$$v = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{vmatrix}, \quad v' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \\ \beta_1' & \cdots & \beta_n' \end{vmatrix},$$

ferner:

$$D = \begin{vmatrix} \sum c_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \\ \vdots \\ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \gamma_{mk} \end{vmatrix},$$

so wird:

$$(1) \qquad vD = \Delta \sum \beta_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad v'D = \Delta \sum \beta_i' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Wir betrachten nun die mit beliebigen Grössen α_i, δ_i, p horizontal und vertical geränderte Determinante:

$$(2) \qquad G = \begin{vmatrix} \varphi_{ik} & \delta_i \\ \alpha_k & p \end{vmatrix},$$

in welcher

$$\varphi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{\delta} \sum \gamma_{mh} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} c_{ikh}$$

zu setzen ist.

Multiplicirt man G in geeigneter Weise mit v und v', so entsteht die für ganz beliebige p, α_i, δ_i, β_i, β_i' geltende Identität:

$$(3) \qquad G \frac{\Delta^2}{D^2} \sum \beta_i \beta_k' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\Omega_{11} & \cdots & -\Omega_{1\,n-1} & g_1' & \sum \alpha_i \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ -\Omega_{n-1,1} & \cdots & -\Omega_{n-1\,n-1} & g_{n-1}' & \sum \alpha_i \frac{\partial x_i}{\partial u_{n-1}} \\ g_1 & \cdots & g_{n-1} & g & \Sigma \alpha \beta \\ \sum \delta_i \frac{\partial x_i}{\partial u_1} & \cdots & \sum \delta_i \frac{\partial x_i}{\partial u_{n-1}} & \sum \delta \beta' & p \end{vmatrix}$$

in welchen gesetzt ist:

$$g_r = \sum \varphi_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \beta_k, \quad g_r' = \sum \varphi_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \beta_k',$$

$$g = \sum \varphi_{ik} \beta_i \beta_k'.$$

Setzt man $p = 0$, $\alpha_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \delta_i$, so wird aus G die Hesse'sche Determinante H, mithin ist:

$$H \frac{\Delta^2}{D^2} = (-1)^n \omega, \tag{4}$$

worin ω die Determinante der Ω_{rs} bedeutet.

Ohne auf die weiteren Gleichungen einzugehen, welche sich aus (3) durch Coefficientenvergleichung ableiten lassen, bemerken wir noch Folgendes. Versieht man G noch mit q Rändern, so erhält diese Determinante rechter Hand in (3) $q + 2$ Ränder. Hiernach kann man aus dem Verschwinden der Unterdeterminanten aus den Ω_{ik} auf das der aus den φ_{ik} gebildeten Unterdeterminanten schliessen.

Verschwinden z. B. alle Ω_{ik}, so kann man $q = n - 4$ setzen, wenn die rechte Seite von (3) noch verschwinden soll. *Mithin müssen die Gleichungen einer Ebene stets der Bedingung genügen, dass die sämmtlichen dreireihigen Determinanten der φ_{ik} verschwinden, oder dass die quadratische Form*

$$\Sigma \varphi_{ik} y_i y_k$$

das Product zweier in y linearen Formen ist. Verschwinden nur die zweireihigen Determinanten der Ω_{ik}, so ergiebt sich als *eine wesentliche Eigenschaft der developpabelen Flächen, dass alle vierreihigen Determinanten der φ_{ik} verschwinden.* Wählt man dagegen $p = 0$, $\alpha_i = \delta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, so kann man im ersten Falle $n = 3$ setzen *und es müssen dann für Ebenen alle zweireihigen Determinanten der φ_{ik}, mit einem Rande zugehöriger $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ versehen, verschwinden, während für developpabele Flächen nur die dreireihigen Determinanten der φ_{ik}, gerändert mit den $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, Null zu sein brauchen.* Diese Beziehungen scheinen von Interesse, da sie, falls überhaupt die Ω_{ik} jene Voraussetzungen erfüllen, welches gleichzeitig von der Beschaffenheit des Linienelementes abhängen kann, Bedingungen für die Form der Function φ liefern.

In dem besonderen Falle der Mannigfaltigkeiten *constanten Riemann'schen Krümmungsmasses* ist

$$\sum \frac{\gamma_{mi}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} c_{lki} = \frac{1}{a^2 - \varrho^2} \left(x_l \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right).$$

Mithin wird die Hesse'sche Determinante dieselbe Form wie im gewöhnlichen Raume besitzen, d. h. durch die aus den zweiten mit einem Rande von ersten Differentialquotienten gebildete Determinante dargestellt sein. In dem allgemeineren Falle:

$$c_{ik} = x b_{ik},$$

wird dagegen das Verschwinden des Krümmungsmasses durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + \varrho b_{ik} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ausgedrückt sein, in welcher

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum X_i \frac{\gamma_{mi}}{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$$

gesetzt ist.

Es ist oben der Eigenschaft der Ω_{ik} gedacht worden, in Beziehung auf beliebige Transformationen der x absolute Covarianten zu sein. Dieselbe Eigenschaft muss daher der linken Seite der Gleichung (4) zukommen. In der That findet man leicht durch Anwendung der Relationen, welche bei der Untersuchung der Transformation der Ω_{ik} gegeben sind, dass (die transformirten Ausdrücke seien wieder durch Striche, die neuen Variabeln durch y bezeichnet):

$$\varphi'_{mn} = \sum \varphi_{ik} \frac{\partial x_m}{\partial y_i} \frac{\partial x_n}{\partial y_k}$$

wornach:

$$H T^2 = H'$$

wird. Da

$$D^2 = \delta \Delta U, \quad U = U', \quad \Delta = \Delta'$$

ist, so ist:

$$H \frac{\Delta^2}{D^2}$$

eine absolute Covariante, wie es sein muss. Während also bei beliebigen nicht linearen Transformationen die gewöhnliche Hesse'sche Determinante keine Covariante ist, *bewahrt dieselbe diese Eigenschaft, sobald sie in der erweiterten Gestalt angenommen wird*, *die derselben nach Adjunction des Längenelementes zukommt.* Hiernach erkennt man ohne Weiteres, *dass das Verschwinden der Hesse'schen Determinante oder eines vollständigen Systems von Unterdeterminanten derselben eine bei allen Transformationen des Raumes unzerstörbare Beziehung zur Metrik derselben darstellt.*

Endlich kann man die Gleichung Ω, welche die $n-1$ Hauptkrümmungshalbmesser bestimmt, auch in der von den u unabhängigen Gestalt:

$$\begin{vmatrix} c_{ik} + \mu \varphi_{ik} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geben, wo:

$$\mu = \frac{\lambda}{\sqrt{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_m} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} \dfrac{\gamma_{mn}}{\delta}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{U}}$$

gesetzt ist.

Dresden, October 1879.