Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes.

Von **Edmund Landau** in Berlin.

Herr Tauber hat im achten Bande dieser Monatshefte [1]) den wichtigen Satz über Potenzreihen bewiesen:

Es sei $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ eine Folge komplexer Größen, welche der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} n\, a_n = 0 \tag{1}$$

genügen; es sei $f(x)$ die wegen (1) mindestens für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

und es werde vorausgesetzt, daß für reelle wachsende x

$$\lim_{x=1} f(x) = A$$

existiert. Alsdann konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2}$$

und es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A.$$

Aus der Konvergenz von (2) folgt nach dem Abelschen Stetigkeitssatze die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x=1} f(x)$$

von selbst. Das Wesentliche des Tauberschen Satzes liegt in der

---

1) „Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen", 1897, S. 274—275.

Tatsache, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Reihe (2) konvergiert.

Es ist mir nun gelungen, ein Analogon dieses Satzes in der Theorie der Dirichletschen Reihen und einiger anderer Arten von Reihen aufzufinden und durch Kunstgriffe zu beweisen, welche den von Herrn Tauber für Potenzreihen angewandten ähnlich sind. Auch für Potenzreihen wird im folgenden der Taubersche Satz etwas verallgemeinert werden.

Zunächst besteht der Satz:

Es sei $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ eine Folge komplexer Größen, welche der Bedingung

$$\lim_{n=\infty} n \log n \, a_n = 0 \tag{3}$$

genügen; es sei $f(x)$ die wegen (3) mindestens für $\Re(x) > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x},$$

und es werde vorausgesetzt, daß für positive abnehmende x

$$\lim_{x=0} f(x) = A$$

existiert. Alsdann konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{4}$$

und es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A.$$

Daß im Falle der Konvergenz von (4) die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x=0} f(x)$$

besteht, ist nach dem zuerst von Herrn Cahen[1]) bewiesenen Analogon zum Abelschen Satze selbstverständlich; der springende Punkt besteht im Konvergenzbeweise für die Reihe (4), den ich folgendermaßen führe.

---

[1]) „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 11, 1894, S. 86—87.

Nach Voraussetzung existiert für positives, zu Null abnehmendes x der Grenzwert von $f(x)$; insbesondere existiert also, wenn x die Folge der Werte $\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 3}, \ldots, \frac{1}{\log \nu}, \ldots$ durchläuft, der Grenzwert von $f\left(\frac{1}{\log \nu}\right)$ für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes ν, und es ist

$$\lim_{\nu=\infty} f\left(\frac{1}{\log \nu}\right) = A.$$

Nun ist

$$f\left(\frac{1}{\log \nu}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{\log \nu}}} = \sum_{n=1}^{\nu} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{\log \nu}}} + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{\log \nu}}} = \varphi(\nu) + \psi(\nu),$$

wo

$$\sum_{n=1}^{\nu} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{\log \nu}}} = \varphi(\nu),$$

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{\log \nu}}} = \psi(\nu)$$

gesetzt ist; daher ist

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\varphi(\nu) + \psi(\nu)\right) = A. \tag{5}$$

Es sei τ_ν der größte der Werte[1])

$(\nu+1)\log(\nu+1)\,|a_{\nu+1}|,\ (\nu+2)\log(\nu+2)\,|a_{\nu+2}|,\ \ldots$ ad inf.

Dann ist nach (3)

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_\nu = 0$$

und

$$|\psi(\nu)| = \left| \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{n \log n\, a_n}{n^{1+\frac{1}{\log \nu}} \log n} \right| < \tau_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\log \nu}} \log n}$$

$$< \frac{\tau_\nu}{\log \nu} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\log \nu}}} < \frac{\tau_\nu}{\log \nu} \int_{\nu}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{1}{\log \nu}}}$$

$$= \frac{\tau_\nu}{\log \nu} \frac{1}{\frac{1}{\log \nu}} \frac{1}{\nu^{\frac{1}{\log \nu}}} = \frac{\tau_\nu}{e} < \tau_\nu,$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} \psi(\nu) = 0,$$

[1]) Es würde genügen, von der oberen Grenze dieser Werte zu sprechen; doch gibt es unter ihnen nach (3) offenbar einen Maximalwert, der einmal oder endlich oft vorkommt.

folglich in Verbindung mit (5)

(6) $$\lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A.$$

Andererseits ist für alle $u \geqq 1$

$$1 - \frac{1}{u} \leqq \log u,$$

also für alle Paare ganzer Zahlen $n \geqq 1$, $\nu \geqq 2$

$$1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{\log \nu}}} \leqq \frac{\log n}{\log \nu}.$$

Daher ergibt sich

$$\left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n - \varphi(\nu)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{\log \nu}}}\right)\right| \leqq \frac{1}{\log \nu} \sum_{n=1}^{\nu} |a_n| \log n$$

und, wenn

$$n \log n \, |a_n| = \varepsilon_n$$

gesetzt wird,

(7) $$\left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n - \varphi(\nu)\right| \leqq \frac{1}{\log \nu} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Nach (3) ist

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\log \nu} \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\varepsilon_n}{n} = 0$$

und in Verbindung mit (7)

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\sum_{n=1}^{\nu} a_n - \varphi(\nu)\right) = 0,$$

folglich wegen (6)

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{\nu} a_n = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A,$$

womit der auf S. 9 ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Es liegt nahe, zu vermuten, daß der Tauber sche und der soeben bewiesene Satz sich beide als Spezialfälle eines allgemeineren auffassen lassen; wenigstens sind die Potenzreihen

(8) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

und die Dirichletschen Reihen

(9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

Spezialfälle der Dirichletschen Reihen im weiteren Sinne

(10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ eine Folge monoton ins Unendliche wachsender reeller Größen ist. In der Tat geht (10) in (8) über, wenn

$$\lambda_n = n$$

gesetzt und x statt e^{-x} geschrieben wird, und (9) ist der Spezialfall

$$\lambda_n = \log n$$

von (10). Es besteht nun tatsächlich für die Reihen (10) der Satz, bei dessen Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda_1 > 0$ angenommen werden kann:

Es sei

(11)
$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} a_n = 0,$$

so daß die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$$

jedenfalls für $\Re(x) > 0$ konvergiert[1]); es existiere ferner für positive abnehmende x

$$\lim_{x=0} f(x) = A.$$

Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

und es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A.$$

---

[1]) In der Tat ist bekanntlich (nach Abel) für alle $x > 0$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n^{1+x}}$ konvergent, also a fortiori $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n e^{\lambda_n x}}$; daher konvergiert nach (11) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$ für $\Re(x) > 0$, sogar absolut. Dagegen folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für kein System $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ aus (11) allein, da bekanntlich (nach Herrn Dini) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ stets divergiert, also auch divergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ mit $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ vorhanden sind.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert speziell

$$\lim_{\nu=\infty} f\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) = A;$$

ich zerlege die Summe

$$f\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}}$$

in zwei Teile

$$f\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right) = \varphi(\nu) + \psi(\nu),$$

wo

$$\varphi(\nu) = \sum_{n=1}^{\nu} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}},$$

$$\psi(\nu) = \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}}$$

ist; dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\varphi(\nu) + \psi(\nu)\right) = A.$$

Es sei τ_ν der größte der Werte

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |a_n|$$

für $n \geqq \nu + 1$; dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_\nu = 0$$

und

$$|\psi(\nu)| \leqq \sum_{n=\nu+1}^{\infty} |a_n| e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}} = \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |a_n| \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}}$$

$$< \tau_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}} < \frac{\tau_\nu}{\lambda_\nu} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}}$$

$$= \frac{\tau_\nu}{\lambda_\nu} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} du < \frac{\tau_\nu}{\lambda_\nu} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} e^{-\frac{u}{\lambda_\nu}} du = \frac{\tau_\nu}{\lambda_\nu} \int_{\lambda_\nu}^{\infty} e^{-\frac{u}{\lambda_\nu}} du$$

$$= \frac{\tau_\nu}{\lambda_\nu} \lambda_\nu e^{-1} = \frac{\tau_\nu}{e} < \tau_\nu,$$

folglich

$$\lim_{\nu=\infty} \psi(\nu) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A. \tag{12}$$

Andererseits ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n - \varphi(\nu)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n \left(1 - e^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}}\right)\right| \leqq \sum_{n=1}^{\nu} |a_n| \frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}$$

$$= \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{n=1}^{\nu} |a_n| \lambda_n = \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{n=1}^{\nu} \varepsilon_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}), \tag{13}$$

wo

$$\varepsilon_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |a_n|$$

gesetzt ist. Nach der Annahme (11) ist

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

also [1])

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\nu} \varepsilon_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\lambda_\nu} = 0. \tag{14}$$

Aus (12), (13) und (14) ergibt sich

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\sum_{n=1}^{\nu} a_n - \varphi(\nu)\right) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{\nu} a_n = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A,$$

was zu beweisen war.

---

[1]) Dies ist leicht direkt einzusehen und im übrigen eine Folge des Satzes von Stolz („Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", Bd. 1, 1885, S. 173—174; Stolz-Gmeiner, „Einleitung in die Funktionentheorie", 1. Abt., 1904, S. 31): „Wenn λ_ν monoton ins Unendliche wächst und

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\varkappa_\nu - \varkappa_{\nu-1}}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}} = K$$

existiert, so existiert $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{\varkappa_\nu}{\lambda_\nu}$ und ist $= K$." In der Tat ist für

$$\varkappa_\nu = \sum_{n=1}^{\nu} \varepsilon_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\varkappa_\nu - \varkappa_{\nu-1}}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}} = \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0,$$

woraus (14) folgt.

Es muß auffallen, daß weder bei Herrn Taubers Beweise seines Satzes noch bei den vorangegangenen Entwicklungen die Voraussetzung der Existenz von $\lim_{x=1} f(x)$ bezw. $\lim_{x=0} f(x)$ in vollem Umfange benutzt wird, sondern nur die Existenz von $\lim_{\nu=\infty} f\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$ bezw. $\lim_{\nu=\infty} f\left(\frac{1}{\log \nu}\right)$ und $\lim_{\nu=\infty} f\left(\frac{1}{\lambda_\nu}\right)$. Dies besagt wirklich weniger; z. B. die Potenzreihe

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

hat im Einheitskreise die Nullstellen $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, 1-\frac{1}{\nu}, \ldots,$ so daß

$$\lim_{\nu=\infty} f\left(1-\frac{1}{\nu}\right) = 0$$

ist; trotzdem existiert

$$\lim_{x=1} f(x)$$

nicht. [1])

Ich werde nunmehr zunächst für Potenzreihen den allgemeineren Satz beweisen:

Erstens sei

(1) $$\lim_{n=\infty} n\, a_n = 0.$$

Zweitens existiere

$$\lim_{\nu=\infty} f(x_\nu) = A$$

für irgend eine abzählbare Folge von Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ im Einheitskreise ($|x_\nu| < 1$), welche den Bedingungen genügen, daß,

$$x_\nu = 1 - \frac{1}{\sigma_\nu} e^{\varphi_\nu i} \quad \left(\sigma_\nu > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi_\nu < \frac{\pi}{2}\right)$$

---

[1]) Natürlich ist in diesem Beispiel die Bedingung (1) nicht erfüllt; sonst würde ja nach Herrn Taubers Entwicklungen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren, also $\lim_{x=1} f(x)$ doch existieren.

gesetzt,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\sigma_\nu} = 0,$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} x_\nu = 1,$$

und

$$\limsup_{\nu=\infty} |\varphi_\nu| < \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

ist.[1]) Dann wird behauptet, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} a_n$$

existiert und $= A$ ist.

Falls unter den Werten $[\sigma_\nu]$ alle ganzen Zahlen[2]) von einer gewissen an vorkommen, liefert der Satz die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Er liefert sie also insbesondere unter der Voraussetzung, daß (1) erfüllt ist und daß bei Annäherung auf einer geradlinigen Bahn von ξ bis 1 (wo $|\xi| < 1$ ist) $\lim f(x)$ existiert.[3]) Überhaupt genügt es für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, daß (1) erfüllt ist, und daß $\lim f(x)$ für irgend eine stetige Kurve $x = 1 - \frac{1}{\sigma} e^{\varphi i}$ im Einheitskreise existiert, welche in $x = 1$ endigt und einem Winkelraum $-\frac{\pi}{2} + \alpha < \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha$ $(\alpha > 0)$ angehört;[4]) denn auf ihr

---

1) Aus diesen Annahmen folgt ohne weiteres, daß auch die obere Grenze von $|\varphi_\nu|$ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.

2) Es genügt sogar, daß unter den Werten $[\sigma_\nu]$ eine monoton wachsende Folge ganzer Zahlen $g_1, g_2, \cdots, g_\varrho, \cdots$ vorkommt, für welche $\limsup_{\varrho=\infty} \frac{g_{\varrho+1}}{g_\varrho}$ endlich ist.

3) Die für diesen Satz von Herrn Jahraus in seiner verdienstvollen Arbeit „Das Verhalten der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, historisch-kritisch dargestellt", Programm des Kgl. humanist. Gymnasiums Ludwigshafen am Rhein für das Schuljahr 1901/02, auf S. 53—54 gegebene Begründung enthält mehrere Irrtümer.

4) Die von mehreren Autoren (bei dem analogen Problem der Verallgemeinerung des Abelschen Stetigkeitssatzes) angewandte Ausdrucksweise „eine beliebige Kurve, die den Einheitskreis nicht berührt" ist nicht korrekt; denn eine Kurve, welche im Punkte 1 keine Tangente hat und der Bedingung

$$\limsup_{x=1} |\varphi| = \frac{\pi}{2}$$

genügt, ist eine „nicht berührende" Kurve, und doch gelten für sie die betreffenden Schlüsse nicht.

kann ja eine abzählbare Punktmenge x_ν gewählt werden, welche die Bedingungen der S. 15—16 erfüllt, und für welche von einem gewissen Index an $[\sigma_\nu] = \nu$ ist.

Der Beweis des auf S. 15—16 ausgesprochenen Satzes lautet folgendermaßen:

Es ist

$$f(x_\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_\nu^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{\sigma_\nu} e^{\varphi_\nu i}\right)^n = \varphi(\nu) + \psi(\nu),$$

wo

$$\varphi(\nu) = \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} a_n \left(1 - \frac{1}{\sigma_\nu} e^{\varphi_\nu i}\right)^n,$$

$$\psi(\nu) = \sum_{n=[\sigma_\nu]+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{\sigma_\nu} e^{\varphi_\nu i}\right)^n$$

gesetzt ist.[1] Es sei τ_ν der größte der Werte $|n a_n|$ für $n \geqq [\sigma_\nu] + 1$; dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_\nu = 0$$

und

$$|\psi(\nu)| \leqq \tau_\nu \sum_{n=[\sigma_\nu]+1}^{\infty} \frac{1}{n} |x_\nu|^n \leqq \frac{\tau_\nu}{\sigma_\nu} \sum_{n=[\sigma_\nu]+1}^{\infty} |x_\nu|^n = \frac{\tau_\nu}{\sigma_\nu} \frac{|x_\nu|^{[\sigma_\nu]+1}}{1 - |x_\nu|}$$

$$< \frac{\tau_\nu}{\sigma_\nu} \frac{1}{1 - |x_\nu|}.$$

Nach (15) gibt es, da kein φ_ν gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ ist, eine positive Größe p, so daß für alle ν

$$\cos \varphi_\nu > p$$

ist; daher ist

$$|x_\nu|^2 = 1 - \frac{2}{\sigma_\nu} \cos \varphi_\nu + \frac{1}{\sigma_\nu^2} < 1 - \frac{2}{\sigma_\nu} p + \frac{1}{\sigma_\nu^2},$$

also für alle ν von einer gewissen Stelle an

$$|x_\nu|^2 < 1 - \frac{1}{\sigma_\nu} p + \frac{p^2}{4\sigma_\nu^2},$$

$$|x_\nu| < 1 - \frac{p}{2\sigma_\nu},$$

$$|\psi(\nu)| < \frac{\tau_\nu}{\sigma_\nu} \frac{1}{\frac{p}{2\sigma_\nu}} = \frac{2\tau_\nu}{p};$$

folglich ist

$$\lim_{\nu=\infty} \psi(\nu) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = \lim_{\nu=\infty} f(x_\nu) = A.$$

Andererseits ist für komplexe x im Einheitskreise und ganzzahlige $n \geqq 1$

$$|1 - x^n| = |1 + x + \cdots + x^{n-1}|\,|1 - x| \leqq n\,|1 - x|,$$

also

$$\left|\sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} a_n - \varphi(\nu)\right| \leqq \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} |a_n|\,|1 - x_\nu^n| \leqq \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} |a_n|\, n\, |1 - x_\nu|$$

$$= \frac{1}{\sigma_\nu} \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} |a_n|\, n = \frac{1}{\sigma_\nu} \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} \varepsilon_n,$$

wo

$$\varepsilon_n = |a_n|\, n$$

gesetzt ist. Wegen

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$$

ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{[\sigma_\nu]} \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} \varepsilon_n = 0,$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\sigma_\nu} \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} \varepsilon_n = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} a_n = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A.$$

Analog gilt für Dirichletsche Reihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n x}$$

der Satz:

Es sei

(16) $$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\, a_n = 0;$$

ferner sei $x_1, x_2, \cdots, x_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu} e^{\varphi_\nu i}, \cdots$ eine Punktmenge, welche den Bedingungen

$$\sigma_\nu > 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\sigma_\nu} = 0,$$

$$(17) \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi_\nu < \frac{\pi}{2},$$

$$(18) \qquad \limsup_{\nu=\infty} |\varphi_\nu| < \frac{\pi}{2}$$

genügt. Für diese Punktmenge sei

$$\lim_{\nu=\infty} f(x_\nu) = A;$$

dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{\mu_\nu} a_n = A,$$

wo $\mu = \mu_\nu$ diejenige Funktion der positiven ganzen Zahl ν ist, welche durch die Relationen

$$\lambda_\mu \leqq \sigma_\nu,$$
$$\lambda_{\mu+1} > \sigma_\nu$$

eindeutig bestimmt ist.[1])

Zum Beweise darf wieder $\lambda_1 > 0$ angenommen werden; nach (17) und (18) ist für alle ν

$$\cos \varphi_\nu > p,$$

wo $p > 0$ ist.

Es wächst offenbar μ mit ν ins Unendliche (aber nicht notwendig monoton), d. h. es ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\mu} = 0.$$

Es werde

$$\sum_{n=1}^{\mu} a_n e^{-\lambda_n x_\nu} = \varphi(\nu),$$

[1]) Für $\sigma_\nu < \lambda_1$ sei $\mu = 0$.

$$\sum_{n=\mu+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x_\nu} = \psi(\nu)$$

gesetzt; dann ist

$$\varphi(\nu) + \psi(\nu) = f(x_\nu),$$

$$\lim_{\nu=\infty} (\varphi(\nu) + \psi(\nu)) = A.$$

Es sei

$$\varepsilon_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \, | a_n |$$

und τ_ν die größte der Zahlen ε_n für $n \geqq \mu + 1$; dann ist nach (16)

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_\nu = 0$$

und

$$|\psi(\nu)| < \tau_\nu \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n \Re(x_\nu)} < \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}} \sum_{n=\mu+1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \, e^{-\frac{\lambda_n}{\sigma_\nu} \cos \varphi_\nu}$$

$$< \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}} \sum_{n=\mu+1}^{\infty} e^{-\frac{p \lambda_n}{\sigma_\nu}} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} du < \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}} \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} e^{-\frac{p u}{\sigma_\nu}} du$$

$$= \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}} \int_{\lambda_\mu}^{\infty} e^{-\frac{p u}{\sigma_\nu}} du = \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}} \frac{\sigma_\nu}{p} e^{-\frac{p \lambda_\mu}{\sigma_\nu}} < \frac{\tau_\nu}{p} \frac{\sigma_\nu}{\lambda_{\mu+1}} < \frac{\tau_\nu}{p},$$

$$\lim_{\nu=\infty} \psi(\nu) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A.$$

Ferner ist für $\Re(x) > 0$

$$\left| 1 - e^{-x} \right| = \left| \int_0^x e^{-u} du \right| < |x|,$$

folglich

$$\left| \sum_{n=1}^{\mu} a_n - \varphi(\nu) \right| \leqq \sum_{n=1}^{\mu} | a_n | \left| 1 - e^{-\lambda_n x_\nu} \right| \leqq | x_\nu | \sum_{n=1}^{\mu} | a_n | \lambda_n$$

$$= \frac{1}{\sigma_\nu} \sum_{n=1}^{\mu} \varepsilon_n (\lambda_n - \lambda_{n-1});$$

nun ist[1])

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\lambda_\mu} \sum_{n=1}^{\mu} \varepsilon_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = 0$$

und

$$\frac{1}{\sigma_\nu} \leqq \frac{1}{\lambda_\mu};$$

folglich ergibt sich

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\sum_{n=1}^{\mu} a_n - \varphi(\nu) \right) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{\mu_\nu} a_n = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A,$$

wie auf S. 19 behauptet wurde.

Analog besteht für Fakultätenreihen[2]) (im weiteren Sinne)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\ldots(x+\gamma_n)},$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine Folge positiver monoton ins Unendliche wachsender Größen ist, für welche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$$

divergiert, der Satz:

Es sei

$$\lim_{n=\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\gamma_m} = 0, \tag{19}$$

also $f(x)$ für $\Re(x) > 0$ konvergent[3]); ferner sei für eine

[1]) Siehe S. 14.

[2]) Vgl. über diese Reihen meine Arbeit „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen", Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. 36, 1906, S. 197—208.

[3]) Denn bereits aus $\lim_{n=\infty} a_n \gamma_n = 0$ folgt, da für alle hinreichend großen n

$$\left| \frac{\gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} \right| < e^{-\frac{1}{2}\Re(x) \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{\gamma_m}}$$

ist (l. c., S. 199) und die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} e^{-\frac{1}{2}\Re(x) \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{\gamma_m}}$$

konvergiert (l. c., S. 199—200), die (absolute) Konvergenz von $f(x)$.

Punktmenge x_ν, welche die Bedingungen der S. 19 erfüllt,

$$\lim_{\nu=\infty} f(x_\nu) = A;$$

dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{\mu_\nu} a_n = A,$$

wo

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\gamma_m} = \lambda_n$$

gesetzt ist und $\mu = \mu_\nu$ diejenige Funktion von ν bezeichnet, welche durch die Relationen

$$\begin{aligned} \lambda_\mu \quad &\leqq \sigma_\nu, \\ \lambda_{\mu+1} &> \sigma_\nu \end{aligned}$$

definiert ist.

Beweis: Es ist offenbar, da die positiven Größen λ_n mit n monoton ins Unendliche wachsen,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\mu} = 0.$$

Nach der Voraussetzung (19) ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} a_n = 0,$$

also, wenn

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \mid a_n \mid = \varepsilon_n$$

und die größte der Zahlen ε_n für $n \geqq \mu + 1$ gleich τ_ν gesetzt wird,

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_\nu = 0.$$

Es sei ferner

$$\varphi(\nu) = \sum_{n=1}^{\mu} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x_\nu + \gamma_1) \ldots (x_\nu + \gamma_n)},$$

$$\psi(\nu) = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \frac{a_n \gamma_1 \ldots \gamma_n}{(x_\nu + \gamma_1) \ldots (x_\nu + \gamma_n)};$$

dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} \big(\varphi(\nu) + \psi(\nu)\big) = \lim_{\nu=\infty} f(x_\nu) = A.$$

Für $0 < \vartheta < 1$ ist

$$\log(1+\vartheta) > \frac{1}{2}\vartheta;$$

für alle hinreichend großen ν ist

$$0 < \Re(x_\nu) \leqq |x_\nu| = \frac{1}{\sigma_\nu} < \gamma_1,$$

also bei beliebigem m

$$0 < \Re(x_\nu) < \gamma_m,$$

$$\log\left|1+\frac{x_\nu}{\gamma_m}\right| \geqq \log\left(1+\frac{\Re(x_\nu)}{\gamma_m}\right) > \frac{1}{2}\frac{\Re(x_\nu)}{\gamma_m} = \frac{\cos\varphi_\nu}{2\sigma_\nu\gamma_m} > \frac{p}{2\sigma_\nu\gamma_m};$$

für alle hinreichend großen ν und alle n ist daher

$$\log\left|\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{x_\nu}{\gamma_m}\right)\right| > \frac{p}{2\sigma_\nu}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\gamma_m} = \frac{p}{2\sigma_\nu}\lambda_n,$$

$$\left|\frac{\gamma_1\ldots\gamma_n}{(x_\nu+\gamma_1)\ldots(x_\nu+\gamma_n)}\right| < e^{-\frac{p}{2\sigma_\nu}\lambda_n}.$$

Folglich ist für alle ν von einer gewissen Stelle an

$$|\psi(\nu)| < \tau_\nu \sum_{n=\mu+1}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}e^{-\frac{p}{2\sigma_\nu}\lambda_n} < \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}}\sum_{n=\mu+1}^{\infty}e^{-\frac{p}{2\sigma_\nu}\lambda_n}\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}du$$

$$< \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}}\sum_{n=\mu+1}^{\infty}\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n}e^{-\frac{p}{2\sigma_\nu}u}du = \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}}\int_{\lambda_\mu}^{\infty}e^{-\frac{p}{2\sigma_\nu}u}du = \frac{\tau_\nu}{\lambda_{\mu+1}}\frac{2\sigma_\nu}{p}e^{-\frac{p\lambda_\mu}{2\sigma_\nu}}$$

$$< \frac{2\tau_\nu}{p}\frac{\sigma_\nu}{\lambda_{\mu+1}} < \frac{2\tau_\nu}{p};$$

dies ergibt

$$\lim_{\nu=\infty}\psi(\nu) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty}\varphi(\nu) = A.$$

Ferner ist

$$1-\frac{\gamma_1\ldots\gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)} = \int_0^x\frac{\gamma_1\ldots\gamma_n}{(u+\gamma_1)\ldots(u+\gamma_n)}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{u+\gamma_m}du,$$

also für $\Re(x) > 0$

$$\left|1-\frac{\gamma_1\ldots\gamma_n}{(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_n)}\right| < |x|\,.\,1\,.\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\gamma_m} = \lambda_n|x|;$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\mu} a_n - \varphi(\nu)\right| \leqq \sum_{n=1}^{\mu} |a_n| \left|1 - \frac{\gamma_1 \cdots \gamma_n}{(x_\nu+\gamma_1)\ldots(x_\nu+\gamma_n)}\right| \leqq |x_\nu| \sum_{n=1}^{\mu} |a_n| \lambda_n$$

$$= \frac{1}{\sigma_\nu} \sum_{n=1}^{\mu} \varepsilon_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}),$$

$$\lim_{\nu=\infty} \left|\sum_{n=1}^{\mu} a_n - \varphi(\nu)\right| = \lim_{\nu=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\mu} \varepsilon_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})}{\lambda_\mu} \cdot \frac{\lambda_\mu}{\sigma_\nu} = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{n=1}^{\mu_\nu} a_n = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A.$$

Für die verallgemeinerten Binomialkoeffizientenreihen [1] in der Bezeichnungsweise

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \frac{(x-\gamma_1)\ldots(x-\gamma_n)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}$$

gilt wörtlich der Satz von S. 21—22. Der Beweis ist dem vorigen analog; nur ist hier bei der Behandlung von

$$\psi(\nu) = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} a_n \frac{(\gamma_1 - x)\ldots(\gamma_n - x)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}$$

folgendermaßen zu schließen: c sei eine positive Konstante; für

$$y = \alpha + \beta i, \quad \alpha > 0, \quad \frac{|\beta|}{\alpha} < c$$

ist

$$|1-y|^2 = (1-\alpha)^2 + \beta^2 < 1 - 2\alpha + (1+c^2)\alpha^2, \tag{20}$$

also, wenn nur α hinreichend klein ist,

$$|1-y|^2 < 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4},$$

$$|1-y| < 1 - \frac{\alpha}{2} < e^{-\frac{\alpha}{2}};$$

für alle hinreichend großen ν und alle m ist daher

$$\left|1 - \frac{x_\nu}{\gamma_m}\right| < e^{-\frac{\Re(x_\nu)}{2\gamma_m}} = e^{-\frac{\cos\varphi_\nu}{2\sigma_\nu\gamma_m}} < e^{-\frac{p}{2\sigma_\nu}\frac{1}{\gamma_m}};$$

[1] L. c., S. 197—208.

also ist für alle hinreichend großen ν und alle n

$$\left|\frac{(\gamma_1 - x_\nu)\ldots(\gamma_n - x_\nu)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}\right| < e^{-\frac{p}{2\sigma_\nu}\lambda_n},$$

folglich wie auf S. 23

$$|\psi(\nu)| < \frac{2\tau_\nu}{p}.$$

Ebenso ist bei der Behandlung von $\varphi(\nu)$ hier zu beachten, daß

$$\left|1 - \frac{(\gamma_1 - x_\nu)\ldots(\gamma_n - x_\nu)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}\right|$$

$$= \left|\int_0^{x_\nu} \left(\frac{1}{\gamma_1}\left(1 - \frac{u}{\gamma_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{u}{\gamma_n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{u}{\gamma_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{u}{\gamma_{n-1}}\right)\frac{1}{\gamma_n}\right) du\right|$$

ist, wo bei geradlinigem Integrationsweg für alle hinreichend großen ν jeder Faktor $1 - \frac{u}{\gamma_m}$ nach (20) dem absoluten Betrage nach < 1 ist, so daß der absolute Betrag des Integrals

$$< |x_\nu| \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\gamma_m} = \lambda_n |x_\nu|$$

ist, woraus wie auf S. 24 weiterzuschließen ist.

Endlich werde ich das Analogon zum Tauberschen Satz für Integrale[1]) von der Gestalt

$$J(x) = \int_1^\infty \chi(t)\, t^{-x}\, dt$$

entwickeln. Es handelt sich um den Satz:

Es sei

$$\lim_{\omega = \infty} \omega \log \omega\, \chi(\omega) = 0,$$

also $J(x)$ mindestens für $\Re(x) > 0$ konvergent; es sei ferner für eine Punktmenge x_ν im Sinne von S. 19

$$\lim_{\nu = \infty} J(x_\nu) = A;$$

dann ist

$$\lim_{\nu = \infty} \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \chi(t)\, dt$$

vorhanden und $= A$.

[1]) Vgl. S. 208—218 meiner erwähnten Arbeit.

Falls statt der Punktmenge x_ν eine in der Halbebene $\Re(x) > 0$ gelegene, in $x = 0$ endigende stetige Kurve gegeben ist, für welche $\lim\limits_{x=0} J(x)$ existiert, so ist nach diesem Satz

$$J(0) = \int_1^\infty \chi(t)\, dt = A.\text{[1]} \tag{21}$$

Der Satz auf S. 25 wird nun folgendermaßen bewiesen. Für

$$\varphi(\nu) = \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \chi(t)\, t^{-x_\nu}\, dt,$$

$$\psi(\nu) = \int_{e^{\sigma_\nu}}^\infty \chi(t)\, t^{-x_\nu}\, dt$$

ist

$$\lim_{\nu=\infty} (\varphi(\nu) + \psi(\nu)) = A.$$

Es sei τ_ν die obere Grenze von $\omega \log \omega \,|\, \chi(\omega) \,|$ für $\omega \geqq e^{\sigma_\nu}$; dann ist

$$\lim_{\nu=\infty} \tau_\nu = 0$$

und

$$|\psi(\nu)| < \tau_\nu \int_{e^{\sigma_\nu}}^\infty \frac{1}{\log t}\, t^{-1-\Re(x_\nu)}\, dt < \frac{\tau_\nu}{\sigma_\nu} \int_{e^{\sigma_\nu}}^\infty t^{-1-\frac{p}{\sigma_\nu}}\, dt = \frac{\tau_\nu}{\sigma_\nu} \frac{1}{\frac{p}{\sigma_\nu}} e^{-p} = \tau_\nu \frac{e^{-p}}{p},$$

$$\lim_{\nu=\infty} \psi(\nu) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A.$$

Andererseits ist für $\Re(x) > 0$, $t \geqq 1$

$$|\, 1 - t^{-x} \,| = |\, 1 - e^{-x \log t} \,| \leqq |\, x \,| \log t,$$

also

$$\left| \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \chi(t)\, dt - \varphi(\nu) \right| \leqq \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \left| \chi(t) \right| \left| 1 - t^{-x_\nu} \right| dt$$

$$\leqq |\, x_\nu \,| \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \left| \chi(t) \right| \log t\; dt = \frac{1}{\sigma_\nu} \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt,$$

---

[1]) Die Gleichung (21) folgt übrigens bereits dann aus dem Satz, wenn in der Punktmenge x_ν eine Folge von Punkten mit monoton abnehmenden absoluten Beträgen $\frac{1}{g_\varrho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots$) vorkommt, für welche $\limsup\limits_{\varrho=\infty} \frac{g_{\varrho+1}}{g_\varrho}$ endlich ist.

wo

$$t \log t \,|\, \chi(t) \,| = \varepsilon(t)$$

gesetzt ist. Wegen

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon(t) = 0$$

ist

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{\log \omega} \int_1^{\omega} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt = 0,$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\sigma_\nu} \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \int_1^{e^{\sigma_\nu}} \chi(t)\, dt = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = A,$$

was zu beweisen war.

Wenn in den Voraussetzungen aller obigen sieben Sätze (auf S. 8, 9, 12, 15—16, 18—19, 21—22, 25) statt der Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} n\, a_n = 0,\quad \lim_{n=\infty} n \log n\, a_n = 0,\quad \lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\, a_n = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} n\, a_n = 0,\quad \lim_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\, a_n = 0,\quad \lim_{n=\infty} a_n \gamma_n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\gamma_m} = 0,$$

$$\lim_{\omega=\infty} \omega \log \omega\, \chi(\omega) = 0$$

nur verlangt wird, daß

$$\limsup_{n=\infty} n\,|\,a_n\,|,\quad \limsup_{n=\infty} n \log n\,|\,a_n\,|,\quad \limsup_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\,|\,a_n\,|,$$

$$\limsup_{n=\infty} n\,|\,a_n\,|,\quad \limsup_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\,|\,a_n\,|,\quad \limsup_{n=\infty} |\,a_n\,|\,\gamma_n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\gamma_m},$$

$$\limsup_{\omega=\infty} \omega \log \omega\,|\,\chi(\omega)\,|$$

endlich ist, und statt der Existenz von

$$\lim_{x=1} f(x),\quad \lim_{x=0} f(x),\quad \lim_{x=0} f(x),\quad \lim_{\nu=\infty} f(x_\nu),\quad \lim_{\nu=\infty} f(x_\nu),\quad \lim_{\nu=\infty} f(x_\nu),$$

$$\lim_{\nu=\infty} J(x_\nu)$$

nur, daß

$$\limsup_{x=1} |f(x)|, \quad \limsup_{x=0} |f(x)|, \quad \limsup_{x=0} |f(x)|, \quad \limsup_{\nu=\infty} |f(x_\nu)|,$$

$$\limsup_{\nu=\infty} |f(x_\nu)|, \quad \limsup_{\nu=\infty} |f(x_\nu)|, \quad \limsup_{\nu=\infty} |J(x_\nu)|$$

endlich ist, so liefern offenbar die vorangehenden Entwicklungen den Satz, daß

$$\limsup_{\nu=\infty} \left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n\right|, \quad \limsup_{\nu=\infty} \left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n\right|, \quad \limsup_{\nu=\infty} \left|\sum_{n=1}^{\nu} a_n\right|,$$

$$\limsup_{\nu=\infty} \left|\sum_{n=1}^{[\sigma_\nu]} a_n\right|, \quad \limsup_{\nu=\infty} \left|\sum_{n=1}^{\mu_\nu} a_n\right|, \quad \limsup_{\nu=\infty} \left|\sum_{n=1}^{\mu_\nu} a_n\right|,$$

$$\limsup_{\nu=\infty} \left|\int_1^{e^{\sigma_\nu}} \chi(t)\,dt\right|$$

endlich ist.

Es war bisher durchweg von den Punkten $x=1$ und $x=0$ die Rede, und die Bedeutung der gefundenen Resultate liegt in ihrer Anwendung auf diejenigen Fälle, in welchen $x=1$ am Rande des Konvergenzkreises der Potenzreihe bezw. $x=0$ am Rande der Konvergenzhalbebene der betreffenden Reihe oder des Integrals liegt; für innere Punkte sind die Sätze trivial. Durch die Substitution $x = x_0 z$ bezw. $x = x_0 + z$ lassen sich natürlich die Sätze für Potenzreihen bezw. Dirichletsche Reihen und die Integrale $J(x)$ so formulieren, daß von einem beliebigen Randpunkte x_0 die Rede ist.

Berlin, den 9. Juni 1906.