Ein Satz über Summen Jacobi-Legendrescher Zeichen.

Von **Hugo Schwendenwein** in Klagenfurt.

P. G. Lejeune Dirichlet hat den Satz bewiesen:

„Ist $P = 4n + 3$ eine ganze, positive, durch kein Quadrat, die Einheit ausgenommen, teilbare Zahl, so ist die Summe $\sum \left(\frac{s}{P}\right)$ eine positive Zahl, wenn s die Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots \frac{P-1}{2}$ durchläuft.“

Diesem Satze, der eine Eigenschaft der ungeraden Zahlen von der Form $4n + 3$ feststellt, die den Zahlen von der Form $4n + 1$ nicht zukommt, läßt sich der folgende, der eine beiden Zahlformen gemeinsame Eigenschaft ausspricht, zur Seite stellen:

„Ist z eine positive, ungerade, durch kein Quadrat, die Einheit ausgenommen, teilbare Zahl, so ist $\sum \left(\frac{s}{z}\right)$ eine positive Zahl, wenn in dieser Summe s das erste Drittel der Zahlen 1 bis z durchläuft.“

Beweis: Wir setzen erstens voraus, die Zahl $P = 4n + 3$ sei durch 3 nicht teilbar, also von der Form $3\nu + 1$ oder $3\nu + 2$. Suchen wir eine Gleichung für die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=P-1} \left(\frac{3s}{P}\right) 3s.$$

Durchläuft s die Zahlen $1, 2, 3, \ldots P-1$, so sind die ersten ν-Zahlen kleiner als P und daher bezüglich P die kleinsten positiven Reste, sie mögen s' heißen, die letzten ν-Zahlen geben zum Quotienten 2 und die Reste $P-3$, $P-2.3, \ldots P-3\nu$, wir bezeichnen diese Reste mit s''', die übrigen geben zu Quotienten 1 und zu Resten die Zahlen s''; dabei erfüllen die Zahlen s', s'' und s''' zusammen den Komplex der Zahlen $1, 2, \ldots P-1$. Man kann somit die Gleichung anschreiben

$$\sum_{s=1}^{s=P-1} \left(\frac{3s}{P}\right) 3s = \sum \left(\frac{s'}{P}\right) s' + \sum \left(\frac{s''+P}{P}\right)(s''+P) + \sum \left(\frac{s'''+2P}{P}\right)(s'''+2P)$$

oder

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{3s}{P}\right)3s=\sum\left(\frac{s'}{P}\right)s'+\sum\left(\frac{s''}{P}\right)s''+\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)s'''+P\left[\sum\left(\frac{s''}{P}\right)+2\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)\right].$$

Weil aber

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{3s}{P}\right)3s=3\left(\frac{3}{P}\right)\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s;$$

$$\sum\left(\frac{s'}{P}\right)s'+\sum\left(\frac{s''}{P}\right)s''+\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)s'''=\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s$$

und

$$\sum\left(\frac{s'}{P}\right)+\sum\left(\frac{s''}{P}\right)+\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)=0$$

ist, so folgt

$$\left[3\left(\frac{3}{P}\right)-1\right]\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=P\left[\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)-\sum\left(\frac{s'}{P}\right)\right]=$$

$$=P\left[\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{P-3s}{P}\right)-\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{P}\right)\right]=$$

$$=P\left[-\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{P}\right)-\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{P}\right)=-2P\left(\frac{3}{P}\right)\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{P}\right)\right].$$

Daher ist

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{P}\right)=-\frac{1}{2P}\left[3-\left(\frac{3}{P}\right)\right]\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s.$$

Nun ist aber für jede positive Zahl $P=4n+3$, die durch kein Quadrat teilbar ist,

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=\frac{P}{\left(\frac{2}{P}\right)-2}\sum_{s=1}^{s=\frac{P-1}{2}}\left(\frac{s}{P}\right).$$

Setzt man den zweiten Faktor rechts, der positiv ist, zur Abkürzung Δ, so erhält man

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{P}\right)=\frac{3-\left(\frac{3}{P}\right)}{2\left[2-\left(\frac{2}{P}\right)\right]}\Delta. \tag{I}$$

Da $\left(\frac{3}{P}\right)$ und $\left(\frac{2}{P}\right)$ nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen können, so ist der Koeffizient von Δ positiv; da ferner $\nu = E\left(\frac{P}{3}\right)$, wenn $E(z)$ die größte ganze in der positiven Zahl z enthaltene Zahl bedeutet, so ist der aufgestellte Satz für alle Zahlen von der Form $4n+3$, die durch 3 nicht teilbar sind, bewiesen.

Es sei zweitens $P = 4n+3 = 3Q$, also $Q = 4m+1$ und $Q = 3\nu+1$ oder $Q = 3\nu+2$. Um die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=P-1} \left(\frac{s}{P}\right) s$$

zu bestimmen, ordnen wir die Zahlen $1, 2, 3, \ldots P-1$ in die drei Reihen

$$1.3,\ 2.3, \ldots 3(Q-1),$$

$$1,\ 1+1.3,\ 1+2.3, \ldots 1+3(Q-1),$$

$$2,\ 2+1.3,\ 2+2.3, \ldots 2+3(Q-1).$$

Dann ist

$$\sum_{s=1}^{s=P-1} \left(\frac{s}{P}\right) s = \sum_{s=1}^{s=Q-1} \left(\frac{3s}{3Q}\right) 3s + \sum_{s=0}^{s=Q-1} \left(\frac{1+3s}{3Q}\right)(1+3s) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{s=Q-1} \left(\frac{2+3s}{3Q}\right)(2+3s) = \sum_{s=0}^{s=Q-1} \left(\frac{1+3s}{Q}\right)(1+3s) -$$

$$- \sum_{s=0}^{s=Q-1} \left(\frac{2+3s}{Q}\right)(2+3s).$$

Setzt man im Subtrahenden $s = Q-1-\sigma$, so erhält man

$$\sum_{s=0}^{s=Q-1} \left(\frac{2+3s}{Q}\right)(2+3s) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1} \left(\frac{3Q-1-3\sigma}{Q}\right)(3Q-1-3\sigma) =$$

$$= 3Q \sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1} \left(\frac{1+3\sigma}{Q}\right) - \sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1} \left(\frac{1+3\sigma}{Q}\right)(1+3\sigma);$$

da aber, wenn σ alle Werte von 0 bis $Q-1$ durchläuft, die Zahlen $1+3\sigma$ für Q ein vollständiges Restsystem liefern, so ist $\sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1} \left(\frac{1+3\sigma}{Q}\right) = 0$ und wir erhalten, da es auf die Bezeichnung des

Summationsbuchstaben nicht ankommt,

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=2\sum_{s=0}^{s=Q-1}\left(\frac{1+3s}{Q}\right)(1+3s).$$

Setzt man in dem Ausdrucke $1+3s$ für s der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \ldots Q-1$, so sind die ersten ν-Zahlen gleichzeitig ihre kleinsten positiven Reste bezüglich Q — ich bezeichne sie mit s' — die letzten ν-Zahlen geben zum Quotienten 2 und zu Resten die Zahlen s''': $Q-2$, $Q-2-1\,.\,3, \ldots Q-2-3(\nu-1)$, die übrigen geben zum Quotienten 1 und zu Resten die Zahlen s''; allerdings findet sich im Falle $Q=3\nu+2$ unter den zuletzt genannten Zahlen die Zahl $3(2\nu+1)+1=2Q$, aber sie trägt zur Summe nichts bei. Statt der vorstehenden Gleichung kann man also schreiben

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=2\left[\sum\left(\frac{s'}{P}\right)s'+\sum\left(\frac{s''+Q}{Q}\right)(s''+Q)+\right.$$

$$\left.+\sum\left(\frac{s'''+2Q}{Q}\right)(s'''+2Q)\right]=2\sum_{s=1}^{s=Q-1}\left(\frac{s}{Q}\right)s+2Q\left[\sum\left(\frac{s''}{Q}\right)+2\sum\left(\frac{s'''}{Q}\right)\right]$$

$$=2Q\left[\sum\left(\frac{s'''}{Q}\right)-\sum\left(\frac{s'}{Q}\right)\right]=2Q\left[\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)-\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{1+3s}{Q}\right)\right].$$

Ist nun $Q=3\nu+1$, so ist

$$\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{1+3s}{1+3\nu}\right)=\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{3\nu-3s}{1+3\nu}\right)=\left(\frac{3}{1+3\nu}\right)\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{\nu-s}{1+3\nu}\right)=\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Da aber

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{Q}\right)+\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{1+3s}{Q}\right)+\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)=0$$

ist, so folgt

$$\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)=-2\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)$$

und es folgt

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=-6Q\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)=-2P\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Zu derselben Gleichung gelangt man, wenn man $Q = 3\nu + 2$ voraussetzt. Setzt man in dieser Gleichung für den linken Teil den Wert $\dfrac{P\Delta}{\left(\frac{2}{P}\right) - 2}$ ein, so erhält man

$$\sum_{s=1}^{s=\nu} \left(\frac{s}{Q}\right) = \frac{\Delta}{2\left[2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right]} \tag{II}$$

und hierin bezieht sich Δ auf P, ist also positiv. Hiemit ist der aufgestellte Satz für alle durch 3 nicht teilbaren Zahlen von der Form $4n + 1$ bewiesen.

Es sei drittens $P = 6n + 3 = 3Q$ und $Q = 3\nu + 1$ oder $Q = 3\nu + 2$.

Verfährt man so wie früher, so erhält man

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1} \left(\frac{s}{P}\right) = \sum_{s=1}^{s=\nu} \left(\frac{3s}{3Q}\right) + \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(\frac{1+3s}{3Q}\right) + \sum_{s=0}^{s=\nu-1} \left(\frac{2+3s}{3Q}\right).$$

Im Falle $Q = 3\nu + 2$, sollte allerdings die obere Grenze der dritten Summe ν sein, aber dieses letzte Glied hat den Wert 0.

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1} \left(\frac{s}{P}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(\frac{1+3s}{Q}\right) - \sum_{s=0}^{s=\nu-1} \left(\frac{2+3s}{Q}\right).$$

Ist nun $Q = 3\nu + 1$, so ist

$$\sum_{s=0}^{s=\nu} \left(\frac{1+3s}{Q}\right) = \left(-\frac{1}{Q}\right) \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(\frac{3\nu - 3s}{Q}\right) = \left(\frac{-3}{Q}\right) \sum_{s=0}^{s=\nu} \left(\frac{s}{Q}\right) = \sum_{s=1}^{s=\nu} \left(\frac{s}{Q}\right)$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu-1} \left(\frac{2+3s}{Q}\right) = \left(\frac{3}{Q}\right) \sum_{s=0}^{s=\nu-1} \left(\frac{\nu+1+s}{Q}\right) = \left(\frac{-1}{Q}\right) \sum_{s=\nu+1}^{s=2\nu} \left(\frac{s}{Q}\right).$$

Aber es ist

$$\sum_{s=1}^{s=\nu} \left(\frac{s}{Q}\right) + \sum_{s=\nu+1}^{s=2\nu} \left(\frac{s}{Q}\right) + \sum_{s=2\nu+1}^{s=3\nu} \left(\frac{s}{Q}\right) = 0.$$

Setzt man im dritten Gliede statt s: $3\nu + 1 - s$, so erhält man

$$\sum_{s=2\nu+1}^{s=3\nu} \left(\frac{s}{Q}\right) = \sum_{s=1}^{s=\nu} \left(\frac{Q-s}{Q}\right) = \left(\frac{-1}{Q}\right) \sum_{s=1}^{s=\nu} \left(\frac{s}{Q}\right).$$

Daraus folgt

$$\sum_{s=\nu+1}^{s=2\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)=-\left[1+\left(\frac{-1}{Q}\right)\right]\sum_{s=1}^{s=1}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Daher ergibt sich

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1}\left(\frac{s}{P}\right)=\left[2+\left(\frac{-1}{Q}\right)\right]\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right). \qquad \text{(III)}$$

Zu derselben Formel gelangt man, wenn $Q=3\nu+2$ angenommen wird.

Ist nun P von der Form $4n+1$, daher $Q=4m+3$, so ist $\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)$ eine positive Zahl nach der Gleichung I; ist aber P von der Form $4n+3$, daher $Q=4m+1$, so ist $\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)$ eine positive Zahl nach der Gleichung II und da $2n+1=E\left(\frac{P}{3}\right)$ ist, so ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Weitere Beziehungen zwischen solchen Summen finden sich im LIII. Jahresberichte der Staats-Oberrealschule zu Klagenfurt vom Jahre 1910.