36.

Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième dégré.

(Par Mr. *Minding*, docteur ès sciences à Berlin.)

Soit y une racine donnée de l'équation

$$1. \quad y^3+p_2y^2+p_1y+p_0=0,$$

dont les coëfficiens p_2, p_1, p_0 réprésentent des polynomes entiers en x, à coëfficiens constans. On voit qu'en vertu de cette équation toute fonction rationnelle en x et y peut être réduite à la forme:

$$\varphi(x,y)=\frac{\alpha+\beta y+\gamma y^2}{A+By+Cy^2},$$

les lettres α, β, γ, A, B, C désignant des polynomes entiers en x.

Or il est facile de trouver un troisième polynome $A'+B'y+C'y^2$, tel que le produit $(A+By+Cy^2)(A'+B'y+C'y^2)=N$, divisé par la formule $y^3+p_2y^2+p_1y+p_0$ donne un reste indépendant de y.

En effet, en supposant $N=ky^4+hy^3+gy^2+fy+e$, on trouvera par la division

$$N=(ky+h-p_2k)(y^3+p_2y^2+p_1y+p_0)+(g-kp_1-p_2(h-p_2k))y^2$$
$$+(f-kp_0-p_1(h-p_2k))y+e-p_0(h-p_2k).$$

Mettant dans cette formule les valeurs

$k=CC'$, $h=BC'+CB'$, $g=BB'+AC'+A'C$, $f=AB'+BA'$, $e=AA'$,

égalant ensuite à zéro les coëfficiens de y et de y^2 dans l'expression du reste, on obtient pour déterminer A', B', C', les équations:

$$BB'+AC'+A'C-(p_1-p_2p_2)CC'-p_2(BC'+CB')=0.$$
$$AB'+BA'-(p_0-p_1p_2)CC'-p_1(BC'+CB')=0.$$

Par ce moyen, en considérant y comme racine de l'équation (1.), le dénominateur de la fraction $\varphi(x,y)$ sera réduit à un polynome entier en x, sans y. L'équation (1.) servira encore à chasser du numérateur la troisième et la quatrième puissance de y, de sorte qu'on ait: $\varphi(x,y)=$

$\frac{A+By+Cy^2}{N}$, A, B, C, N, étant des polynomes entiers en x, dégagés de tout facteur commun.

Cela posé décomposons en fractions simples la fonction $\frac{1}{N}$, et considérons un seulement des termes de cette décomposition, savoir $\frac{1}{(c-x)^n}$, en omettant le facteur indépendant de x. La fonction $\varphi(x,y)$ aura un terme correspondant $\frac{A+By+Cy^2}{(c-x)^n}$, et l'intégrale $\int\varphi(x,y)\,\partial x$ sera par conséquent composée d'une certaine somme d'intégrales $\int\frac{A+By+Cy^2}{(c-x)^n}\partial x$, multipliées par des facteurs invariables. Mais au lieu de cette dernière intégrale nous allons considérer l'integrale $\int\frac{A+By+Cy^2}{c-x}\partial x$, dont l'autre dérive en différentiant par rapport à c.

Joignons à l'équation (1.) la suivante

$$2.\quad q_2 y^2+q_1 y+q_0=0,$$

dans laquelle q_2, q_1, q_0 sont des polynomes entiers en x, avec des coëfficiens indéterminés et variables. Pour éliminer y entre les équations (1.) et (2.), on divisera la première par la seconde. On trouve le quotient: $\frac{q_2 y+p_2 q_2-q_1}{q_2 q_2}$ et le reste: $\frac{(p_1 q_2^2-q_0 q_2+q_1^2-p_2 q_1 q_2)y+p_0 q_2^2+q_0 q_1-p_2 q_0 q_2}{q_2 q_2}$.

En égalant à zéro le reste de la division, on trouvera une expression rationnelle de y, savoir

$$y=\frac{P}{Q},\quad P=q_0 q_1+p_0 q_2 q_2-p_2 q_0 q_2,\quad Q=q_0 q_2-q_1 q_1-p_1 q_2 q_2+p_2 q_1 q_2.$$

En vertu de cette valeur de y, on aura, quel que soit x,

$$P^3+p_2 P^2 Q+p_1 P Q+p_0 Q^3=\{q_2 P+(p_2 q_2-q_1)Q\}fx,$$
$$q_2 P^2+q_1 P Q+q_0 Q^2=q_2 q_2 fx.$$

L'équation $fx=0$ donne évidemment le résultat de l'élimination de y entre les équations (1.) et (2.). Nous désignerons par $x_1, x_2 \ldots . x_\mu$ ses racines, considérées comme fonctions des coëfficiens variables des polynomes q_2, q_1, q_0, et nous marquerons par y_1, y_2, ... y_μ les valeurs de y correspondantes respectivement aux racines x_1, x_2, ... x_μ. Ces valeurs peuvent être exprimées rationnellement en fonctions de x et des coëfficiens indéterminés des polynomes q_2, q_1, q_0, et l'équation $fx=0$ fournit encore le moyen pour remplacer la différentielle ∂x par une expression composée en x et les coëfficiens indiqués, avec leurs variations. On parviendra ainsi à une expression rationnelle de la formule proposée $\frac{A+By+Cy^2}{c-x}\partial x$.

Mais puisque cette différentielle contient encore une partie rationnelle en x, il paraît avantageux, pour la simplicité du calcul, de l'en dégager. Pour cet effet mettons dans le système des équations (1.) et (2.) $z - \frac{1}{3}p_2$ au lieu de y; ces équations changeront comme il suit:

$$z^3 + (p_1 - \tfrac{1}{3}p_2p_2)z + p_0 - \tfrac{1}{3}p_1p_2 + \tfrac{2}{27}p_2p_2p_2 = 0,$$
$$q_2z^2 + (q_1 - \tfrac{2}{3}p_2q_2)z + q_0 - \tfrac{1}{3}p_2q_1 + \tfrac{1}{9}p_2q_2q_2 = 0.$$

Mettant la même valeur de y dans la différentielle proposée, et en ôtant la partie rationnelle en x, cette différentielles dieviendra $\frac{Az+Bz^2}{c-x}\partial x$. Pour abréger les formules, nous considérérons d'abord z comme racine de l'équation $z^3 + p_1z + p_0 = 0$, et nous écrirons de même, au lieu de l'équation (2.), $q_2z^2 + q_1z + q_0 = 0$. Le coëfficient p_2 sera restitué à la fin du calcul, en changeant p_1 en $p_1 - \frac{1}{3}p_2p_2$, q_1 en $q_1 - \frac{2}{3}p_2q_2$, et ainsi de suite.

Cette simplification admise, les équations

$$z^3 + p_1z + p_0 = 0,\; q_2z^2 + q_1z + q_1 = 0$$

donneront

$$z = \frac{P}{Q},\; P = q_0q_1 + p_0q_2q_2,\;\; Q = q_0q_2 - q_1q_1 - p_1q_2q_2,$$
$$P^3 + p_1PQ^2 + p_0Q^3 = Rfx,\; q_2P^2 + q_1PQ + q_0Q^2 = q_2^2fx;$$
$$R = q_2P - q_1Q = q_1^3 + p_0q_2^3 + p_1q_1q_2^2.$$

L'équation $fx = 0$ donnera par la différentiation, en rapportant la lettre ∂ à la variation de x, et la lettre δ à celle des autres quantités variables contenues dans cette équation:

$$f'x.\partial x + \delta fx = 0.$$

Sans développer la différentielle δfx, il est clair, qu'en vertu de la composition de fx elle pourra être mise sous la forme:

$$\delta fx = k_0\delta q_0 + k_1\delta q_1 + k_2\delta q_2,$$

k_0, k_1, k_2 étant des fonctions rationnelles et entières de p_0, p_1, q_0, q_1, q_2. Pour trouver des expressions moins compliquées de k_0, k_1, k_2, partons de l'équation

$$q_2P^2 + q_1PQ + q_0Q^2 = q_2^2fx.$$

Remarquons d'abord, que, puisque cette équation est identique, il s'ensuit que la somme $q_1P + q_0Q$ doit être divisible par q_2, la fonction Q ne l'étant pas. Désignons par $-w$ la valeur de $\frac{q_1P + q_0Q}{q_2}$, on trouvera:

$$w = -q_0^2 - p_0q_1q_2 + p_1q_0q_2,$$

et on aura

$$P^2 - wQ = q_2fx.$$

Cela posé différentions l'équation

$$q_2 f x = P^2 - w Q,$$

en considérant x comme racine de l'équation $fx = 0$; nous obtiendrons:

$$q_2 f' x \partial x + 2 P \delta P - w \delta Q - Q \delta w = 0,$$

ou bien:

$$q_2 f' x \partial x + 2 P \delta (q_0 q_1 + p_0 q_2 q_2) - w \delta (q_0 q_2 - q_1 q_1 - p_1 q_2 q_2)$$
$$- Q \delta (-q_0^2 - p_0 q_1 q_2 + p_1 q_0 q_2) = 0.$$

En développant cette équation on trouve:

3. $$q_2 f' x \partial x + (2 q_1 P - w q_2 + 2 q_0 Q - p_1 q_2 Q) \delta q_0 + (2 P q_0 + 2 w q_1 + p_0 q_2 Q) \delta q_1$$
$$+ (4 p_0 q_2 P + 2 w p_1 q_2 - w q_0 + p_0 q_1 Q - p_1 q_0 Q) \delta q_2 = 0.$$

Remarquons qu'on a

$$q_1 P + q_0 Q = - q_2 w, \quad q_0 P + q_1 w = (p_0 q_0 q_2 - p_0 q_1 q_1 + p_1 q_0 q_1) q_2,$$
$$p_0 q_1 Q - p_1 q_0 Q - q_0 w = (p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w.$$

Multipliant cette formule par q_2, et substituant au lieu de $(p_0 q_1 - p_1 q_0) q_2$ sa valeur: $- w - q_0^2$, on aura:

$$\{(p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w\} q_2 = - w Q - q_0^2 Q - q_0 q_2 w.$$

Mais puisque $P^2 - w Q = q_2 f x = 0$, on peut substituer P^2 au lieu de $w Q$, et on aura:

$$- P^2 - q_0^2 Q - q_0 q_2 w = \{(p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w\} q_2.$$

Substituant les valeurs de P, Q, w, on trouve:

$$(p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w = (- p_0 q_0 q_1 - p_0 p_0 q_2 q_2) q_2 = - p_0 q_2 P.$$

En divisant l'équation (3.) par q_2, on obtient:

$$f' x \partial x - (3 w + p_1 Q) \delta q_0 + (2 p_0 q_0 q_2 - 2 p_0 q_1 q_1 + 2 p_1 q_0 q_1 + p_0 Q) \delta q_1$$
$$+ (3 p_0 P + 2 p_1 w) \delta q_2 = 0.$$

En introduisant de nouveau les quantités P, Q, on trouve:

$$2 p_0 q_0 q_2 - 2 p_0 q_1 q_1 + 2 p_1 q_0 q_1 + p_0 Q = 3 p_0 Q + 2 p_1 P;$$

d'où il s'ensuit:

$$f' x \partial x = (3 w + p_1 Q) \delta q_0 - (3 p_0 Q + 2 p_1 P) \delta q_1 - (3 p_0 P + 2 p_1 w) \delta q_2.$$

Cette formule donne:

$$k_0 = - 3 w - p_1 Q; \quad k_1 = 3 p_0 Q + 2 p_1 P; \quad k_2 = 3 p_0 P + 2 p_1 w.$$

On voit aisément, que les produits $\frac{wP}{Q}$, $\frac{wP^2}{Q^2}$, $\frac{wP^3}{Q^3}$ ont des valeurs entières, pourvu que la quantité x soit envisagée comme racine de l'équation $fx = 0$. En effet, on a dans ce cas $w = \frac{P^2}{Q}$, et l'équation

$$P^3 + p_1 P Q^2 + p_0 Q^3 = 0,$$

donne

$$\frac{wP}{Q} = \frac{P^3}{Q^2} = - (p_1 P + p_0 Q).$$

De là on tire

$$\frac{wP^2}{Q^2} = -(p_1 w + p_0 P);\quad \frac{wP^3}{Q^3} = -p_0 w + p_1(p_1 P + p_0 Q).$$

D'après ces remarques, on déduira aisément les relations suivantes:

$$k_1 = k_0 \frac{P}{Q};\quad k_2 = k_1 \frac{P}{Q} = k_0 \frac{P^2}{Q^2}.$$

Multiplions maintenant l'équation:

$$-\partial x = \frac{k_0 \delta q_0 + k_1 \delta q_1 + k_2 \delta q_2}{f' x}$$

à gauche par $\frac{Az}{c-x}$, et à droite par la valeur rationnelle de cette quantité: $\frac{AP}{c-x.Q}$, A étant un polynome entier en x. En substituant les valeurs des produits de k_0, k_1, k_2 multipliés par $\frac{P}{Q}$, on trouve:

$$4.\quad -\frac{Az\partial x}{c-x} = \frac{A[(3p_0 Q + 2p_1 P)\delta q_0 + (3p_0 P + 2p_1 w)\delta q_1 + (3p_0 w - 2p_1(p_1 P + p_0 Q))\delta q_2]}{c-x.f'x}.$$

Multipliant cette équation encore une fois par $z = \frac{P}{Q}$, et remplaçant A par un autre polynome entier B, on aura:

$$5.\quad -\frac{Bz^2\partial x}{c-x} =$$

$$\frac{B[(3p_0 P + 2p_1 w)\delta q_0 + (3p_0 w - 2p_1(p_1 P + p_0 Q))\delta q_1 - (3p_0(p_1 P + p_0 Q) + 2p_1(p_1 w + p_0 P))\delta q_2]}{c-x.f'x},$$

Ecrivons pour abréger

$$-\frac{Az\partial x}{c-x} = \frac{A\theta x}{c-x.f'x} \text{ au lieu de l'équation (4.),}$$

et

$$-\frac{Bz^2\partial x}{c-x} = \frac{B\lambda x}{c-x.f'x} \text{ au lieu de (5.).}$$

Chacune de ces deux équations a lieu pour une quelconque des racines de l'équation $fx = 0$. En ajoutant toutes ces équations, et posant

$$\frac{A_1 z_1 + B_1 z_1^2}{c-x_1}\partial x_1 + \frac{A_2 z_2 + B_2 z_2^2}{c-x_2}\partial x_2 + \ldots + \frac{A_\mu z_\mu + B_\mu z_\mu^2}{c-x_\mu}\partial x_\mu = S,$$

on trouve

$$6.\quad -S = \frac{A_1\theta x_1}{c-x_1.f'x_1} + \frac{A_2\theta x_2}{c-x_2.f'x_2} + \ldots + \frac{A_\mu \theta x_\mu}{c-x_\mu.f'x_\mu} + \frac{B_1\lambda x_1}{c-x_1.f'x_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_\mu \lambda x_\mu}{c-x_\mu.f'x_\mu}.$$

Dans cette formule je désigne p. e. par A_1 la valeur de A, l'orsqu'on y substitue x_1 au lieu de x; je désignerai par A_c la valeur de A, lorsqu'on y met c à la place de x. On voit, que l'expression (6.) de S peut être sommée. En effet les numérateurs $A_1\theta x_1$, $B_1\lambda x_1$ etc. sont des fonctions entières des racines x_1, x_2, x_3 .... respectivement; on aura donc, d'après les règles connues,

$$-S = \frac{A_c\,\theta c}{fc} + \frac{B_c\,\lambda c}{fc} - \psi c,$$

en comprenant sous le signe ψc la totalité des puissances positives ou zéro qui peuvent se rencontrer dans la formule $\frac{A_c\theta c}{fc} + \frac{B_c\lambda c}{fc}$, et qu'il faut en retrancher.

Multipliant par $R = q_2 P - q_1 Q$ la fonction θc, on trouvera:

7. $R\theta c = (3p_0Q+2p_1P)R\delta q_0 + (3p_0P+2p_1w)R\delta q_1 + (3p_0w - 2p_1(p_0Q+p_1P))R\delta q_2$,

en mettant partout c à la place de x dans les polynomes p_0, p_1, q_0, q_1, q_2 et les quantités qui en dépendent.

Si après avoir développé la valeur de $Q\delta P - P\delta Q$ on la multiplie par $3p_0Q + 2p_1P$, on trouve:

$$8.\quad (3p_0Q+2p_1P)(Q\delta P - P\delta Q) =$$
$$(3p_0Q+2p_1P)(-R\delta q_0 + (q_0Q+2q_1P)\delta q_1 + (2p_0q_2Q - q_0P + 2p_1q_2P)\delta q_2).$$

Prenons la somme des équations (7.) et (8.); il est clair que les termes multipliées en δq_0 se détruisent mutuellement et nous aurons:

$$R\theta c + (3p_0P + 2p_1Q)(Q\delta P - P\delta Q) = \alpha\delta q_1 + \beta\delta q_2;$$

en supposant

$$\alpha = (3p_0P + 2p_1w)(q_2P - q_1Q) + (3p_0Q + 2p_1P)(q_0Q + 2q_1P),$$
$$\beta = (3p_0w - 2p_0p_1Q - 2p_1^2P)(q_2P - q_1Q)$$
$$+ (2p_0q_2Q - q_0P + 2p_1q_2P)(3p_0Q + 2p_1P).$$

On peut mettre la valeur de α sous la forme:

$$\alpha = 3p_0(q_2P^2 + q_1PQ + q_0Q^2) + 2p_1(q_2wP - q_1wQ + q_0PQ + 2q_1P^2).$$

Or on avait

$$q_2P^2 + q_1PQ + q_0Q^2 = q_2^2fc;\quad q_2w + q_1P + q_0Q = 0;\quad P^2 - wQ = q_2fc.$$

De là on tire

$$q_2wP - q_1wQ + q_0PQ + 2q_1P^2 = q_1P^2 - q_1wQ = q_1q_2fc,$$

ce qui donne

$$\alpha = (3p_0q_2 + 2p_1q_1)q_2fc.$$

Appliquons au coëfficient β de semblables reductions. On a

$$\beta = 3p_0(q_2Pw - q_1wQ + 2p_0q_2Q^2 - q_0PQ + 2p_1q_2PQ)$$
$$+ 2p_1((p_0Q + p_1P)(q_1Q - q_2P) + 2p_0q_2PQ - q_0P^2 + 2p_1q_2P^2).$$

Or on trouve, à l'aide des équations $P^3 + p_1PQ^2 + p_0Q^3 = (q_2P - q_1Q)fc$; $q_2w = -q_0Q - q_1P$; $-wQ = q_2fc - P^2$, les égalités suivantes:

$$q_2Pw - q_1wQ - q_0PQ = -2q_0PQ - 2q_1P^2 + q_1q_2fc,$$

$$2q_2(p_0Q^2+p_1PQ)=2q_2\frac{(q_2P-q_1Q)(fc-P^3)}{Q}=\frac{2(q_2q_2fc-q_2P^2)P}{Q}-2q_1q_2fc,$$
ou bien
$$2q_2(p_0Q^2+p_1PQ)=2(q_1P^2+q_0PQ)-2q_1q_2fc.$$
On tire de là
$$q_2Pw-q_1wQ-q_0PQ+2p_0q_2Q^2+2p_1q_2PQ=-q_1q_2fc.$$
La seconde partie de la valeur de β, multipliée en $2p_1$, se réduit à $-2p_1q_1q_1fc$. Pour démontrer cette proposition, mettons d'abord la partie en question sous la forme:
$$(p_0Q+p_1P)(q_1Q+q_2P)-q_0P^2(=\beta').$$
Mettant $\frac{q_2^2fc-q_0Q}{P}$ au lieu de q_1P+q_2P, et réduisant au même dénominateur, on trouvera $\beta'=\frac{(p_0Q+p_1P)(q_2q_2fc-q_0Q^2)-q_6P^3}{P}$, d'où il s'ensuit:
$$P\beta'=(p_0Q+p_1P)q_2q_2fc-(q_2P-q_1Q)q_0fc=$$
$$[(q_0q_1+p_0q_2q_2)Q+(p_1q_2q_2-q_0q_2)P]fc,$$
ou bien, puisque $q_0q_1+p_0q_2q_2=P$,
$$\beta'=(Q+p_1q_2q_2-q_0q_2)fc=-q_1q_1fc;\text{ c. q. f. d.}$$
Donc on a
$$\beta=-(3p_0q_2+2p_1q_1)q_1fc.$$
Réunissant les résultats obtenus, nous avons:
$$R\theta c+(3p_0Q+2p_1P)(Q\delta P-P\delta Q)=(3p_0q_2+2p_1q_1).fc.(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2).$$
Divisons cette égalité par $Rfc=P^3+p_1PQ^2+p_0Q^3$, nous aurons

$$8.\quad \frac{\theta c}{fc}+\frac{(3p_0Q+2p_1P)(Q\delta P-P\delta Q)}{P^3+p_1PQ^2+p_0Q^3}=\frac{(3p_0q_2+2p_1q_1)(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2)}{q_1^3+p_0q_2^3+p_1q_1q_2^2}.$$

Si l'on pose $\frac{P}{Q}=Z$, $\frac{q_1}{q_2}=v$, on obtient:

$$9.\quad \frac{\theta c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)\delta Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{(3p_0+2p_1v)\delta v}{v^3+p_3v+p_0}.$$

Après avoir dévéloppé la fonction $\frac{\theta c}{fc}$, il reste encore à traiter semblablement l'autre partie $\frac{\lambda c}{fc}$. En multipliant par R la valeur de λc, on trouve:
$$R\lambda c=(3p_0P+2p_1w)R\delta q_0+(3p_0w-2p_0p_1Q-2p_1^2P)R\delta q_1$$
$$-(3p_0(p_0Q+p_1P)+2q_1(p_0P+p_1w))R\delta q_2.$$
Ajoutons à cette équation la suivante:
$$(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}(Q\delta P-P\delta Q)=$$
$$(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}[-R\delta q_0+(q_0Q+2q_1P)\delta q_1+(2p_0q_2Q-q_0P+2p_1q_2P)\delta q_2];$$

nous obtiendrons, en réfléchissant qu'on a $w - \frac{P^2}{Q} = -\frac{q_2 fc}{Q}$,

$$11.\quad R\lambda c + (3p_0 Q + 2p_1 P)\frac{P}{Q}(Q\delta P - P\delta Q) = -\frac{2p_1 q_2 Rfc}{Q}\delta q_0 + \gamma\delta q_1 + \varepsilon\delta q_2.$$

On a, en vertu des équations

$$\frac{wP}{Q} = \frac{P^3}{Q^2} - \frac{q_2 Pfc}{Q^2},\quad \frac{P^3}{Q^2} + p_1 P + p_0 Q = \frac{(q_2 P - q_1 Q)fc}{Q^2},$$
$$\frac{wP}{Q} = -p_1 P - p_0 Q - \frac{q_1 fc}{Q}.$$

Cette équation donne:

$$(3p_0 P + 2p_1 w)\frac{P}{Q} = 3p_0 w - 2p_1(p_0 Q + p_1 P) - \frac{2p_1 q_1 fc}{Q} + \frac{3p_0 q_2 fc}{Q}.$$

Donc on pourra mettre le multiplicateur γ de δq_1 sous la forme:

$$\gamma = [(3p_0 P + 2p_1 w)R + (3p_0 Q + 2p_1 P)(q_0 Q + 2q_1 P)]\frac{P}{Q} + \frac{2p_1 q_1 Rfc}{Q} - \frac{3p_0 q_2 Rfc}{Q}.$$

En comparant avec cette formule la valeur primitive de α, on verra que la valeur de γ devient:

$$\gamma = \frac{\alpha P}{Q} + \frac{2p_1 q_1 Rfc}{Q} - \frac{3p_0 q_2 Rfc}{Q},$$

et puisque

$$\alpha = (3p_0 q_2 + 2p_1 q_1)q_2 fc,\quad R = q_2 P - q_1 Q,$$
$$\gamma = \frac{(3p_0 q_2 + 2p_1 q_1)Pq_2 + 2p_1 q_1(q_2 P - q_1 Q) - 3p_0 q_2(q_2 P - q_1 Q)}{Q} fc$$
$$= \left(3p_0 q_1 q_2 - 2p_1 q_1 q_1 + \frac{4p_1 q_1 q_2 P}{Q}\right) fc.$$

On a

$$(3p_0 w - 2p_0 p_1 Q - 2p_1^2 P)\frac{P}{Q} =$$
$$-3p_0(p_0 Q + p_1 P) - 2p_1(p_0 P + p_1 w) - \frac{3p_0 q_1 fc}{Q} - \frac{2p_1^2 q_2 fc}{Q}.$$

Par cette raison le facteur de δq_2 devient

$$\varepsilon = [(3p_0 w - 2p_0 p_1 Q - 2p_1^2 P)R$$
$$+ (3p_0 Q + 2p_1 P)(2p_0 p_2 Q - q_0 P + 2p_1 p_2 P)]\frac{P}{Q} + \frac{(3p_0 q_1 + 2p_1^2 q_2)Rfc}{Q}.$$

Substituant dans cette égalité β au lieu de sa valeur, on trouve:

$$\varepsilon = \frac{\beta P}{Q} + \frac{(3p_0 q_1 + 2p_1^2 q_2)Rfc}{Q}.$$

Or la valeur finale de β était: $\beta = -(3p_0 q_2 + 2p_1 q_1)q_1 fc$; donc on obtient, en effaçant les termes qui se détruisent mutuellement,

$$\varepsilon = \frac{2p_1(p_1 q_2 q_2 - q_1 q_1)P}{Q} fc - (3p_0 q_1 + 2p_1^2 q_2)q_1 fc.$$

En vertu des valeurs obtenues de γ et de ε, l'équation (10.) devient:

$$R\lambda c+(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}(Q\delta P-P\delta Q)=-\frac{2p_1q_2Rfc}{Q}\delta q_0$$
$$+\left(3p_0q_1q_2-2p_1q_1q_1+\frac{4p_1q_1q_2P}{Q}\right)fc\,\delta q_1$$
$$+\left\{\frac{2p_1(p_1q_2^2-q_1^2)P}{Q}-(3p_0q_1+2p_1^2q_2)q_1\right\}fc\,\delta q_2.$$

Rassemblant en groupes les termes multipliés par $3p_0$ et par $2p_1$, on obtient:

11. $R\gamma c+(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}(Q\delta P-P\delta Q)=3p_0q_1fc(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2)-\frac{2p_1L}{Q}fc$;

en désignant par L la fonction:

$$q_2R\delta q_0+(q_1^2Q-2q_1q_2P)\delta q_1+(q_1^2P-p_1q_2^2P+p_1p_1q_2Q)\delta q_2=L.$$

On a

$$R=q_1^3+p_1q_1q_2^2+p_0q_2^3;$$
$$q_2^2Q-2q_1q_2P=-q_1(q_0q_1q_2+q_1^3+2p_0q_2^3+p_1q_1q_2^2).$$
$$q_1^2P-p_1q_2^2P+p_1q_1q_2Q=q_0q_1^3+p_0q_1^2q_2^2-p_1q_1^3q_2-p_0p_1q_2^4-p_1^2q_1q_2^3.$$

Cela posé divisons l'équation (11.) par $Rfc=P^3+p_1PQ^2+p_0Q^3$, et mettons pour abréger z à la place de $\frac{P}{Q}$; nous aurons

12. $$\frac{\lambda c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)Z\delta Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{3p_0q_1(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2)}{q_1^3+p_1q_1q_2^2+p_0q_2^3}-\frac{2p_1L}{QR}.$$

Introduisons encore les quantités $v=\frac{q_1}{q_2}$, $u=\frac{q_0}{q_2}$; et divisons par q_2^5 les valeurs de L et de QR; nous trouverons:

$$q_2^5L=(v^3+p_1v+p_0)\frac{\delta q_0}{q_2}-(uv+v^3+2p_0+p_1v)v\frac{\delta q_1}{q_1}+$$
$$(uv^3+p_0v^2-p_1v^3-p_0p_1-p_1^2v)\frac{\delta q_2}{q_2},$$
$$q_2^5QR=(u-v^2-p_1)(v^3+p_1v+p_0).$$

Les valeurs de u et de v donnent immédiatement

$$\frac{\delta q_0}{q_2}=\delta u+u\frac{\delta q_2}{q_2},\quad \frac{\delta q_1}{q_2}=\delta v+v\frac{\delta q_2}{q_2}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{\delta q_0}{q_2}$ et $\frac{\delta q_1}{q_2}$ dans l'expression trouvée de L, on aura, en réduisant,

$$q_2^5L=(v^3+p_1v+p_0)\delta u-(v^3+p_1v+2p_0+uv)v\delta v$$
$$+(v^3+p_1v+p_0)(u-v^2-p_1)\frac{\delta q_2}{q_2}.$$

Ces réductions achevées on obtient:

$$\frac{\lambda c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)Z\partial Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{3p_0v\partial v}{v^3+p_1v+p_0}-\frac{2p_1\partial u}{u-v^2-p_1}$$
$$+\frac{2p_1(v^2+p_1v+2p_0+uv)v\partial v}{(v^3+p_1v+p_0)(u-v^2-p_1)}-\frac{2p_1\partial q_2}{q_2},$$

ou bien

$$13.\quad \frac{\lambda c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)Z\partial Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{(3p_0+2p_1v)v\partial v}{v^3+p_1v+p_0}-\frac{2p_1(\partial u-2v\partial v)}{u-v^2-p_1}-\frac{2p_1\partial q_2}{q_2}.$$

En mettant les valeurs de $\frac{\theta c}{fc}$ et $\frac{\lambda c}{fc}$, tirées des équations (9.) et (13.), dans l'expression de S, savoir:

$$S=-\frac{A_c\theta c}{fc}-\frac{B_c\lambda c}{fc}+\psi c,$$

on obtiendra le résultat suivant:

$$14.\quad S=\frac{(3p_0+2p_1Z)(A_c+B_cZ)\partial Z}{Z^3+p_1Z+p_0}-\frac{(3p_0+2p_0v)(A_c+B_cv)\partial v}{v^3+p_1v+p_0}$$
$$+\frac{2p_1B_c(\partial u-2v\partial v)}{u-v^2-p_1}+\frac{2p_1B_c\partial q_2}{q_2}+\psi c.$$

Je ne m'arrêterai pas à dévélopper l'intégrale de cette différentielle, qu'on pourra trouver par les règles connues au moyen de la résolution d'une équation cubique, qui avait été supposée dès le commencement, en se rappelant, que les quantités p_0, p_1, A_c, B_c sont invariables. Quant à la partie ψc, on la trouvera en dévéloppant d'après les puissances descendantes de c la partie restante de l'expression de S et prenant pour ψc la somme des puissances positives ou zéro de ce dévéloppement, avec un signe opposé. Et l'on doit conclure, que chaque terme de ce dévéloppement pourra s'intégrer s'éparément, puisque la fonction totale est intégrable indépendamment de toute valeur particulière de la constante c.

La sommation achevée se rapporte aux intégrales de la forme $\int\frac{Az+Bz^2}{c-x}\partial x$. Mais si l'intégrale proposée était $\int\frac{Az+Bz_2}{\varphi x}\partial x$, la quantité c n'est donnée que par la résolution de l'équation $\varphi x=0$. Supposons $\varphi x=(c_1-x)(c_2-x)(c_3-x)\ldots.$ Si toutes les racines c_1, c_2, $c_3\ldots.$ sont inégales, on a:

$$15.\quad \frac{1}{\varphi'c_1.c_1-x}+\frac{1}{\varphi'c_2.c_2-x}+\frac{1}{\varphi'c_3.c_3-x}\ldots.=-\frac{1}{\varphi x}.$$

Désignons pour abrégér, par $\frac{\chi c}{\psi c}$ la valeur de S, donnée par l'équation (14.), χ et ψ étant deux fonctions rationnelles et entières par rapport à c, et faisons

$$\Sigma = \frac{A_1 z_1 + B_1 z_1^2}{-\varphi x_1}\partial x_1 + \frac{A_2 z_2 + B_2 z_2^2}{-\varphi x_2}\partial x_2 + \ldots . \frac{A_\mu z_\mu + B_\mu z_\mu^2}{-\varphi x_\mu}\partial x_\mu .$$

Mettant en lieu de $\frac{1}{\varphi x}$ sa valeur tirée de l'équation (15.), on trouvera;

$$\Sigma = \frac{\chi c_1}{\varphi' c_1 . \psi c_1} + \frac{\chi c_2}{\varphi' c_2 . \psi c_2} + \frac{\chi c_3}{\varphi' c_3 . \psi c_3} + \ldots .$$

La partie à droite étant rationnelle et symmétrique par rapport aux racines c_1, c_2.... de l'équation $\varphi x = 0$, il sera possible d'en chasser ces racines au moyen des coëfficiens de cette équation. Mais il paraît difficile, de démêler la forme précise et générale du résultat, à cause de la grande complication du calcul. Des recherches ultérieures réussiront peut-être à lever cette difficulté.

Berlin, Juillet 1833.

Errata.

Cah. 10. p. 195. lis. $y^2 + p = 0$ au lieu de $y^2 + p = 1$.

- — p. 292. dans les formules placées en ligne 7. et 8. $u + pv^2$ au lieu de $u + pv^3$.