

Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten.

Von

AXEL HARNACK in Leipzig.

Die nachstehenden Untersuchungen wollen die Behandlungsweisen der algebraischen Differentiale, welche durch drei homogene Variabele, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, definirt sind, ausbilden helfen. Die Einführung homogener Coordinaten gewährte zuerst ein zweckmässiges Mittel, um bei der Auswerthung der Integrale vom Geschlecht: $p = 0$ allgemeine Integrationsmethoden zu erkennen, welche durch die bis dahin übliche Form des Differentialies mehr oder minder verdeckt waren. Seitdem aber, zumal durch die Arbeiten von Clebsch, der innere Zusammenhang zwischen der Theorie der algebraischen Differentiale und der Theorie der algebraischen Curven erschlossen ward, musste die Verwerthung homogener Coordinaten bei der Behandlung der Differentiale dieselbe Bedeutung gewinnen, wie bei den Problemen der projectivischen Geometrie; denn ebenso wie hier bildet auch dort die unendlich ferne Gerade der Ebene für die zunächst gestellten Aufgaben nach keinerlei Beziehung eine besonders ausgezeichnete Linie. Nichtsdestoweniger ist seit der grundlegenden Arbeit von Aronhold die Rechnung mit homogenen Differentialen nur wenig gefördert worden. Auch in dem Werke von Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen) wird das Differential zwar durch trimetrische Coordinaten zuerst definirt, zu allen weiteren Entwicklungen jedoch in einen Ausdruck mit zwei nicht homogenen Veränderlichen umgewandelt*). Im Folgenden habe ich versucht, *die wesentlichsten Eigenschaften der Differentiale auf Grund ihrer Darstellbarkeit durch homogene Coordinaten einigermaßen vollständig abzuleiten*, und

*) In der Bearbeitung der „Vorlesungen über Geometrie von Clebsch“ hat Herr Lindemann die Rechnung mit trimetrischen Coordinaten durchaus beibehalten und dem entsprechend für die Ableitung des Jacobi'schen Satzes sowie des Abel'schen Theoremes neue Beweismethoden gegeben. (Vgl. den demnächst erscheinenden zweiten Theil des ersten Bandes: Abth. VI.)

durch diese Aufgabe ist die äussere Form, welche diese Untersuchungen erhalten haben, bedingt.

Die consequente Durchführung der Rechnung mit homogenen Veränderlichen schien sich mir in der That zuvörderst bei dem *Beweise des Additionstheorems* von neuem zu rechtfertigen. Denn der wesentliche Inhalt desselben, die Zurückführung einer Summe von *irrationalen* Integralen auf eine Summe von *rationalen*, lässt sich vermöge der homogenen Darstellung in anschaulicher Weise mit einer Eigenschaft algebraischer Functionen allgemeinerer Art identificiren, womit zugleich die fertige Form dieser rationalen Integrale, welche zu dem ursprünglichen irrationalen Integrale in sehr einfacher Verwandtschaft stehen, gegeben ist. Diese Eigenschaft war bereits von Jacobi für einen speciellen Fall erkannt und dem entsprechend von Clebsch für den Beweis des Abel'schen Theorems bei den Fällen, in welchen die Summe der irrationalen Integrale constant wird, verwerthet worden. In dem Beweise und in der Erweiterung, welche ich für diesen Satz im § 2. aufgestellt habe, ist, wie ich glaube, das Wesen desselben aufgedeckt, da hier eine wirkliche Rechnung nicht mehr nöthig ist und ausschliesslich mit den Begriffen der algebraischen Formen operirt wird. Diese Erweiterung kann zugleich als ein Corollar zu dem engeren Jacobi'schen Satze gefasst werden, indem man denselben auf eine *zerfallene* Fundamentalcurve anwendet; ebenso ergibt sich das allgemeine Abel'sche Theorem als eine Folgerung aus dem speciellen, nach welchem die Summe gewisser irrationaler Integrale constant wird, indem man wiederum für diese Integrale eine *reducibele* Curve zu Grunde legt (§ 3.).

Erst mit Zuhilfenahme dieses erweiterten Jacobi'schen Satzes gelingt es ferner, die Methoden, welche Aronhold zur Darstellung des Additionstheorems bei Integralen vom Geschlecht: $p = 0$, welche sich auf einen Kegelschnitt als Fundamentalcurve beziehen, gegeben hat, allgemein auf Differentiale von beliebigem Geschlechte auszudehnen und somit die Endformeln des Abel'schen Theorems, nämlich die Entwicklung einer Summe von rationalen Integralen nach logarithmischen und algebraischen Functionen, ohne jede beschränkende Voraussetzung abzuleiten. Bei diesen Untersuchungen, welche im § 4. ziemlich eingehend erörtert worden sind, kam es mir hauptsächlich darauf an, das Bildungsgesetz anzugeben für die constanten Coefficienten, mit welchen die logarithmischen und algebraischen Functionen, deren Anzahl und deren Form sich noch einfacher aus den Riemann'schen Betrachtungsweisen vorausbestimmen lässt, multiplicirt sind.

Die Behandlung des durch *homogene* Coordinaten definirten Differentiales führte aber auch dazu, nicht blos die Summe, sondern überhaupt *symmetrische Functionen* der für ein Schnittpunktsystem geltenden

Differentialwerthe zu bilden. Die Fragestellungen, welche sich hieran knüpfen und deren Ziele in dem ersten § des *zweiten Abschnittes* näher bezeichnet sind, leiten zur Integration von Differentialgleichungen, welche in der Form von Connexen auch schon bei der Betrachtung der algebraischen Curven nach den Methoden der projectivischen Geometrie als wesentlich erkannt worden sind. Wenn gerade diese Untersuchungen den Zusammenhang des algebraischen Differentialies mit der zu Grunde liegenden Curve noch weiter zu vertiefen bestimmt sind, und damit zugleich die Darstellungsweise desselben durch homogene Coordinaten ebenfalls rechtfertigen werden, so bieten sich doch andererseits für allgemeine Betrachtungen dieser Art gewisse Schwierigkeiten, so dass ich mich zunächst auf die Erörterung der einfachsten Fälle beschränken musste. Von den drei speciellen Problemen, welche sich auf Differentiale vom Geschlecht $p = 0, 1$ und 3 beziehen und bei diesen das Schnittpunktsystem einer Geraden behandeln, sind in dem zweiten Abschnitte die ersten beiden zu einem Abschlusse geführt, während das letzte zunächst nur eine formale Lösung gefunden hat.

Erster Abschnitt.

Das Additionstheorem der algebraischen Differentiale.

§ 1.

Darstellung der zu untersuchenden Differentialausdrücke.

Im 61. Bande des *Journal für die reine und angewandte Mathematik* hat Aronhold*) eine homogene und symmetrische Darstellung der algebraischen Differentiale gegeben, die den Ausgang aller derjenigen Untersuchungen bildet, welche die Theorie der algebraischen Integrale im Zusammenhange mit der Theorie der algebraischen Curven behandeln. In der bald darauf folgenden Abhandlung von Clebsch**) wurde diese Definition auch auf Differentiale mit n homogenen Veränderlichen, zwischen denen $n - 2$ Bedingungsgleichungen bestehen, ausgedehnt, während in der Arbeit von Nöther***) auch diejenigen Differentiale, welche zu mehrfachen Integralen Anlass geben, in entsprechender Weise definirt sind. Für die nachstehenden

*) Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form: $\Pi(xy) \cdot dx$, in welcher $\Pi(xy)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht.

**) Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. *Journal*, Bd. 63.

***) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. *Math. Annalen* Bd. 11.

Untersuchungen wird gleichfalls diese Aronhold'sche Form zu Grunde gelegt werden, wobei indessen von vornherein eine formale Aenderung bei der ursprünglichen Definition hervorgehoben werden soll, welche in vielen Fällen dazu dienen wird, bei der Behandlung einzelner Probleme eine Transformation des Differentials ein für allemal zu vermeiden. Durch diese Umformung wird zugleich das Differential als einer bestimmten Gattung von algebraischen Ausdrücken angehörig erscheinen, aus deren Eigenschaften sich alle auf das Differential bezüglichen Sätze ableiten lassen.

Bezeichnet man durch:

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3) = a_x^n = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung, bezogen auf Dreieckscoordinaten, so besteht nach dem Euler'schen Satze für jeden Punkt dieser Curve die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot x_3 = n \cdot f = 0,$$

während die dem Punkte x benachbarten Curvenpunkte $x + dx$ in erster Annäherung bekanntlich der Bedingung:

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot dx_3 = 0$$

genügen müssen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Proportion:

$$(4) \quad x_2 dx_3 - x_3 dx_2 : x_3 dx_1 - x_1 dx_3 : x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Mithin ist der Quotient:

$$\frac{c_1(x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + c_2(x_3 dx_1 - x_1 dx_3) + c_3(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{\frac{1}{n} \cdot \left(c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)} = \frac{|cx dx|}{a_x^{n-1} a_c}$$

von den willkürlichen Grössen c_i völlig unabhängig. Wird derselbe dann noch mit einer Function: $\Theta(x_1, x_2, x_3)$ multiplicirt, welche in den Variablen x_i rational und homogen ist, und deren Zähler um $n-3$ Ordnungen höher ist als der Nenner, so ist:

$$(5) \quad D = \frac{|cx dx| \Theta(x_1, x_2, x_3)}{a_x^{n-1} a_c} \quad (\text{unter der Bedingung: } f = a_x^n = 0)$$

der Aronhold'sche Differentialausdruck, welcher, wie leicht ersichtlich, nun noch von *einer* unabhängigen Veränderlichen bedingt ist.

Eine an sich nicht wesentliche Aenderung, deren Bedeutung an dem hier vorliegenden Falle von drei Variablen am wenigsten hervortritt, kann nun dadurch getroffen werden, dass man an Stelle des *einen* willkürlichen Punktes mit den Coordinaten: c_i die Coordinaten

zweier willkürlichen Linien ($u_y = 0$ und $v_y = 0$) einführt, welche, falls y laufende Coordinaten bedeuten, durch ihren Durchschnitt den Punkt c bestimmen. Vermittelst der Substitution:

$$\varrho \cdot c_i = \hat{u}v_i, \text{ das heisst: } \varrho \cdot c_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 \text{ u. s. w.}$$

geht dann das Differential (5) in die Form über:

$$(6) \quad D = \frac{\Theta(x_1 x_2 x_3) (u_x v_{dx} - v_x u_{dx})}{a_x^{n-1} (auv)},$$

in deren Nenner nunmehr eine Functionaldeterminante erscheint, auf deren Eigenschaften alle algebraischen Sätze über die zu untersuchenden Differentiale beruhen. Dabei sei insbesondere noch erwähnt, dass an Stelle der willkürlichen Linien: $u_y = 0$ und $v_y = 0$ die linearen Polaren des Punktes x in Bezug auf irgendwelche Curven: $\varphi_y^\mu = 0$ und $\psi_y^\nu = 0$ eingeführt werden können, so dass also die Coordinaten u_i und v_i von den veränderlichen Grössen x abhängig werden. Der Ausdruck (6) nimmt auf diese Weise die allgemeinste Form an:

$$(7) \quad D = \frac{\Theta(x_1 x_2 x_3) \varphi_x^{\mu-1} \psi_x^{\nu-1} (\varphi_x \psi_{dx} - \psi_x \varphi_{dx})}{a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \psi_x^{\nu-1} (a\varphi\psi)}, \quad (a_x^n = 0),$$

wobei also φ_x^μ und ψ_x^ν durchaus willkürliche Grössen bedeuten*).

Dass in der That dieser Ausdruck von den Grössen φ und ψ völlig unabhängig ist, folgt wiederum unmittelbar aus dem Satze der Proportionalität von $x \hat{d}x_i$ mit $a_x^{n-1} a_i$. Sodann ergibt sich in Uebereinstimmung hiermit, dass in allen Punkten x der Fundamentalcurve f , in denen der Zähler, abgesehen von der Form Θ , verschwindet, auch der Nenner von der nämlichen Ordnung gleich Null wird, und umgekehrt; denn das Verschwinden des Zählers wie des Nenners besagt, dass sich die Tangente im Punkte x an der Fundamentalcurve a_x^n mit den linearen Polaren des nämlichen Punktes in Bezug auf φ_x^μ und ψ_x^ν in einem Punkte schneidet. Auch wenn die Curven: f , φ und ψ gemeinsame Punkte besitzen sollten, bleibt diese Eigenschaft unverändert giltig. Dagegen bilden die etwa vorhandenen *singulären* Punkte der Fundamentalcurve eine Ausnahme; denn für diese Punkte

*) Wenngleich die hier vorangestellte Definition durch die Hinzunahme der Coordinaten *zweier* willkürlichen Linien nicht an Einfachheit zu gewinnen scheint im Vergleich zu der ursprünglichen Definition, welche dem Differentiale nur *einen* willkürlichen Punkt c adjungirt, so möge darauf hingewiesen werden, dass bei den zu Raumcurven oder Linienflächen gehörigen Differentialen zwei Punkt- oder vier Liniencoordinaten gewöhnlich eingeführt werden müssen, welche, dieser Darstellung entsprechend, immer nur durch *zwei* Ebenen- bezüglich *zwei* Complexcoordinaten ersetzt werden.

verschwindet die im Nenner stehende Functionaldeterminante unabhängig von den Curven φ und ψ . Die Null- und Unendlichkeitspunkte des Differentials, d. h. diejenigen Punkte, in welchen der Werth des zu integrierenden Differential D von anderer Ordnung wird als das Differential der veränderlichen Grösse x , werden demnach, abgesehen von den singulären Punkten der Fundamentalcurve, ausschliesslich durch die im Zähler und Nenner von Θ stehenden Functionen auf der Curve: $f = 0$ ausgeschnitten.

Das Integral, zu welchem das Differential (7) Anlass giebt, wird im Folgenden als „längs der Curve $a_x^n = 0$ hinerstreckt“ bezeichnet werden.

Die algebraischen Differentiale lassen diesen Entwicklungen zufolge die vor allem wesentliche Eigenschaft erkennen, dass sie gebrochene algebraische Functionen dreier homogenen Variabelen sind, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, und dass der Nenner derselben in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine die *Functionaldeterminante von drei Curven* darstellt. Bei allen Problemen nun, die sich auf die Ermittlung der Werthe beziehen, welche die Summe oder überhaupt die symmetrischen Functionen der Differentiale in den Schnittpunkten der Fundamentalcurve mit einer beliebigen anderen Curve annehmen, kann dieser Ausdruck ohne Weiteres so umgeformt werden, dass der *Nenner desselben nur noch die Functionaldeterminante enthält*. Zu dem Zwecke gebe man in der Form (7) der gebrochenen Function $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung den Werth:

$$\Theta_{(x_1, x_2, x_3)}^{n-3} = \frac{a_x^{n+n-3}}{\beta_x^n}.$$

Wird nun das Differential hingeleitet von den Schnittpunkten einer beliebigen Curve φ_x^μ bis zu den entsprechenden Punkten einer benachbarten Curve, welche mit $\varphi_x^\mu + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0$ bezeichnet werden möge (eine Bezeichnung, welche ausdrückt, dass die homogen vorkommenden Constanten der Curve φ in ihren gegenseitigen Verhältnissen unendlich wenig geändert sind), und soll die *Summe* der so erhaltenen Differentialwerthe dargestellt werden, so gelten für die Werthe: x_i und $x_i + dx_i$ die vier Gleichungen:

$$(8) \quad a_x^n = 0, \quad a_x^{n-1} a_{dx} = 0, \quad \varphi_x^\mu = 0, \quad \varphi_x^{\mu-1} \varphi_{dx} + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0,$$

Die letzte dieser Gleichungen, in welcher der bei formaler Differentiation auftretende Zahlenfactor μ des ersten Gliedes als Divisor zum zweiten Gliede hinzugedacht werden kann, besagt, dass die zu den Punkten x_i unendlich benachbarten Punkte $x_i + dx_i$ von der zu φ benachbarten Curve $\varphi + d\varphi$ ausgeschnitten werden. Setzt man noch

schliesslich die willkürliche Function ψ'_x gleich β_x^m , so geht das Differential (7) in die Form über:

$$(9) \quad D = - \frac{\beta_x^m \varphi_x^{\mu-1} \varphi_{dx} a_x^{m+n-3}}{\beta_x^m (a \varphi \beta) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \beta_x^{m-1}} = - \frac{\varphi_x^{\mu-1} d \varphi_x a_x^{m+n-3}}{(a \varphi \beta) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \beta_x^{m-1}}$$

unter der Bedingung: $a_x^n = 0$ und $\varphi_x^\mu = 0^*$).

§ 2.

Beweis und Erweiterung eines von Jacobi aufgestellten algebraischen Satzes.

Algebraische Ausdrücke von ähnlicher Art, wie wir sie soeben für das Differential entwickelt haben, sind zuerst von Jacobi**) gebildet und untersucht worden, dergestalt, dass sich aus diesen Untersuchungen die Anzahl der Bedingungsgleichungen ergab, welche zwischen den $\mu \cdot n$ Schnittpunkten der beiden Curven: $a_x^n = 0$ und $\varphi_x^\mu = 0$ bestehen müssen. Zu dem Zwecke genügte es, die dritte in der Functionaldeterminante des Nenners vorhandene Curve β_x^m als gerade Linie anzunehmen und den im Uebrigen *willkürlichen Zähler* dadurch einzuschränken, dass er die nämliche gerade Linie zum Factor erhielt. Für diese Function:

$$(1) \quad D = \frac{U_x^{\mu+n-3} \cdot v_x}{(a \varphi v) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1}}, \text{ oder } D \cdot \Psi - U_x^{\mu+n-3} \cdot v_x = 0, \\ (\Psi = (a \varphi v) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1})$$

gilt als wesentliche Eigenschaft der Satz, dass die Summe der Werthe von D , gebildet für die $\mu \cdot n$ Schnittpunkte der Curven $a_x^n = 0$ und $\varphi_x^\mu = 0$ identisch gleich Null ist.

Im Folgenden soll nun dieser Satz zunächst von neuem bewiesen, sodann aber durch eine einfache Umformung begrifflich erweitert werden. Zuvörderst muss als besondere Eigenthümlichkeit hervorgehoben werden, dass der Werth von D , gebildet für irgend einen der Schnitt-

*) In etwas anderer Weise ist diese Form (9) von Clebsch abgeleitet worden; a. a. O. p. 194.

**) Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variables propositarum. Journal t. 14.

De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis. Journal t. 15.

Eine Erweiterung dieses Jacobi'schen Satzes auf Functionen beliebig vieler Variablen ist von Clebsch (a. a. O. p. 224 ff.) gegeben worden.

punkte der beiden Curven: $\alpha_x^n = 0$ und $\varphi_x^\mu = 0$, völlig unabhängig von den Coefficienten der Form v_x ist, dass also statt der linearen Function v_x jede ganze und homogene algebraische Function der Grössen x substituirt werden kann; denn unter der Bedingung: $\alpha_x^n = 0$, $\varphi_x^\mu = 0$ ist:

$$(2) \quad \alpha_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} (a \varphi v) \cdot \alpha_x^v = \alpha_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \alpha_x^{v-1} (a \varphi \alpha) \cdot v_x,$$

also

$$\frac{v_x}{\alpha_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} (a \varphi v)} = \frac{\alpha_x^v}{\alpha_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \alpha_x^{v-1} (a \varphi \alpha)},$$

wobei α_x^v eine beliebige Function der angegebenen Ordnung bedeutet.

Um nun die Summe der Werthe von D für das Schnittpunktsystem: $\alpha_x^n = 0$, $\varphi_x^\mu = 0$ zu gewinnen, denke man sich die viel umfassendere Aufgabe gestellt: Es sollen aus diesen beiden Gleichungen, sowie der Gleichung (1): $D \cdot \Psi - U \cdot v_x = 0$, die Grössen x eliminiert werden. Durch diese Elimination müsste eine Gleichung vom Grade $\mu \cdot n$ in D hervorgehen, deren Wurzeln die einzelnen Werthe von D in den $\mu \cdot n$ Schnittpunkten der Curven a und φ liefern, während die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von D , dividirt durch den Coefficienten von $D^{\mu n}$, die einfachsten symmetrischen Functionen dieser Werthe repräsentiren. Unter diesen symmetrischen Functionen wird insbesondere die gesuchte Summe dadurch gegeben sein, dass man den Coefficienten von $D^{\mu n - 1}$ durch den negativ genommenen Coefficienten von $D^{\mu n}$ dividirt; wir werden daher das Bildungsgesetz dieser beiden Coefficienten zu untersuchen haben. Aus der Zusammenstellung der drei Gleichungen:

$$(3) \quad \alpha_x^n = 0, \quad \varphi_x^\mu = 0, \quad D \cdot \Psi - U \cdot v_x = 0$$

wird ersichtlich, dass der Factor von $D^{\mu n}$ aus der Resultante von a , φ und Ψ besteht. Die Resultante zweier Curven a und φ und ihrer mit Hinzunahme einer dritten Curve v gebildeten Functional-determinante zerfällt aber bekanntlich in zwei Factoren, von denen der eine die Resultante der drei Curven a , φ und v repräsentirt, indessen der andere, unabhängig von den Coefficienten v , die Berührungsinvariante der beiden erstgenannten Curven darstellt*). Der Beweis dieses Satzes, der auch durch rein geometrische Schlüsse leicht zu begründen ist, folgt auf algebraischem Wege aus der sub (2) gegebenen Relation, die wir kurz so schreiben wollen: $(a \varphi v) \cdot \alpha_x = (a \varphi \alpha) \cdot v_x$. Aus derselben

*) Salmon: Geometrie der höheren ebenen Curven. Deutsch bearbeitet von Fiedler (Art. 98).

Zu dem im Texte eingeschlagenen Beweisgange vergl.: Gordan, Resultanten von Covarianten (Math. Annalen Bd. IV).

ergiebt sich, wenn die Resultante von a , φ und ψ mit $R_{(a, \varphi, \psi)}$ bezeichnet wird, die Gleichung:

$$R_{(a, \varphi, \psi)} \cdot R_{(a, \varphi, \alpha)} = R_{(a, \varphi, (a\varphi\alpha))} \cdot R_{(a, \varphi, v)}.$$

Demnach ist:

$$(4) \quad R_{(a, \varphi, \psi)} = R_{(a, \varphi, v)} \cdot \frac{R_{(a, \varphi, (a\varphi\alpha))}}{R_{(a, \varphi, \alpha)}},$$

das heisst: die gesuchte Resultante besteht aus zwei Factoren. Die Bedeutung des zweiten Factors, welcher zufolge der linken Seite dieser Gleichung von den Grössen α nur scheinbar abhängen und also lediglich eine simultane Form zwischen a und φ darstellen kann, wird aus der Forderung erkannt, dass die drei Gleichungen: $a_x^n = 0$, $\varphi_x^\mu = 0$ und

$$(a\varphi\alpha) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} \alpha_x^{r-1} = 0 \text{ beim Verschwinden der Form: } \frac{R_{(a, \varphi, (a\varphi\alpha))}}{R_{(a, \varphi, \alpha)}}$$

für jeden Werth von α gleichzeitig bestehen müssen, was nur so möglich ist, dass die ersten Ableitungen von a_x^n denen von φ_x^μ proportional werden, das heisst: dass die Curven a und φ sich in einem ihrer Schnittpunkte berühren.

Da nun aber die einzelnen Werthe von D nur scheinbar von den Coefficienten der Form: v_x abhängen, so müssen sich auch die symmetrischen Functionen aus diesen μn Werthen unabhängig von v darstellen lassen; es werden also in der gesuchten Gleichung alle Coefficienten, falls sie nicht überhaupt identisch verschwinden, die Resultante: $R_{(a, \varphi, v)}$ zum Factor haben. *Nach Weglassung dieser allen Gliedern gemeinsamen Form besteht der Factor von $D^{\mu n}$ nur noch aus der Berührungsinvariante der Curven a_x^n und φ_x^μ .* Die Bedeutung derselben als des zum höchsten Gliede der Gleichung gehörigen Coefficienten ist durch den Satz ausgesprochen, dass bei einer Berührung der beiden genannten Curven der Werth von mindestens einer der Grössen D unendlich wird. Weil jedoch bei einer Berührung der beiden Curven, wozu hierbei auch die Fälle gerechnet werden müssen, dass einer der gemeinsamen Punkte von a_x^n und φ_x^μ zugleich ein singulärer Punkt für eine der beiden Curven ist, *jedenfalls zwei* Werthe von D zusammenfallen und unendlich gross werden, so müsste auch der Coefficient von $D^{\mu n-1}$, falls er nicht überhaupt verschwindet, ausser der genannten Resultante die Berührungsinvariante zum Factor haben. Diese Möglichkeit ist aber dadurch ausgeschlossen, dass dieser Factor in den Coefficienten der beiden Grundformen um einen Grad niedriger ist als der vorangehende. Mithin ist die Forderung, dass das Verschwinden der Berührungsinvariante das Unendlichwerden zweier Werthe von D anzeige, nur dann erfüllt, wenn der Coefficient des zweiten Gliedes für jedes Schnittpunktsystem identisch verschwindet.

Bezeichnen wir also durch: $\sum_{(a_x^n=0, \varphi_x^\mu=0)} D$ die Summe der für das Schnitt-

system von $a_x^n=0$ und $\varphi_x^\mu=0$ gebildeten Werthe von D , so ist der Jacobi'sche Satz durch die Form:

$$(5) \quad \sum D = \sum \frac{U_x^{n+\mu-3} \cdot v_x}{(a\varphi v) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1}} = 0, \quad (a_x^n=0, \varphi_x^\mu=0)$$

dargestellt.

Man kann nun aus dieser Gleichung eine bemerkenswerthe Eigenschaft algebraischer Functionen ableiten, als deren Specialfall sich alsdann wieder die vorstehende Gleichung erweist. Da nämlich der Beweis, wie wir ihn geführt haben, völlig unabhängig davon war, ob eine der Curven a_x^n und φ_x^μ singuläre Punkte besitzt oder nicht, und von welcher Art diese etwaigen Singularitäten sind, so bleibt auch dann noch die Gleichung (5) bestehen, wenn wir annehmen, dass z. B. die Curve φ_x^μ in das Product zweier algebraischer Curven zerfällt. Setzt man nun:

$$\varphi_x^\mu = b_x^{n'} \cdot c_x^{n''}, \text{ wobei also } \mu = n' + n'',$$

so wird:

$$(a\varphi v) a_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} = \frac{n'}{n'+n''} \cdot a_x^{n-1} b_x^{n'-1} (abv) \cdot c_x^{n''} \\ + \frac{n''}{n'+n''} \cdot a_x^{n-1} c_x^{n''-1} (acv) \cdot b_x^{n'}.$$

Führt man diesen Werth in den Nenner des Ausdruckes für D ein und untersucht wiederum die Werthe, welche D in den Schnittpunkten von $a_x^n=0$ mit $b_x^{n'} \cdot c_x^{n''}=0$ annimmt, so zerfällt die Summe dieser Werthe in zwei Theile, je nachdem man die auf $b_x^{n'}=0$ oder $c_x^{n''}=0$ gelegenen Punkte betrachtet. Die Gleichung (5) gewinnt also die Form:

$$(6) \quad n'' \cdot \sum \frac{U_x^{n+n'+n''-3} \cdot v_x}{a_x^{n-1} b_x^{n'-1} (abv) \cdot c_x^{n''}} + n' \cdot \sum \frac{U_x^{n+n'+n''-3} \cdot v_x}{a_x^{n-1} c_x^{n''-1} (acv) \cdot b_x^{n'}} = 0.$$

Hier bezieht sich die erste Summe auf die Schnittpunkte von $a_x^n=0$ mit $b_x^{n'}=0$, die zweite auf die Schnittpunkte von $a_x^n=0$ mit $c_x^{n''}=0$. Jede dieser beiden Summen ist, wie oben bewiesen wurde, von den Coefficienten der Function v_x völlig unabhängig, so dass diese Gleichung ihre Giltigkeit nicht verliert, wenn in dem ersten Ausdrucke: v_x gleich $c_x^{n''}$, in dem zweiten: v_x gleich $b_x^{n'}$ gesetzt wird. Durch diese Substitutionen erhält man die Relation:

$$(7) \quad n'' \cdot \sum_{(a_x^n=0, b_x^{n'}=0)} \frac{U_x^{n+n'+n''-3}}{a_x^{n-1} b_x^{n'-1} c_x^{n''-1} (abc)} = n' \cdot \sum_{(a_x^n=0, c_x^{n''}=0)} \frac{U_x^{n+n'+n''-3}}{a_x^{n-1} b_x^{n'-1} c_x^{n''-1} (abc)}.$$

Aus der Symmetrie dieser beiden Ausdrücke in Bezug auf die drei Functionen a_x^n , $b_x^{n'}$, $c_x^{n''}$ folgt, dass diese Summen auch der mit n multiplicirten Summe von D gleich sind, wenn man die Werthe von D für die $n' \cdot n''$ Schnittpunkte von $b_x^{n'} = 0$ und $c_x^{n''} = 0$ berechnet. Das hiermit gewonnene Resultat, welches die Grundlage der folgenden Betrachtungsweisen bilden wird, fassen wir in dem Satz zusammen:

Ist ein Ausdruck von der Form:

$$(8) \quad D = \frac{U_x^{n+n'+n''-3}}{(abc)a_x^{n-1}b_x^{n'-1}c_x^{n''-1}}$$

gegeben, und wird die Summe der Werthe von D in den Schnittpunkten je zweier der drei in der Functionaldeterminante des Nenners enthaltenen Curven untersucht, was beispielsweise für die $n \cdot n'$ Schnittpunkte der beiden Curven a_x^n und $b_x^{n'}$ durch das Zeichen:

$$\sum_{(a_x^n=0, b_x^{n'}=0)} D$$

ausgedrückt werden mag, so besteht zwischen diesen Summenwerthen die Gleichung:

$$(9) \quad n'' \cdot \sum_{(a_x^n=0, b_x^{n'}=0)} D = n \cdot \sum_{(b_x^{n'}=0, c_x^{n''}=0)} D = n' \cdot \sum_{(c_x^{n''}=0, a_x^n=0)} D.$$

Der Jacobi'sche Satz ist als Specialfall in diesem mit begriffen; denn enthält die Function U eine der Functionen, z. B. $c_x^{n''}$, als Factor, so wird die Summe der Werthe von D auch in den Schnittpunkten von a und b gleich Null, weil für die Schnittpunkte von b und c , oder c und a jedes D sogar einzeln verschwindet. Zugleich lehrt der vorstehende Satz, dass $\sum D$ nur in den Fällen unendlich werden kann, wenn sich die Curven a , b und c in einem Punkte schneiden; dagegen bleibt sie bei einer einfachen oder auch mehrfachen Berührung zweier Curven endlich, wiewohl zwei oder mehr Werthe von D in diesem Falle unendlich gross sind.

Der Beweis für die Gleichung (9) kann auch auf die Weise gewonnen werden, dass man, direct von der Form (8) ausgehend, aus dieser sowie aus zweien der Curvengleichungen, z. B. $a_x^n = 0$, $b_x^{n'} = 0$ die Grössen x eliminirt. Der Coefficient von $D^{n \cdot n'}$ besteht wiederum aus der Resultante der drei Curven, multiplicirt mit der Berührungsinvariante von a und b , während der Coefficient des nächstfolgenden Gliedes aus der nämlichen Berührungsinvariante und einem anderen Ausdrucke zusammengesetzt ist, in welchem, wie leicht ersichtlich, die Coefficienten der drei Curven: a , b und c gleichberechtigt auftreten. Der aus beiden Coefficienten erhaltene Quotient reproducirt sich dem-

nach bis auf einen Zahlenfactor für jedes zwischen zweien der Curven bestehende Schnittpunktsystem*).

Aus unserem Beweise gänge wird ferner erschlossen, dass ebenso wie der specielle Jacobi'sche Satz auch der aus diesem abgeleitete allgemeinere seine Gültigkeit bei Schnittpunktsystemen beliebig vieler Variablen nicht verliert. Definirt man z. B. als Berührungsinvariante dreier Flächen diejenige Form ihrer Coefficienten, durch deren Verschwinden ausgesagt wird, dass in einem der gemeinsamen Punkte die drei Tangentialebenen ein Büschel bilden, so bleiben alle Schlussweisen unverändert bestehen, und es folgt auch hierbei der Satz:

Bedeutet: $a_x^n = 0$, $b_x^{n'} = 0$, $c_x^{n''} = 0$, $d_x^{n'''} = 0$ die Gleichungen von vier Flächen, so gilt, wenn U eine beliebige Function vom Grade: $n + n' + n'' + n''' - 4$ darstellt, für die Summe der Werthe von:

$$(10) \quad D = \frac{U}{(abcd) a_x^{n-1} b_x^{n'-1} c_x^{n''-1} d_x^{n'''-1}}$$

in den vier Punktsystemen, welche durch den Schnitt je dreier der Flächen erzeugt werden ($\sum_{(I)} D$ bezeichne das Schnittpunktsystem der Flächen: b , c und d), die Beziehung:

$$(11) \quad n \cdot \sum_{(I)} D = n' \cdot \sum_{(II)} D = n'' \cdot \sum_{(III)} D = n''' \cdot \sum_{(IV)} D.$$

Bei zwei Gleichungen $a_x^n = 0$ und $b_x^{n'} = 0$ mit zwei homogenen Veränderlichen beruht dieses Gesetz auf der Bedeutung der Discriminante und erhält die einfache Form:

Die Summe der Werthe von $D = \frac{U_x^{n+n'-2}}{(ab) a_x^{n-1} b_x^{n'-1}}$, gebildet für die Wurzeln der Gleichung $a_x^n = 0$, ist gleich der mit $\frac{n}{n'}$ multiplicirten Summe von D , gebildet für die Wurzeln der Gleichung $b_x^{n'} = 0$, wobei U jede beliebige Function vom angegebenen Grade sein kann.

*) Das Bildungsgesetz für den Coefficienten des Gliedes: $D^{nn'-1}$ lässt sich folgendermassen aussprechen: Bezeichne

$$c_x^{n+n'+n''-3} = (abc) a_x^{n-1} b_x^{n'-1} c_x^{n''-1}$$

die im Nenner von D stehende Functionaldeterminante, so wird die Resultante $R_{(a,b,c)}$ auch dann noch in ihre beiden Factoren zerfallen, wenn man alle Symbole c mit Ausnahme einer Symbolreihe durch Einführung der Werthe $(abc) a_i b_i c_i$ auflöst. Man ersetze nun in der Resultante $R_{(a,b,c)}$, in welcher dieser Entstehung zufolge immer noch eine Reihe der Symbole: a , b und c zu c zusammengefasst ist, diese Symbole c durch die von U . Multiplicirt man alsdann den so gewonnenen Ausdruck mit dem Zahlenfactor nn' und der Berührungsinvariante von a und b , so stellt dieses Product den gesuchten Coefficienten dar.

§ 3.

Das Abel'sche Theorem.

Der Satz, welchen wir im vorigen § für algebraische Ausdrücke von der Form D bewiesen haben, kann in gewissem Sinne als mit dem Abel'schen Theoreme identisch betrachtet werden, sobald wir ihn auf die algebraischen Differentiale anwenden, welche zufolge der Form (9) des § 1. dieser Classe von algebraischen Functionen angehören. Um dieses deutlich einzusehen, wird man zunächst die einfachsten Differentiale ins Auge zu fassen haben, das heisst diejenigen, welche entweder keine Unstetigkeitspunkte oder nur solche besitzen, die durch etwaige Singularitäten der Fundamentalcurve bedingt sind.

Für dieses Differential:

$$(1) \quad D = \frac{c x dx, \alpha_x^{n-3}}{\alpha_x^{n-1} a_c} \quad (\text{unter der Bedingung: } \alpha_x^n = 0),$$

dessen Summenwerth für die Schnittpunkte einer Curve $\varphi_x^\mu = 0$ und einer dieser benachbarten Curve: $\varphi_x^\mu + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0$ mit $\alpha_x^n = 0$ untersucht werden soll, ergibt sich zufolge der früheren Entwicklungen der gleichberechtigte Ausdruck:

$$(2) \quad D = \frac{\alpha_x^{n-3} v_x \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x}{\alpha_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} (a \varphi v)}, \quad (\alpha_x^n = 0, \varphi_x^\mu = 0),$$

wobei v_x eine im Uebrigen beliebige, ganze und homogene algebraische Function bedeutet, von deren Coefficienten die zu untersuchenden Werthe von D gänzlich unabhängig sind. Gemäss des Jacobi'schen Satzes ist also die Summe der Werthe eines algebraischen Differentiales hingeleitet auf der Curve $\alpha_x^n = 0$ von den μn Schnittpunkten der Curve $\varphi_x^\mu = 0$ bis zu den jedesmal benachbarten Schnittpunkten der Curve: $\varphi_x^\mu + \varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x = 0$ gleich Null, wenn das Differential nur in den etwa vorhandenen, singulären Punkten der Fundamentalcurve unendlich werden kann. Betrachtet man demnach die Summe von μn längs der Curve hinerstreckten Integralen des Differentiales D , bei denen die unteren Grenzpunkte durch die Curve $\varphi_x^\mu = 0$, die oberen durch $\psi_x^\mu = 0$ ausgeschnitten werden, und deren Integrationswege durch einen continuirlichen Uebergang von φ_x^μ zu ψ_x^μ festgelegt sind, so ist diese Integralsumme gleich einer Constanten, welche nur durch die Integrationswege, nicht aber durch die beiden äusseren Grenzsyste me bedingt ist*).

Aus dieser Gleichung, welche wir kurz so schreiben:

*) Clebsch a. a. O. p. 195.

$$(3) \quad \sum_{\varphi} \int^{\psi} D = \sum_{\varphi} \int^{\psi} \frac{|c x dx| \alpha_x^{n-3}}{\alpha_x^{n-1} a_c} = \text{const.} \quad (\alpha_x^n = 0),$$

wird nun wiederum, ebenso wie im vorigen §, eine neue und allgemeine Relation abgeleitet, wenn man annimmt, dass die Curve $\alpha_x^n = 0$, über deren Singularitäten keinerlei Voraussetzungen gemacht sind, in zwei Curven zerfällt, wenn man also statt α_x^n das Product: $\alpha_x^n \cdot \beta_x^m$ einführt. Alsdann wird nämlich:

$$(4) \quad \sum_{\varphi} \int^{\psi} \frac{|c x dx| \alpha_x^{m+n-3}}{n \cdot \beta_x^m \cdot \alpha_x^{n-1} a_c + m \cdot \alpha_x^n \cdot \beta_x^{m-1} \beta_c} = \text{const.} \quad (\alpha_x^n \cdot \beta_x^m = 0).$$

Diese Integralsumme zerfällt aber in zwei Theile, je nachdem die Integrale längs der Curve: $\alpha_x^n = 0$ oder längs: $\beta_x^m = 0$ geführt werden. Aus der Trennung dieser beiden Theile folgt die Relation:

$$(5) \quad m \cdot \sum_{\varphi} \int^{\psi} \frac{|c x dx| \alpha_x^{m+n-3}}{\beta_x^m \cdot \alpha_x^{n-1} a_c} = -n \cdot \sum_{\varphi} \int^{\psi} \frac{|c x dx| \alpha_x^{m+n-3}}{\alpha_x^n \cdot \beta_x^{m-1} \beta_c} + \text{const.}^*)$$

$(\alpha_x^n = 0) \qquad \qquad \qquad (\beta_x^m = 0)$

Beachtet man, dass die Curve $\beta_x^m = 0$ in den auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehenden Integralen die Unendlichkeitspunkte auf der Fundamentalcurve: $\alpha_x^n = 0$ ausschneidet, so lässt sich der Inhalt dieser Gleichung in dem Satze aussprechen:

Jede auf die Schnittpunktsysteme der Fundamentalcurve mit einem beliebigen Curvenpaare bezügliche Integralsumme kann direct durch die Summe neuer Integrale dargestellt werden, welche längs derjenigen Curve, die auf der ersten die Unendlichkeitspunkte des Integrales bestimmt, innerhalb der nämlichen Grenzen und auf den entsprechenden Integrationswegen hinstreckt sind.

Die beiden im Nenner stehenden Functionen haben mithin für jedes Schnittpunktsystem in Bezug auf Bildung der Integralsumme,

*) Substituirt man in den links stehenden Ausdruck für c den Werth: $\hat{\beta} \varphi \cdot \beta_x^{m-1} \varphi_x^{\mu-1}$, in den rechts stehenden den Werth: $c = \hat{a} \varphi \cdot \alpha_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1}$, so folgt die Gleichung:

$$m \sum_{\varphi} \frac{\varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x \cdot \alpha_x^{m+n-3}}{\alpha_x^{n-1} \beta_x^{m-1} \varphi_x^{\mu-1} (a \beta \varphi)} = -n \sum_{\varphi} \frac{\varphi_x^{\mu-1} d\varphi_x \cdot \alpha_x^{m+n-3}}{\beta_x^{m-1} \alpha_x^{n-1} \varphi_x^{\mu-1} (\beta a \varphi)},$$

$(\alpha_x^n = 0, \varphi_x^\mu = 0) \qquad \qquad \qquad (\beta_x^m = 0, \varphi_x^\mu = 0)$

wodurch auch dieser Satz direct auf den im vorigen § gegebenen zurückgeführt ist.

abgesehen von einer multiplicativen und einer additiven Constante, vollkommen gleiche Bedeutung.

Falls demnach β_x^m eine rationale Curve insbesondere eine gerade Linie darstellt, so wird durch diese Vertauschung die Summe von irrationalen Integralen irgend welchen Geschlechtes ohne Weiteres durch eine Summe von rationalen Integralen ausgedrückt, wie solches das Abel'sche Theorem verlangt.

Aber auch in dem Falle, dass die Unendlichkeitspunkte auf einer Curve von beliebigem Geschlechte liegen, führt nach einer einfachen Substitution die nämliche Vertauschungsweise zu einer Darstellung der Integralsumme durch lauter rationale Integrale. Eine Substitution, welche dieses leistet, ist folgende*): Man lege durch die mn Schnittpunkte der Curven: $\alpha_x^n = 0$ und $\beta_x^m = 0$ von einem beliebigen Punkte der Ebene aus mn gerade Linien, von denen jede die Curve α_x^n noch in $n-1$ weiteren Punkten schneidet. Bezeichnet man das Product dieser Geraden durch: $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(mn)}$, so lässt sich, im Allgemeinen noch auf mannigfaltige Art, eine Curve Θ von der $m(n-1)$ ten Ordnung finden, welche durch diese $mn(n-1)$ überflüssigen Schnittpunkte hindurchgeht; denn diese Bestimmung liefert für die $\frac{(mn-m)(mn-m+3)}{2}$

von einander unabhängigen Constanten der Function Θ nur $mn(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ lineare Bedingungsgleichungen. Es bleiben also noch $\frac{1}{2}(mn-m-n+1)(mn-m-n+2)$ Constanten willkürlich; über diese kann man, was indessen für die gegenwärtige Betrachtung nicht wesentlich ist, insbesondere so verfügen, dass die Curve Θ in dem gemeinsamen Schnittpunkte der mn Strahlen einen $(m-1)(n-1)$ -fachen Punkt erhält, was gerade mit $\frac{1}{2}(mn-m-n+1)(mn-m-n+2)$ Bedingungen äquivalent ist.

Demzufolge besteht bis auf Glieder mit dem Factor α_x^n die Gleichung:

$$(6) \quad p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(mn)} = \lambda \cdot \beta_x^m \cdot \Theta_x^{m(n-1)},$$

wobei λ eine beliebige, je nach der Normirung der homogenen Coeffi-

*) Um die Summe von irrationalen Integralen durch rationale auszudrücken, genügt es bereits eine rationale Curve zu bestimmen, welche, ohne in das Product von geraden Linien zu zerfallen, das nämliche Schnittpunktsystem wie β_x^m und überdies eine Anzahl von Punkten ausschneidet, deren Einfluss durch Aufnahme einer entsprechenden Function in den Zähler des Differentiales compensirt wird. Die im Texte ausgeführte Substitutionsweise ist deshalb gewählt worden, weil sie zugleich dazu dient, die Summe irrationaler Integrale nach logarithmischen und algebraischen Functionen zu entwickeln.

Vgl. hierzu: Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen p. 5 ff.

cienten zu bestimmende Constante bedeutet; denn bei variablem Werthe von λ ist innerhalb des Curvenbüschels:

$$p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(mn)} - \lambda \cdot \beta_x^m \cdot \Theta_x^{m(n-1)} = 0$$

jedenfalls eine Curve vorhanden, welche die Curve $\alpha_x^n = 0$ in $mn^2 + 1$ Punkten schneidet, das heisst: welche diese Curve als einen Theil ihrer selbst enthält. Nach Einführung des Werthes:

$$\beta_x^m = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(mn)}}{\Theta_x^{m(n-1)}}$$

in das Differential:

$$D = \frac{|cx \, dx| \alpha_x^{m+n-3}}{\beta_x^m \cdot \alpha_x^{n-1} a_c}$$

geht dieses in ein solches über, dessen Unendlichkeitspunkte durch lauter Gerade ausgeschnitten werden. *Nach dem Vertauschungssatze wird also die ursprüngliche Integralsumme auf eine Summe von mn verschiedenen Integralen gebracht, welche längs gerader Linien erstreckt, das heisst rational sind.* Auf jeder der mn Geraden $p_x^{(i)}$ ist die Integralsumme zu bilden von den μ Schnittpunkten der Curve φ ab bis zu den μ Schnittpunkten der Curve ψ , und jedes der auf eine dieser Geraden bezüglichen Integrale besitzt *zwei* Unendlichkeitspunkte, nämlich den einen in einem der Schnittpunkte von α_x^n mit β_x^m , den anderen, bei welchem der Nenner des Differentiales in der $(m+n-2)^{ten}$ Ordnung verschwindet, in dem gemeinsamen Schnittpunkt aller Geraden $p_x^{(i)}$.

§ 4.

Ueber die Darstellung von Summen rationaler Integrale durch logarithmische und algebraische Functionen.

Nachdem im vorhergehenden § gezeigt ist, wie sich die Summe von *irrationalen* Integralen durch eine Summe von *rationalen* Integralen ausdrücken lässt, erscheint es von weiterem Interesse, diese letztere Integralsumme nach logarithmischen und algebraischen Functionen zu entwickeln und dadurch auf ihre einfachsten Grundformen zurückzuführen. Es soll daher im Folgenden das auf eine Gerade als Fundamentalcurve bezügliche Integral, auf dessen Typus nach den letzten Entwicklungen die Summe aller algebraischen Integrale gebracht ist, näher behandelt und die Darstellung desselben durch logarithmische und rationale Functionen vollständig durchgeführt werden. Die Methode, welche dabei zur Anwendung kommen wird, unterscheidet sich in einigen Punkten, zum Theil wohl auch in der ganzen Auffas-

sung von derjenigen, welche Aronhold zur Lösung ähnlicher Aufgaben gegeben hat*).

I. Der Vollständigkeit halber beginne ich auch hier zunächst mit dem *irrationalen Differentiale*:

$$(1) \quad D = \frac{|cx dx| a_x^{n-2}}{v_x \cdot a_x^{n-1} a_c} \quad (\text{unter der Bedingung: } a_x^n = 0).$$

Die Curve $f = a_x^n$ möge beliebige Singularitäten besitzen; dagegen sei zuerst die Voraussetzung eingeführt, dass dieselbe von der Linie v_x in n Punkten geschnitten werde, von denen nicht mehr als je zwei zusammenfallen. Die Integralsumme, gebildet vom Differentiale D für ein Schnittpunktsystem von φ_x^μ bis ψ_x^μ längs der Curve f , geht über in die mit $-n$ multiplicirte Summe der Integrale des *rationalen Differentiales*:

$$(2) \quad D' = \frac{|cx dx| a_x^{n-2}}{a_x^n \cdot v_c} \quad (\text{unter der Bedingung: } v_x = 0),$$

wenn jetzt diese Summe genommen wird auf der Geraden v_x auch wieder von den μ Schnittpunkten mit φ bis zu den μ Schnittpunkten mit ψ . Das auf die Curve bezügliche Integral ist also so zu sagen auf das längs der Geraden erstreckte abgebildet, wobei aber immer nur eine Gruppe von μn Schnittpunkten auf der Curve eine Gruppe von μ Schnittpunkten auf der Geraden entspricht. Die Unendlichkeitspunkte beider Integrale bleiben hierbei die nämlichen, während mit den $n(n-2)$ Punkten, in denen das Differential (1) verschwindet, nur $n-2$ Verschwindungspunkte des Differentiales (2) correspondiren. Zur Entwicklung des Summenwerthes der über das Differential D' genommenen Integrale dient nun eine einfache Partialbruchzerlegung.

Unter der Bedingung $v_x = 0$ kann nämlich die Curve $a_x^n = 0$ durch ein Product von n geraden Linien ersetzt werden, von denen jede durch je einen der Schnittpunkte von v_x mit a_x^n hindurchgeht. Bei der Voraussetzung, dass von diesen n Schnittpunkten nicht mehr als höchstens je zwei paarweise zusammenfallen, lassen sich diese n Linien so bestimmen, dass niemals drei unter ihnen durch denselben Punkt gehen. Das Product dieser n von einander verschiedenen Linien werde durch $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}$ bezeichnet; dann ist:

$$(3) \quad D' = \frac{|cx dx| a_x^{n-2}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)} v_c}, \quad (v_x = 0).$$

Dieser Ausdruck gestattet folgende Zerlegung; man setze:

*) A. a. O. Bd. 61.

$$(4) \quad \frac{\alpha_x^{n-2}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}} = \frac{a_{12}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)}} + \frac{a_{13}}{p_x^{(1)} p_x^{(3)}} + \dots + \frac{a_{ik}}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}} + \dots$$

$$+ \frac{a_{n-1, n}}{p_x^{(n-1)} p_x^{(n)}} = \sum_{i, k} \frac{a_{ik}}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}}.$$

Zulässig ist diese Entwicklung deshalb, weil unter den Formen $p_x^{(i)}$ keine drei von einander in linearer Weise abhängen und weil die Anzahl der Constanten a_{ik} mit der zu α_x^{n-2} gehörigen Zahl $\frac{1}{2}n(n-1)$ von willkürlichen Constanten übereinstimmt. Gingen aber irgend drei der Linien p durch den nämlichen Punkt, so würde die linke Seite für diesen Punkt im Allgemeinen von der dritten Ordnung unendlich gross werden, die vorstehende Gleichung mithin ihre Giltigkeit verlieren. Man findet den Werth eines dieser Coefficienten z. B. a_{ik} , indem man beide Seiten der Gleichung (4) mit $p_x^{(i)} p_x^{(k)}$ multiplicirt und sodann für x den Schnittpunkt dieser beiden Linien substituirt, also $x = \widehat{p^{(i)} p^{(k)}}$ setzt. Demzufolge wird:

$$(5) \quad a_{ik} = a_{ki} = \frac{(\alpha p^{(i)} p^{(k)})^{n-2}}{\Pi(p p^{(i)} p^{(k)})},$$

wenn $\Pi(p p^{(i)} p^{(k)})$ das Product aller Determinanten bezeichnet, welche dadurch entstehen, dass p alle Werthe von $p^{(1)}$ bis $p^{(n)}$ mit Ausnahme der beiden Werthe $p^{(i)}$ und $p^{(k)}$ durchläuft.

Betrachtet man nun ein Integral von der Form:

$$(6) \quad a_{ik} \int \frac{|c x dx|}{p_x^{(i)} p_x^{(k)} v_x}, \quad (v_x = 0)$$

und erstreckt dasselbe von den Schnittpunkten der Geraden v_x mit φ_x^μ bis zu den Schnittpunkten derselben Linie mit ψ_x^μ , so kann man wiederum statt der Curven φ und ψ Producte von μ Geraden einführen, und die Integrationswege zwischen den Grenzen φ und ψ durch Integrationswege zwischen den Linien $u_x^{(1)} u_x^{(2)} \dots u_x^{(\mu)}$ und $w_x^{(1)} w_x^{(2)} \dots w_x^{(\mu)}$ ersetzen. Dabei bildet der auf v_x gelegene Durchschnitt mit $u_x^{(i)}$ die untere Grenze des Weges, welcher im Punkte der Linie $w_x^{(i)}$ endet.

Substituirt man also für x den Werth $\widehat{v u}$, für dx den Werth $\widehat{v du}$, so erhält man aus (6) das Integral:

$$(7) \quad a_{ik} \int \frac{(v u du)}{(p^{(i)} v u)(p^{(k)} v u)}.$$

Bezeichne $\xi^{(i)}$ den Unendlichkeitspunkt, welcher durch die Linie $p_x^{(i)}$ auf v_x ausgeschnitten wird, so lässt sich $\widehat{p^{(i)} v} = \xi^{(i)}$ setzen. Aus dieser Annahme folgt:

$$(\xi^{(i)} \xi^{(k)} x) = v_x (v p^{(i)} p^{(k)}) \text{ also } (v u du) = \frac{u_{\xi^{(i)}} du_{\xi^{(k)}} - u_{\xi^{(k)}} du_{\xi^{(i)}}}{(v p^{(i)} p^{(k)})}.$$

Das Integral (7) verwandelt sich also in:

$$(8) \quad \frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \int \frac{u_{\xi^{(i)}} du_{\xi^{(k)}} - u_{\xi^{(k)}} du_{\xi^{(i)}}}{u_{\xi^{(i)}} u_{\xi^{(k)}}} = \frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \log \frac{w_{\xi^{(k)}} u_{\xi^{(i)}}}{w_{\xi^{(i)}} u_{\xi^{(k)}}}.$$

Nun wird aber das mit dem Factor a_{ik} behaftete Integral für alle μ Linien zu bilden sein, welche das Schnittpunktsystem von φ oder ψ mit v repräsentiren, und da $\xi^{(i)}$ einen auf v gelegenen Punkt bedeutet, so ist zufolge der Gleichung: $(\varphi v u)^\mu = (u^{(1)} v u) (u^{(2)} v u) \dots (u^{(\mu)} v u)$ auch: .

$$\varphi_{\xi^{(i)}}^\mu = u_{\xi^{(i)}}^{(1)} u_{\xi^{(i)}}^{(2)} \dots u_{\xi^{(i)}}^{(\mu)} \text{ und ebenso: } \psi_{\xi^{(i)}}^\mu = w_{\xi^{(i)}}^{(1)} w_{\xi^{(i)}}^{(2)} \dots w_{\xi^{(i)}}^{(\mu)}.$$

Die Summe aller mit a_{ik} multiplicirten Integrale geht auf diese Weise in die Form über:

$$\frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \log \frac{\psi_{\xi^{(k)}}^\mu \varphi_{\xi^{(i)}}^\mu}{\psi_{\xi^{(i)}}^\mu \varphi_{\xi^{(k)}}^\mu}.$$

Mithin ist schliesslich:

$$(9) \quad \sum_{\varphi} \int \frac{|cx dx| \alpha_x^{n-2}}{v_x \alpha_x^{n-1} a_c} = -n \sum_{i,k} \frac{a_{ik}}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \log \frac{\psi_{\xi^{(k)}}^\mu \varphi_{\xi^{(i)}}^\mu}{\psi_{\xi^{(i)}}^\mu \varphi_{\xi^{(k)}}^\mu},$$

unter Voraussetzung der Gleichung (5) und der Relation:

$$(av u)^n = (p^{(1)} v u) (p^{(2)} v u) \dots (p^{(n)} v u) = u_{\xi^{(1)}} u_{\xi^{(2)}} \dots u_{\xi^{(n)}}.$$

Bemerkenswerth ist die scheinbare Willkürlichkeit, welche in dieser Darstellung je nach Wahl der Grössen $p^{(i)}$ zu liegen scheint, welche aber auf das Gesamtergebn keinen Einfluss auszuüben vermag. So können z. B. mehrere der Coefficienten a_{ik} zum Verschwinden gebracht werden, indem man die Linien $p_x^{(i)}, p_x^{(k)} \dots$ so wählt, dass α_x^{n-2} durch mehrere der Schnittpunkte $\widehat{p^{(i)} p^{(k)}}$ hindurchgeht. Auf diese Weise lassen sich unter Anderem alle a_{1i} (wobei i die Werthe von 2 bis n annimmt) bis auf eines zerstören, dadurch dass $n-2$ der Linien $p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}$ durch die $n-2$ Schnittpunkte von $p_x^{(1)}$ mit α_x^{n-2} hindurchgelegt werden: bei dieser Darstellung bleibt wie erforderlich immer noch ein Ausdruck bestehen, in welchem der Punkt $\xi^{(1)}$ unter dem Logarithmus auftritt. Die Maximalzahl der auf diese Weise zum Verschwinden gebrachten Coefficienten beträgt: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, so dass nur $n-1$ logarithmische Glieder nachbleiben, welche durch die Formen: $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ dargestellt werden. — Für die normirten Differentiale dritter Gattung ist α_x^{n-2} durch $n-2$ der Punkte ξ hindurchgelegt, so dass:

$$\frac{\alpha_x^{n-2}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}} = \frac{a_{ik}}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}}, \quad (v_x = 0).$$

Mithin reducirt sich die obige Form (9) in diesem Falle auf das *eine* mit a_{ik} multiplicirte logarithmische Glied. Ueberhaupt bestehen, sobald die Curve α_x^{n-2} durch einen der Schnittpunkte von v_x mit α_x^n , z. B. durch den Punkt $p^{(i)}v$, hindurchgelegt ist, zwischen den Coefficienten a_{ik} Relationen von der Form:

$$\frac{a_{1i}}{(p^{(1)}p^{(i)}v)} + \frac{a_{2i}}{(p^{(2)}p^{(i)}v)} + \dots + \frac{a_{ni}}{(p^{(n)}p^{(i)}v)} = 0,$$

zu Folge deren sämtliche Glieder, in welchen der Punkt $\xi^{(i)}$ vorkommt, sich gegenseitig aufheben.

Die oben ausgeführte Partialbruchzerlegung bleibt, wie schon erwähnt wurde, auch dann noch gültig, wenn mehrere der Schnittpunkte von v_x mit α_x^n paarweise unter einander zusammenfallen, weil auch dann noch sämtliche Linien $p_x^{(i)}$ von einander verschieden sind, und keine drei beliebigen unter ihnen in linearer Weise von einander abhängen. Fallen z. B. die Punkte $\xi^{(i)}$ und $\xi^{(k)}$ zusammen, so liegt der Schnittpunkt $p^{(i)}p^{(k)}$ auf v_x . Die Bestimmung der Constanten a_{ik} bleibt dabei ungeändert und in der Formel (9) erhält nur das Integral

$$(10) \quad \int \frac{cx dx}{p_x^{(i)} p_x^{(k)} v_c}, \quad (v_x = 0)$$

einen andern Werth. Setzt man auch hier wieder:

$$p^{(i)}v = \xi^{(i)}, \quad p^{(k)}v = \xi^{(k)} = \xi^{(i)}$$

und führt einen beliebigen auf v_x gelegenen Punkt c ein, so wird:

$$(\xi^{(i)}cx) = (p^{(i)}v cx) = p_c^{(i)} \cdot v_x, \text{ also } (vudu) = \frac{u_{\xi^{(i)}} du_c - u_c du_{\xi^{(i)}}}{p_c^{(i)}}.$$

Das Integral (10) verwandelt sich also in:

$$(11) \quad \frac{1}{p_c^{(i)}} \int_u^v \frac{u_{\xi^{(i)}} du_c - u_c du_{\xi^{(i)}}}{u_{\xi^{(i)}}^2} = \frac{1}{p_c^{(i)}} \left(\frac{w_c}{w_{\xi^{(i)}}} - \frac{u_c}{u_{\xi^{(i)}}} \right).$$

Ausgeführt über alle Linien u , welche das Schnittpunktsystem von φ und ψ bestimmen, ergiebt diese Formel nach Multiplication mit dem zugehörigen Factor a_{ik} den Werth:

$$(12) \quad \frac{a_{ik}}{\sqrt{p_c^{(i)} p_c^{(k)}}} \frac{d \left(\log \frac{\psi_{\xi^{(i)}}^{\mu}}{\varphi_{\xi^{(i)}}^{\mu}} \right)}{dc}.$$

Sobald r *algebraische* Unendlichkeitspunkte im Differentiale durch das Zusammenfallen je zweier Schnittpunkte auftreten, gehen demnach

von den $\frac{n(n-1)}{2}$ logarithmischen Functionen r in algebraische über, während die übrigen zunächst ungeändert bleiben. Ist die Curve α_x^{n-2} durch mehrere dieser Punkte die Linie v_x einfach schneidend hindurchgelegt, so verschwinden die Coefficienten der betreffenden algebraischen Glieder, da $(\alpha p^{(i)} p^{(k)})^{n-2}$ gleich Null wird, während die logarithmischen bestehen bleiben.

II. Nicht mehr durchführbar wird dagegen die vorstehende Partialbruchzerlegung, sobald *mehr als zwei* der Punkte ξ zusammenrücken. Denn alsdann schneiden sich mindestens drei der Linien $p_x^{(i)}$ in einem Punkte und die Gleichung (4) bleibt nur noch gültig, wenn auch die Curve α_x^{n-2} mindestens einfach durch diesen Punkt hindurchgeht. Mithin umfasst diese Formel nur diejenigen Fälle, in denen das Differential entweder *logarithmisch oder von der ersten Ordnung algebraisch* unendlich wird. Die Fälle höherer Berührung zwischen α_x^n und v_x werden am einfachsten mit Hilfe des von Aronhold angegebenen δ -Processes erledigt. Zu dem Zwecke seien die vielfach zählenden Schnittpunkte nicht mehr durch ein Product verschiedener Linien, welche durch den nämlichen Punkt gehen, sondern *durch Potenzen linearer Ausdrücke* bezeichnet, so dass unter der Bedingung: $v_x = 0$:

$$(13) \quad \alpha_x^n = (p_x^{(1)})^{\lambda_1} (p_x^{(2)})^{\lambda_2} \dots (p_x^{(m)})^{\lambda_m}, \quad n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m.$$

Entwickelt man dann zunächst den Ausdruck:

$$\frac{\alpha_x^{n-2}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(m)}},$$

in welchem alle Factoren des Nenners nur in der ersten Potenz auftreten, nach Partialbrüchen, so gelangt man durch wiederholte Differentiation nach den Coefficienten von $p_x^{(i)}$ auf beiden Seiten, indem man für die Incremente die entsprechenden Symbole α substituirt (also α_1 für $dp_1^{(i)}$, α_2 für $dp_2^{(i)}$, α_3 für $dp_3^{(i)}$), zu einem Ausdruck von der Form:

$$\frac{\alpha_x^{n-2}}{(p_x^{(1)})^{\lambda_1} (p_x^{(2)})^{\lambda_2} \dots (p_x^{(m)})^{\lambda_m}}.$$

Die oben behandelten Fundamentalintegrale gehen dadurch in die Form über:

$$(14) \quad \int \frac{|c x dx| \alpha_x^{\lambda_i + \lambda_k - 2}}{(p_x^{(i)})^{\lambda_i} (p_x^{(k)})^{\lambda_k} v_c}, \quad (v_x = 0),$$

für welche sich eine Recursionsformel auf folgendem Wege aufstellen lässt. Der Kürze halber werde, *immer unter der Bedingung* $v_x = 0$:

$$(15) \int \frac{|cx dx|}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}} = \omega(i, k), \quad \int \frac{|cx dx| \alpha_x^{\lambda+\mu-2}}{(p_x^{(i)})^\lambda (p_x^{(k)})^\mu} = \omega(i^\lambda, k^\mu)$$

gesetzt. Alsdann ist:

$$(16) \quad \omega(i^2, k) = -\delta_i(\omega(i, k)), \quad \omega(i^3, k^2) = -\frac{1}{2} \delta_i(\omega(i^2, k)), \\ \omega(i^2, k^2) = -\delta_k(\omega(i^2, k)) \text{ u. s. w.}$$

Aus der Gleichung:

$$\omega(i, k) = \frac{1}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \log \left(\frac{u_{\xi^{(k)}}}{u_{\xi^{(i)}}} \right)$$

folgt aber:

$$\omega(i^2, k) = -\delta_i(\omega(i, k)) = \frac{(v\alpha p^{(k)})}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \omega(i, k) - \frac{1}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \delta_i \left(\log \frac{u_{\xi^{(k)}}}{u_{\xi^{(i)}}} \right).$$

Für die Berechnung des letzten Ausdruckes betrachte man, um die additiven Constanten in Uebereinstimmung zu bringen, das Integral:

$$\omega(i^2, k) - \frac{(v\alpha p^{(k)})}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \omega(i, k) \\ = \frac{1}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \int \frac{|cx dx| (\alpha_x (vp^{(i)}p^{(k)}) - p_x^{(i)} (v\alpha p^{(k)}))}{(p_x^{(i)})^2 (p_x^{(k)}) v_c}.$$

Der Werth desselben ist, da für alle Punkte die Relation: $v_x=0$ gilt:

$$\frac{(vp^{(i)}\alpha)}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \int \frac{(vu du)}{(p^{(i)}vu)^2} = \frac{(vp^{(i)}\alpha)}{(vp^{(i)}p^{(k)})} \frac{1}{p_c^{(i)}} \cdot \frac{u_c}{(up^{(i)}v)},$$

wenn auch hier c einen beliebigen auf v gelegenen Punkt bezeichnet.

Setzt man dann insbesondere für c den Werth $\hat{p}^{(k)}v$, so erhält man:

$$(17) \quad (vp^{(i)}p^{(k)}) \omega(i^2, k) - (v\alpha p^{(k)}) \omega(i, k) = \frac{(u\alpha v)}{(up^{(i)}v)} - \frac{(p^{(k)}\alpha v)}{(p^{(k)}p^{(i)}v)}.$$

Die Linie u , welche hierbei auftritt, bedeutet die obere Grenze, bis zu welcher das Integral erstreckt ist. Differentiirt man diese Formel $(\lambda-2)$ mal nach $p_x^{(i)}$, so folgt:

$$(18) \quad (vp^{(i)}p^{(k)}) \omega(i^2, k) - (v\alpha p^{(k)}) \omega(i^{2-1}, k) \\ = \frac{1}{\lambda-1} \left\{ \frac{(u\alpha v)^{\lambda-1}}{(up^{(i)}v)^{\lambda-1}} - \frac{(p^{(k)}\alpha v)^{\lambda-1}}{(p^{(i)}p^{(k)}v)^{\lambda-1}} \right\}.$$

Um eine Recursionsformel für das allgemeinere Integral: $\omega(i^2, k^\mu)$ zu gewinnen, gehe man von der durch Differentiation nach $p^{(k)}$ aus (17) gewonnenen Form aus:

$$(19) \quad (vp^{(i)}p^{(k)}) \omega(i^2, k^2) - (vp^{(i)}\alpha) \omega(i^2, k) + (vp^{(k)}\alpha) \omega(i, k^2) \\ = \frac{(\alpha v p^{(i)}) (\alpha v p^{(k)})}{(vp^{(i)}p^{(k)})^2}$$

und differentiire dieselbe zuerst nach $p_x^{(i)}$, alsdann nach $p_x^{(k)}$, so folgt:

$$(20) \quad (vp^{(i)}p^{(k)}) \omega(i^2, k^\mu) - (vp^{(i)}\alpha) \omega(i^2, k^{\mu-1}) + (vp^{(k)}\alpha) \omega(i^{2-1}, k^\mu) \\ = - \frac{\lambda + \mu - 3!}{\lambda - 1! \mu - 1!} \frac{(\alpha v p^{(k)})^{\lambda-1}}{(v p^{(k)} p^{(i)})^{\lambda-1}} \cdot \frac{(\alpha v p^{(i)})^{\mu-1}}{(v p^{(i)} p^{(k)})^{\mu-1}} \quad (\lambda > 1, \mu > 1).$$

Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist eine von den Grenzen des Integrals unabhängige Constante, und sämmtliche Werthe enthalten ausser algebraischen Functionen, welche nach negativen Potenzen von $p_x^{(i)}$, $p_x^{(k)}$. . . fortschreiten, immer nur die eine logarithmische Functionen $\omega(i, k)$. Die Grössen α kommen, weil jeder Ausdruck: $\omega(i^2, k^\mu)$ mit dem Coefficienten a_{ik} multiplicirt wird, zu solchen Potenzen vor, dass sie zugleich als *Symbole einer irreducibelen Form*: α_x^{n-2} aufgefasst werden können.

III. Einer besonderen Behandlung bedarf endlich noch *dasjenige Differential, welches von vornherein das Quadrat oder überhaupt die Potenz einer Function im Nenner enthält*. Denn alsdann liefert der Satz von der Vertauschung der beiden Functionen des Nenners lauter unendlich grosse Differentiale, deren Summen zu je zweien aber einen endlichen Differentialwerth besitzt. Man kann hierbei zu einer auch formal befriedigenden Darstellung durch einen Grenzprocess gelangen, indem man die mehrfach zählende Curve als aus dem Producte benachbarter Curven entstanden auffasst. Es soll im Folgenden der Fall des *Quadrates einer linearen Function* vollständig durchgeführt werden, da auf diesen alle anderen, bei denen Curven höherer Ordnung auftreten, durch eine ähnliche Substitutionsweise, wie die am Schlusse des § 3. angewandte, gebracht werden können:

Es sei gegeben:

$$(21) \quad D = \frac{|cx dx| \alpha_x^{n-1}}{(v_x)^2 \alpha_x^{n-1} a_c} \quad (\text{unter der Bedingung } \alpha_x^n = 0)$$

und es soll wiederum die Integralsumme gebildet werden von den Schnittpunkten einer Curve $\varphi_x^n = 0$ bis zu den Schnittpunkten einer Curve $\psi_x = 0$. Als dann besteht die Gleichung:

$$(22) \quad \sum_{\substack{\varphi \\ (\alpha_x^n = 0)}}^{\psi} D = - \frac{n}{2} \sum_{\substack{\varphi \\ ((v_x)^2 = 0)}}^{\psi} \frac{|cx dx| \alpha_x^{n-1}}{a_x^n \cdot v_x \cdot v_c}.$$

Setzt man nun $(v_x)^2 = v_x \cdot w_x$ und denkt sich w_x unendlich benachbart zu v_x , so ist statt der rechts stehenden Summe zu schreiben:

$$-n \left[\sum_{(w_x=0)}^{\varphi} \int \frac{|cx dx|}{a_x^n v_x w_c} \frac{\alpha_x^{n-1}}{a_x^n} + \sum_{(v_x=0)}^{\varphi} \int \frac{|cx dx|}{a_x^n w_x v_c} \frac{\alpha_x^{n-1}}{a_x^n} \right].$$

Nun ist aber nach der oben benutzten Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\alpha_x^{n-1}}{a_x^n \cdot v_x} = \frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)} v_x} = \sum_{i,k} \frac{a_{ik}}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}} + \sum_i \frac{b_i}{p_x^{(i)} v_x},$$

$$\frac{\alpha_x^{n-1}}{a_x^n \cdot w_x} = \frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)} w_x} = \sum_{i,k} \frac{a'_{ik}}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}} + \sum_i \frac{b'_i}{p_x^{(i)} w_x}.$$

Dabei sind die Linien $p_x^{(i)}$ so bestimmt, dass sie je einen der Schnittpunkte von v_x und α_x^n mit dem benachbarten Punkte von w_x und α_x^n verbinden; das heisst: sie stellen im Grenzfall die Tangenten der Curve α_x^n in den Schnittpunkten mit der Linie v_x dar, und es kann also schliesslich:

$$p_x^{(i)} = a_{\xi(i)}^{n-1} a_x \quad (v_{\xi(i)} = 0, \quad a_{\xi(i)}^n = 0),$$

gesetzt werden. Die Coefficienten a_{ik} und b_i werden nach der früheren Weise bestimmt, der zufolge

$$a_{ik} = \frac{(\alpha p^{(i)} p^{(k)})^{n-1}}{(v p^{(i)} p^{(k)}) \prod (p p^{(i)} p^{(k)})}, \quad b_i = \frac{(\alpha p^{(i)} v)^{n-1}}{\prod (p p^{(i)} v)}$$

wird, und ebenso:

$$a'_{ik} = \frac{(\alpha p^{(i)} p^{(k)})^{n-1}}{(w p^{(i)} p^{(k)}) \prod (p p^{(i)} p^{(k)})}, \quad b'_i = \frac{(\alpha p^{(i)} w)^{n-1}}{\prod (p p^{(i)} w)}.$$

Das Integral mit dem Factor a_{ik} vereinigt sich, wenn w_x gleich v_x gesetzt wird, ohne Weiteres mit dem Integral a'_{ik} zu der im Obigen entwickelten Form:

$$2a_{ik} \int \frac{(v u du)}{(p^{(i)} v u) (p^{(k)} v u)}.$$

Dagegen vereinigen sich zwei der Integrale, welche bezüglich mit b_i und b'_i multiplicirt sind, in folgender Weise; es ist:

$$\begin{aligned} b_i \int \frac{|cx dx|}{p_x^{(i)} v_x w_c} + b'_i \int \frac{|cx dx|}{p_x^{(i)} w_x v_c} \\ = b_i \int \frac{|w u du|}{(p^{(i)} w u) (v w u)} - b'_i \int \frac{(v u du)}{(p^{(i)} v u) (v w u)} \\ = b_i \int \frac{(w u du) (p^{(i)} v u) - (v u du) (p^{(i)} w u)}{(p^{(i)} v u) (p^{(i)} w u) (v w u)} = -b_i \int \frac{(p^{(i)} u du)}{(p^{(i)} v u)^2}, \end{aligned}$$

wenn v_x mit w_x zusammenfällt. Führt man nun einen beliebigen auf $p_x^{(i)}$ gelegenen Punkt $c^{(i)}$ ein, setzt demnach $p^{(i)} = \xi^{(i)} \hat{c}^{(i)}$, so zerlegt sich das letzte Integral in die direct integrirbare Form:

$$- b_i \int \frac{u_{\xi^{(i)}} du_{c^{(i)}} - u_{c^{(i)}} du_{\xi^{(i)}}}{(u_{\xi^{(i)}})^2 (v_{c^{(i)}})^2} = - \frac{b_i}{(v_{c^{(i)}})^2} \int d \left(\frac{u_{c^{(i)}}}{u_{\xi^{(i)}}} \right).$$

Ausgedehnt über alle μ Linien, welche das Schnittpunktsystem von φ_x^μ vertreten, bis zu den Schnittpunkten der μ Linien, welche statt der Curve ψ_x^μ eingeführt sind, erhält man die aus n algebraischen, und $\frac{n(n-1)}{2}$ logarithmischen Functionen zusammengesetzte Endform:

$$(23) \quad \sum_{\varphi} \int \frac{c x d x \{ \alpha_x^{n-1} \}}{(v_x)^2 \alpha_x^{n-1} a_c} = - 2n \sum_{i,k} \frac{a_{ik}}{(v p^{(i)} p^{(k)})} \log \frac{\psi_{\xi^{(k)}}^{\mu} \varphi_{\xi^{(i)}}^{\mu}}{\psi_{\xi^{(i)}}^{\mu} \varphi_{\xi^{(k)}}^{\mu}} \\ + n \sum_i \frac{b_i}{(v_{c^{(i)}})^2} \frac{d \left(\log \frac{\psi_{\xi^{(i)}}^{\mu}}{\varphi_{\xi^{(i)}}^{\mu}} \right)}{d c^{(i)}}.$$

Treten im Nenner des Differentiales höhere Potenzen auf, so ist auch hier der δ -Process in der früher angedeuteten Weise auszuführen; doch will ich, um die Uebersicht über die Betrachtungsweisen, welche dem Vorstehenden zu Grunde liegen, nicht zu hindern, auf besondere Einzelheiten, deren Lösbarkeit durch die entwickelten Methoden ersichtlich gemacht ist, nicht weiter eingehen.

Fassen wir das Resultat der in diesem Abschnitte geführten Untersuchungen kurz zusammen, so erscheint als wesentlichstes Ergebniss die Zurückführung der auf ein Schnittpunktsystem bezüglichen Summe von *irrationalen* Integralen auf eine Summe von *rationalen*, wodurch das Abel'sche Theorem bereits explicite dargestellt wird; die Entwicklung dieser Summe nach logarithmischen und algebraischen Functionen, welche durch Erweiterung der von Aronhold zur Lösung ähnlicher Probleme gegebenen Methoden erzielt wurde, bildete nur eine Ergänzung hierzu. Jene Zurückführbarkeit aber erwies sich als ihrem Wesen nach identisch mit einer Eigenschaft, welche einer ganzen Classe von algebraischen Ausdrücken zukommt, und welche selbst nichts anderes als eine directe Folge aus dem von Jacobi aufgestellten Fundamentalsatze ist.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Integration der durch symmetrische Functionen
algebraischer Differentiale dargestellten Differentialgleichungen.
Specielle Fälle.

§ 5.

Allgemeine Erörterungen.

Unter allen symmetrischen Functionen, welche sich aus den Differentialen eines gegebenen Schnittpunktsystemes bilden lassen, tritt die Summe der Differentialwerthe deshalb besonders in den Vordergrund, weil diese Summe direct integrirt und somit das Gesetz ihrer Bildung auch auf die Darstellung von Integralen übertragen werden kann. Die übrigen symmetrischen Functionen führen indessen zur Integration von Differentialgleichungen, welche, da sie in der Form von *Connexen* auftreten, für die Theorie der dem Differentiale zu Grunde liegenden Curve nicht ohne Bedeutung sind.

Die Werthe nämlich, welche das auf eine Curve n^{ter} Ordnung bezügliche Differential D in den Schnittpunkten der Fundamentalcurve mit einer Geraden ($u_x = 0$) und einer zu dieser benachbarten Geraden ($u_x + du_x = 0$) besitzt (nur auf diesen einfachsten Fall eines Schnittpunktsystemes sollen die folgenden Untersuchungen sich beschränken), werden durch eine Gleichung n^{ten} Grades dargestellt, deren Coefficienten aus Formen zusammengesetzt sind, welche nur noch von den Variabeln u und $u\hat{d}u$, sowie von den Constanten der das Differential definirenden Functionen abhängen. Mithin bestehen alle diese Coefficienten aus *Connexen*, welche dem simultanen Systeme der in D enthaltenen algebraischen Functionen angehören. Setzt man einen dieser Coefficienten gleich Null, so wird dadurch auf der Geraden: $u_x = 0$ eine im Allgemeinen endliche Zahl von Punkten $u\hat{d}u$ bestimmt und die unendlich kleine Drehung der Linie u in solch' einem Punkte führt zu n Differentialen, zwischen denen eine Relation besteht, wie sie durch das Verschwinden des betreffenden Coefficienten ausgesagt ist. Man kann nun aber umgekehrt auch von einer beliebigen *linearen* Relation zwischen zweien oder zwischen allen n Differentialen ausgehen. Weil sich diese Relation in den Coefficienten der Gleichung n^{ten} Grades ausdrücken lässt, so erhält man durch dieselbe eine Bedingungsgleichung zwischen der Linie u und ihren „Drehpunkten“ $u\hat{d}u$. Für diese, als für die *Hauptcoincidenz* eines *Connexes*, ist das Integrationsproblem auf eine Quadratur zurückgeführt. Denn die angenommene Relation zwischen den n Differentialwerthen führt

durch ihre Integration zu einer neuen Gleichung zwischen den n auf die Schnittpunkte einer Geraden bezüglichen Integralen, und da sich durch zwei dieser Punkte alle übrigen ausdrücken lassen, so gewinnt man eine endliche Gleichung zwischen zweien auf der Geraden gelegenen Schnittpunkten. Sind also die Punkte der Fundamentalcurve durch zwei nicht homogene Parameter: λ_1 und λ_2 , zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, dargestellt, so erhält man nunmehr eine Schaar von Classencurven auf die Weise, dass man den Punkt, welchem die Parameterwerthe λ_1^0, λ_2^0 angehören, mit demjenigen Punkte verbindet, dessen Parameterwerthe durch die gewonnene Integralgleichung mit λ_1^0, λ_2^0 verknüpft sind. Aus der willkürlichen Constante, welche in dieser Gleichung vorkommt, wird eine Schaar von einfach unendlich vielen Curven abgeleitet.

Ein einfaches Beispiel für diese Art der Problemstellung liefert die Frage nach der Drehung, vermöge deren auch für die allgemeinen Differentiale dritter Gattung die Summe aller auf das Schnittpunktsystem einer Geraden bezüglichen Integrale constant bleibt, und es gilt allgemein das Gesetz, dass solch ein Drehpunkt auf jeder Geraden immer nur einmal vorhanden ist. Ueberhaupt gehört die allgemeine Behandlung dieser Fragen einem Gebiete an, welches dadurch eine Erweiterung des Abel'schen Theoremes bildet, dass hier nicht die *einfache* Summe der Differentiale untersucht wird, sondern eine solche, in welcher jedes Glied mit einem beliebigen aber constanten Factor, der auch Null sein kann, behaftet ist.

Alle Connexe, deren Integration sich durch diese Untersuchung auf eine Quadratur zurückführen lässt, haben zufolge ihrer Entstehung die besondere Eigenschaft, dass sie, falls sie sich auf *ternäre* Formen beziehen, *durch Uebertragung aus dem Systeme binärer Formen* gewonnen werden, und zwar solcher Formen, welche unmittelbar dem simultanen Systeme der in dem Differentiale vorkommenden Functionen entnommen sind, wenn man dieselben wie Formen, welche um eine Dimension niedriger sind, behandelt. Auch wird aus einer einfachen Abzählung ersichtlich, dass durch die Bildung der symmetrischen Functionen von D unter den ebenen Curven nur bei der Curve 3^{ter} Ordnung Connexe auftreten, welche dem Formensysteme der Fundamentalcurve ausschliesslich angehören*).

Im Folgenden habe ich versucht, diese Probleme, auf welche ich durch das Studium des auf eine ebene Curve 3^{ter} Ordnung bezüglichen

*) Unter den Raumcurven sind es gleichfalls die Normalcurven vom Geschlecht $p = 1$, nämlich die Curven 4^{ter} Ordnung, 1^{ter} Species, deren Differential keine Functionen weiter erfordert, als die Combinanten der beiden Flächen zweiter Ordnung, durch deren Durchschnitt die Curve erzeugt wird.

elliptischen Integrales geführt wurde*), auch für Differentiale vom Geschlecht: $p=0$ (§ 7.) und $p=3$ (§ 8.) zu erörtern. Der Vollständigkeit und des Zusammenhanges halber sind zunächst die für die Curve 3^{ter} Ordnung gefundenen Resultate kurz erwähnt worden (§ 6.); denn das auf diese Curve bezügliche überall endliche Integral lässt sich in eine bemerkenswerthe Beziehung zu dem einfachen Integrale vom Geschlecht $p=0$ bringen, zu welchem ein Kegelschnitt als Fundamentalgebilde Anlass giebt (§ 7, II). Jedoch musste ich mich im Allgemeinen fast nur darauf beschränken, an diesen Beispielen zunächst die Methode zu entwickeln, vermöge deren es gelingt, eine wirkliche Darstellung aller auf das Schnittpunktsystem einer Fundamentalcurve beliebiger Ordnung mit einer Geraden bezüglichen Differentiale zu gewinnen (§ 8, I und II), und bin noch nicht auf die Schwierigkeiten eingegangen, welche bei der Parameterdarstellung von Curven beliebigen Geschlechts einer geometrischen Discussion solange entgegenstehen, als man sich, wie es bei diesen Untersuchungen zunächst der Fall ist, immer nur auf die Betrachtung eines Integrales beziehen kann.

Bei der Behandlung des längs eines Kegelschnittes erstreckten Differential lag es nahe, die Aronhold'sche Integrationsmethode nochmals zu berühren und die von Aronhold erledigten Probleme in den Zusammenhang dieser Untersuchungen aufzunehmen.

§ 6.

Ueber ein Differential vom Geschlecht: $p=1$.

Die Untersuchung derjenigen Connexe, bei welchen die Integration der Hauptcoincidenzcurven durch eine Quadratur geleistet werden kann, gewinnt bei den ebenen Curven dritter Ordnung besonderes Interesse, weil man hierbei, wie schon erwähnt wurde, auf Connexe geführt wird, welche ausschliesslich dem ternären cubischen Formensysteme angehören und daher für die Geometrie der Curve dritter Ordnung überhaupt von unmittelbarer Bedeutung sind. Zugleich liegt in der verhältnissmässig einfachen Periodicität des einen, überall endlichen, elliptischen Integrales die Möglichkeit begründet, auch die geometrischen Eigenschaften der Integralgleichungen, welche sich ergeben, ohne weitere Schwierigkeit zu übersehen.

Bezeichnet man das elliptische Differential erster Gattung, welches sich auf die zu Grunde gelegte Curve $f = a_x^3 = 0$ bezieht, mit:

$$(1) \quad D = \frac{c x dx}{a_x^2 a_c} \quad (a_x^3 = 0),$$

*) Zur Theorie der ternären cubischen Formen (§ 6). Math. Annalen Bd. IX, pag. 235.

so soll die cubische Gleichung für die drei Werthe von D entwickelt werden, welche dadurch entstehen, dass man auf der Curve von den drei Schnittpunkten einer Geraden: $u_x = 0$ zu den drei Schnittpunkten einer benachbarten Geraden: $u_x + du_x = 0$ fortschreitet. Man gewinnt diese Gleichung durch Elimination der Grössen x_i und dx_i aus den fünf Gleichungen:

$$(2) \quad D \cdot a_x^2 a_c - |cx dx| = 0, \quad a_x^3 = 0, \quad a_x^2 a_{dx} = 0, \quad u_x = 0, \quad (du)_x + u_{dx} = 0.$$

Diese fünf Gleichungen reichen zur Elimination der sechs Grössen: x_i und dx_i aus, weil zwischen diesen homogenen Veränderlichen noch zwei weitere Gleichungen von der Form:

$$(3) \quad k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1 \quad k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0$$

vorausgesetzt werden können. Giebt man dem Differentiale (1) die im Vorhergehenden vielfach benutzte Form:

$$(4) \quad D = - \frac{du_x v_x}{a_x^2 (a v u)} (a_x^3 = 0, \quad u_x = 0),$$

in welcher die Coefficienten v_i beliebige Constanten bedeuten, so sind die Grössen dx_i bereits eliminirt und die vollständige Erledigung des gestellten Problems erfordert also die Elimination der Grössen x aus einer linearen, einer quadratischen und einer cubischen Form. Diese Rechnung lässt sich noch dahin vereinfachen, dass man statt $a_x^3 = 0$ die Gleichung: $D \cdot a_x^2 (a v u) + du_x w_x = 0$ einführt, wobei wiederum die Grössen w_i beliebige Constante darstellen; denn das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen: $u_x = 0$ und:

$$D = - \frac{v_x du_x}{a_x^2 (a v u)} = - \frac{w_x du_x}{a_x^2 (a w u)}$$

ist an die Bedingung $a_x^3 = 0$ geknüpft. Auf diese Weise ist die Eliminationsaufgabe auf zwei quadratische und eine lineare Gleichung gebracht; das Resultat derselben, von welchem sich der die willkürlichen Constanten enthaltende Factor: $(v w u)$ absondert, wird durch die cubische Gleichung dargestellt:

$$(5) \quad D^3 \cdot F + 3D \cdot \Theta + 2f = 0,$$

wobei F , Θ , f die geläufigen Bedeutungen haben:

$$F = (a b u)^2 (c d u)^2 (a c u) (b d u), \quad \Theta = (a b u)^2 a_x b_x, \quad f = a_x^3,$$

nur dass hierbei die Grössen x durch die Unterdeterminanten $u \hat{d}u$ zu ersetzen sind. Zufolge des Abel'schen Theoremes verschwindet das zweite Glied dieser Gleichung, deren Wurzeln, mit D_1 , D_2 , D_3 , bezeichnet, der Relation $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ Genüge leisten.

Nimmt man zwischen diesen Wurzeln eine zweite lineare Beziehung an: $m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3 = 0$, die auch vermittelt der

ersten Gleichung in der Form: $(m_1 - m_3) D_1 + (m_2 - m_3) D_2 = 0$ dargestellt werden kann, wobei die Grössen m irgend welche rationale oder irrationale Zahlen bedeuten, so wird durch diese Forderung auf jeder Geraden u_x eine endliche Anzahl von Drehpunkten: $\hat{u} du$ festgelegt. Denn damit dieselbe befriedigt sei, muss, wenn mit

$$\varrho = - \frac{m_2 - m_3}{m_1 - m_3}$$

das Verhältniss zweier Wurzeln bezeichnet wird, zwischen den Coefficienten der Gleichung (5) die Relation bestehen:

$$(6) \quad F \cdot f^2 + \frac{(3\sigma - 2)}{\sigma^3} \Theta^3 = 0, \quad \sigma = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varrho^2 + \varrho + 1}{\varrho(\varrho + 1)}.$$

In dieser Gleichung können selbstverständlich, ohne dass sich der Werth von $\frac{3\sigma - 2}{\sigma^3}$ ändert, für ϱ die Werthe $-\frac{1}{1+\varrho} = -\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1}$ und $-\frac{1+\varrho}{\varrho} = -\frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_2}$ oder die reciproken Werthe dieser drei Ausdrücke substituirt werden. Diese Connexe bestimmen im Allgemeinen je sechs Drehpunkte auf der Geraden u und die Differentialgleichungen, welche durch die Hauptcoincidenzen derselben dargestellt werden, sind durch die vorstehende Betrachtung auf die Quadratur des der Curve dritter Ordnung zu Grunde liegenden elliptischen Integrales gebracht. Der Verlauf dieser Curven lässt sich zumal in den Fällen, in welchen ϱ eine rationale Zahl bedeutet, und in denen daher die Integralcurven *algebraisch* werden, ziemlich vollständig übersehen; doch darf ich wohl bei diesen Betrachtungen, in denen insbesondere die Curven, für welche $\varrho = 1$ wird, eine ausgezeichnete Rolle spielen, auf meine früheren Arbeiten mich zurückbeziehen*).

§ 7.

Ueber Differentiale vom Geschlecht: $p = 0$.

I.

Das Fundamentalintegral: $\omega(v) = \int \frac{|cxdx|}{v_x a_x a_c} \dots$

Wenn zufolge des Abel'schen Theoremes die Summe der auf ein Schnittpunktsystem bezüglichen Integrale nach logarithmischen und algebraischen Functionen entwickelt werden kann, so liefert bei den Differentialen vom Geschlecht: $p = 0$ der nämliche Satz solch eine

*) Die geometrischen Eigenschaften dieser Curven sind näher behandelt in dem Aufsatz: Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. Math. Annalen Bd. IX, pag. 1 ff.

Entwicklung für das *einzelne*, längs der Curve erstreckte Integral selber. Denn es besitzen die rationalen Curven Büschel von adjungirten Curven (im Allgemeinen von der Ordnung $n - 2$) dergestalt, dass jede Curve des Büschels die Fundamentalcurve nur noch in einem variablen Punkte trifft. Insbesondere lässt sich bei denjenigen Differentialen, zu welchen ein Kegelschnitt als Fundamentalgebilde Anlass giebt, die Ermittlung des Integrales so durchführen, dass zunächst die Summe der beiden Differentialwerthe, welche durch den Schnitt einer Geraden bei ihrer Drehung um einen festen, auf ihr gelegenen Punkt entstehen, integrirt und sodann der Mittelpunkt des Strahlbüschels auf den Kegelschnitt selbst verlegt wird. Die Einführung der unabhängigen Liniencoordinaten gewährt von vornherein, und hierauf beruht wohl ein Vorzug, eine Darstellung des Integrales, bei welcher die Variablen frei von jeder Irrationalität erscheinen.

Als allgemeinste Form der hier geltenden Differentiale ist der Ausdruck:

$$(1) \quad D = \frac{cx dx \cdot \Theta(x_1, x_2, x_3)}{a_x a_c} = \frac{\Theta(x_1, x_2, x_3) (\widehat{uw} x dx)}{a_x (auw)} \quad (a_x^2 = 0)$$

zu betrachten, wenn Θ eine algebraische, rationale und homogene Function der Grössen x bedeutet, in welcher der Nenner um eine Ordnung höher ist als der Zähler. Demnach erhält das einfachste dieser Differentiale die Form:

$$(2) \quad D = \frac{cx dx}{v_x a_x a_c} = \frac{(\widehat{uw} x dx)}{v_x a_x (auw)} \quad (a_x^2 = 0).$$

Untersucht man nun die Summe der beiden Differentiale in den Schnittpunkten der Gerade u_x und der ihr benachbarten $u_x + du_x = 0$ mit a_x^2 , so wird diese Summe nach unserem allgemeinen Satze gleich sein einem längs der Geraden v_x erstreckten Differentiale von der Form:

$$(3) \quad D' = \frac{cx dx}{a_x^2 v_c} \quad (v_x = 0),$$

wenn dieses gleichfalls für den Schnitt der nämlichen Geraden gebildet und mit dem Factor -2 multiplicirt wird; demzufolge substituirt man in die Gleichung (3) für x den Werth \widehat{vu} , für dx den Werth $\widehat{v} du$, so wird:

$$(4) \quad \sum D = -2D' = -2 \frac{(v u du)}{(av u)^2}.$$

Bedeutet nun ξ und η diejenigen beiden Punkte, in welchen die Linie v_x den Kegelschnitt a_x^2 schneidet, das heisst: die beiden Unendlichkeitspunkte des Integrales (2), so kann

$$v = \hat{\xi}\eta, \quad a_{\xi}^2 = 0, \quad a_{\eta}^2 = 0, \quad (abv)^2 = -2(a_{\xi}a_{\eta})^2$$

gesetzt werden. Demnach ist:

$$(5) \quad \sum \int D = \sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \int \frac{u_{\xi} du_{\eta} - u_{\eta} du_{\xi}}{u_{\xi} u_{\eta}} = \sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \cdot \log \frac{u_{\eta}}{u_{\xi}} + C.$$

Um nun den auf einen bestimmten Punkt x des Kegelschnittes bezüglichen Integralwerth zu ermitteln, setze man $u = \hat{k}x$ und betrachte k_i als die Coordinaten eines festen, auf dem Kegelschnitte gelegenen Punktes; dann ist:

$$(6) \quad \int \frac{|cx dx|}{v_x a_x a_c} = \sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \log \frac{|kx \eta|}{|kx \xi|} + \text{const.}, \quad (a_x^2 = 0, \quad a_k^2 = 0).^*)$$

Für den Fall, dass die Linie v_x den Kegelschnitt tangirt, also $(abv)^2 = 0$ und $\xi = \eta$ wird, erhält das Integral durch Substitution des Werthes $v = \hat{\xi}c$, wobei ξ den Berührungspunkt, c einen beliebigen auf v gelegenen Punkt bezeichnet, die Form:

$$(7) \quad \int \frac{|cx dx|}{v_x a_x a_c} = -2 \int \frac{(v u du)}{(av u)^2} = -\frac{2}{a_c^2} \int \frac{u_{\xi} du_c - u_c du_{\xi}}{u_{\xi}^2} \\ = -\frac{2}{a_c^2} \frac{|kxc|}{|kx \xi|}.$$

Die vollständige Durchführung der Elimination der Grössen x aus den drei Gleichungen:

$$D = \frac{|\hat{v}u x dx|}{v_x a_x (av u)} = -\frac{du_x}{a_x (av u)}, \quad a_x^2 = 0, \quad u_x = 0$$

führt zu der in D quadratischen Gleichung:

$$(8) \quad \frac{1}{2} D^2 \cdot (abu)^2 \cdot (avu)^2 + D(abu)^2 \cdot (vdu) + (audu)^2 = 0.$$

Die Summe der beiden Differentialwerthe wird also *gleich null*, wenn

*) Die von Aronhold angegebene, in den Punkten ξ und η nicht symmetrische Form lautet in den hier gebrauchten Bezeichnungen:

$$\sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \log \frac{a_x a_{\xi}}{v_x}.$$

Der Uebergang von dem oben gefundenen Ausdrucke zu diesem bedingt eine Aenderung der additiven Constante, und zwar mit Durchgang durch einen Unendlichkeitspunkt; es ist:

$$\log \left(-\frac{|kx \eta|}{|kx \xi|} a_k a_{\xi} \right) = \log \left(\frac{|k \xi \eta|}{|kx \xi|} a_x a_k + a_k a_{\eta} \right).$$

Setzt man hier $k = \eta$, so geht dieser Ausdruck in die Aronhold'sche Form über.

der Drehpunkt der Linie u in den Schnittpunkt von u mit v hineinrückt.

Sollen dagegen die beiden Differentialwerthe *einander gleich* sein, die vorstehende Gleichung (8) mithin eine reine quadratische werden, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$(9) \quad (abu)^2 \{ (abu)^2 (vudu)^2 - 2(avu)^2 \cdot (audu)^2 \} = 0.$$

Durch diesen Connex, den wir nach Absonderung des Factors $(abu)^2$ und nach Einführung der Bezeichnung: $u\hat{d}u = x$ wie folgt schreiben können:

$$(10) \quad (abu)^2 \cdot v_x^2 - 2(avu)^2 \cdot a_x^2 = 0.$$

werden jeder Geraden scheinbar *zwei* Punkte zugeordnet, welche jedoch, wie eine einfache Umformung lehrt, in einen zusammenfallen; unter der Bedingung $u_x = 0$ geht nämlich die vorstehende Gleichung in die Form über: $-2(a_x(avu))^2 = 0$ *). Demnach ergibt sich der Satz: *Dreht man eine gerade Linie u_x in demjenigen Punkte, welcher harmonisch zu dem Schnittpunkte von u mit der Linie $v = \xi\eta$ in Bezug auf die beiden dem Kegelschnitte angehörigen Punkte gelegen ist, so sind die beiden so erhaltenen Werthe des Differentialen: $D = \frac{cx dx}{v_x a_x a_c}$ einander gleich.*

Die in der Gleichung (9) aufgestellte Hauptcoincidenz des Connexes (10) bietet ein immerhin bemerkenswerthes Beispiel dafür, wie eine durch einen Connex gegebene Differentialgleichung unter gewissen Bedingungen sofort dadurch integrirt werden kann, dass man statt der Differentiale $u\hat{d}u$ wiederum die Variablen x einführt und die ausserdem noch vorkommenden Grössen u als Integrationsconstante auffasst. Denn setzt man die Grösse: $\frac{2(avu)^2}{(abu)^2} = \lambda$, so ist durch $v_x^2 - \lambda a_x^2 = 0$ ein Büschel von Kegelschnitten geliefert mit der Eigenschaft, dass auf jeder Tangente: u_x einer beliebigen im Büschel enthaltenen Curve der Berührungspunkt harmonisch liegt zu dem Punkte $v\hat{u}$ in Bezug auf die beiden Schnittpunkte von u_x mit a_x^2 , eine Eigenschaft, welche

*) Die Integration der Hauptcoincidenz des Connexes: $a_x(avu) = 0$ erfolgt am einfachsten, wenn $u = x\hat{d}x$ gesetzt wird, alsdann ist $a_x(avu) = a_x^2 v_{dx} - a_x a_{dx} v_x$, und mit Hülfe des integrirenden Factors: $\frac{v_x}{(a_x^2)^2}$ gewinnt die Differentialgleichung die direct integrirbare Form:

$$\frac{1}{2} d \left(\frac{v_x^2}{a_x^2} \right) = 0.$$

die Gleichung (10) als Integral der Differentialgleichung (9) erkennen lehrt. Ebenso bedeutet dann auch: $\lambda(abu)^2 - 2(avu)^2 = 0$ das nämliche Kegelschnittbüschel in Linienkoordinaten, wobei jetzt $\lambda = \frac{v_x^2}{a_x^2}$ ist. Während also im Allgemeinen jeder Connex zwei Reihen von zweifach unendlich vielen Connexcurven enthält, das heisst jedem Punkte der Ebene eine Classencurve, jeder Geraden eine Ordnungscurve zuordnet, welche im allgemeinen Falle sämmtlich von einander verschieden sind, weist der behandelte Connex die besondere Eigenschaft auf, dass er je einfach unendlich vielen Punkten die *nämliche* Classencurve, je einfach unendlich vielen Linien die *nämliche* Ordnungscurve entsprechen lässt, und zwar liegen diese einfach unendlich vielen Punkte jedesmal selbst auf einem der Kegelschnitte, welcher als Tangentengebilde aufgefasst zu jedem seiner Punkte die zugeordnete Connexcurve bildet. Den Punkten der Linie v_x entspricht der in ein Punktepaar zerfallene Kegelschnitt: $(avu)^2 = 0$, während umgekehrt der Verbindungslinie dieser beiden Punkte der ausgeartete Kegelschnitt: $(v_x)^2 = 0$ angehört. Einen weiteren Ausnahmepunkt im Connexe bildet auch noch der Durchschnitt der beiden Tangenten, welche in den Schnittpunkten von v_x mit a_x^2 gezogen werden können; für diesen wird $\lambda = \frac{3(abv)^2}{(abc)^2}$ und ihm entspricht als Classencurve das Quadrat des von ihm ausgehenden Strahlbüschels; die beiden genannten Tangenten endlich sind ebenso wie v_x zwei Ausnahmelinien, für sie ist gleichfalls

$$\lambda = \frac{2(avu)^2}{(abu)^2} = \frac{3(abv)^2}{(abc)^2}.$$

Die allgemeine Bedingung dafür, dass ein Connex: $\varphi(x, u) = 0$ durch seine Connexcurven zugleich die Integralcurven seiner Hauptcoincidenz *vollständig* darstellt, besteht geometrisch gefasst darin, dass die Ordnungscurve, welche der Linie u durch den Connex zugeordnet wird, dieselbe in *allen* Schnittpunkten berührt; aus der dualistischen Umkehr dieser Forderung folgt, dass auch die Classencurve, welche dem Punkte x entspricht, *alle* Tangenten, welche sich von x aus ziehen lassen, in diesem Punkte selber tangiren muss. Da aber dieses nur bei den Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe zutreffen kann, so kann auch diese behandelte Eigenschaft eines Connexes, falls dieser nicht in das Product niederer zerfallen soll, überhaupt nur noch für die *Connexe zweiter Ordnung und zweiter Classe* stattfinden. Dagegen ist es auch in viel allgemeineren Fällen möglich, dass die Connexcurven *einen Theil* der Integralcurven der Hauptcoincidenz bilden. Dieses tritt dann ein, wenn *jede* einer Linie u zugeordnete Ordnungscurve dieselbe in *einem* ihrer Schnittpunkte zugleich berührt,

oder wenn jede einem Punkte x entsprechende Classencurve durch diesen Punkt selber hindurchgeht. Die analytische Bedingung hierfür ist folgende:

Bezeichne $\varphi(x, u) = 0$ die Gleichung des Connexes, so stellt die nämliche Form die dem Punkte x zugehörige Classencurve dar, sobald der Variablen x ein fester Werth x^0 beigelegt wird. Die von dem Punkte x^0 an diese Curve ausgehenden Tangenten sind durch die beiden Gleichungen: $\varphi(x^0, u) = 0$, $u_x = 0$ gegeben, und die Coordinaten der auf denselben gelegenen Berührungspunkte sind den Werthen von: $\frac{\partial \varphi(x^0, u)}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \varphi(x^0, u)}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \varphi(x^0, u)}{\partial u_3}$ proportional. Soll nun einer dieser Berührungspunkte mit x^0 zusammenfallen, so muss, wenn u_i^0 die Coordinaten der zugehörigen Tangente bezeichnen, auch die Ordnungscurve $\varphi(x, u^0) = 0$, welche der Linie u^0 entspricht, diese Linie im Punkte x^0 berühren; die Tangente dieser Curve im Punkte x^0 hat aber die Coordinaten: $\frac{\partial \varphi(x^0, u^0)}{\partial x_1^0}$ u. s. w., mithin wird die gesuchte Bedingung durch die Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \varphi(x, u) = 0, \quad u_x = 0$$

dargestellt*).

Soll in der oben sub (8) gefundenen Gleichung zwischen den beiden Wurzeln das Verhältniss ϱ (oder auch $\frac{1}{\varrho}$) bestehen, also:

$$D_1 - \varrho D_2 = 0$$

sein, so müssen die Coefficienten dieser Gleichung der Bedingung genügen:

$$(11) \quad 2(abu)^2(vud)^2(1-\sigma) + (aud)^2(bvu)^2\sigma^2 = 0, \quad \sigma = \frac{\varrho + 1}{\varrho}.$$

Hier mag noch insbesondere der specielle Fall hervorgehoben werden, dass ϱ einen der complexen Werthe von $\sqrt[3]{1}$ bedeutet; alsdann

*) Die Relation: $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = 0$ bildet einen speciellen Fall der Be-

dingungsgleichung, welche zwischen zwei Connexen: $\varphi(x, u) = 0$ und $\psi(x, u) = 0$ bestehen muss, damit die Differentialgleichungen, welche durch die Hauptcoincidenz derselben geliefert werden, in involutorischer Lage sich befinden, d. h. eine Integralcurve gemein haben. Diese Forderung ist nämlich, wie ich einer Vorlesung des Herrn Klein entnehme, durch das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen:

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = 0, \quad \varphi(x, u) = 0, \quad \psi(x, u) = 0, \quad u_x = 0$$

ausgedrückt.

wird σ gleich einer primitiven dritten Wurzel aus -1 und der zugehörige Connex, welcher durch seinen Drehpunkt diese Beziehung liefert, ist, wenn für $\hat{u}\hat{d}u$ die Variablen x eingeführt werden, durch die Gleichung:

$$(12) \quad 2(abu)^2 v_x^2 - (avu)^2 \cdot a_x^2 = 0$$

gegeben. Die Punkte, welche durch diesen Connex der Geraden u zugeordnet werden, sind *äquianharmonisch* gelegen zu den drei Schnittpunkten von $u_x=0$ mit $a_x^2=0$ und $v_x=0$. Ueberhaupt gilt, wie durch directe Rechnung gefunden wird, allgemein das Gesetz, dass der Connex (11) auf jeder Geraden diejenigen beiden Punkte ausschneidet, welche mit je einem der Schnittpunkte des Kegelschnittes das Doppelverhältniss σ bestimmen in Bezug auf den anderen Schnittpunkt und den Punkt $\hat{u}\hat{v}$. Dabei besitzen indessen alle diese Connexe die besondere Eigenschaft, dass sie immer nur *einfach* unendlich viele Ordnungs- und einfach unendlich viele Classencurven enthalten; und zwar werden diese beiden Reihen von Connexcurven für die ganze Connexschaar immer durch *dieselben* Kegelschnitte, nämlich durch das Büschel: $v_x^2 - \lambda \cdot a_x^2 = 0$ und durch die Schaar: $\lambda (abu)^2 - 2(avu)^2 = 0$ dargestellt. Wir können diese, wohl auch durch anderweitige Betrachtungen leicht abzuleitenden Resultate dahin zusammenfassen:

Ist in der Ebene ein Kegelschnitt: $a_x^2 = 0$ und eine gerade Linie: $v_x = 0$ gegeben, und construirt man auf jeder Geraden u_x diejenigen beiden Punkte, welche mit je einem auf der Geraden gelegenen, dem Kegelschnitte angehörigen Punkte das Doppelverhältniss σ bestimmen in Bezug auf den anderen Schnittpunkt und den Punkt $\hat{u}\hat{v}$, so liegen diese beiden Punkte auf einem Kegelschnitte, welcher den Fundamentalkegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit v_x tangirt. In der Gesamtheit von *einfach* unendlich vielen, auf diese Weise construirten Kegelschnitten lässt sich nun eine paarweise und reciproke Zuordnung auf einfach unendlich viele Arten treffen, indem allen denjenigen Geraden, welche den Kegelschnitt: $2(avu)^2 - \lambda(abu)^2 = 0$ (wobei jetzt λ irgend einen festen Werth bedeutet) umhüllen, der *nämliche* Kegelschnitt: $4v_x^2(1-\sigma) + \lambda a_x^2 \sigma^2 = 0$ angehört, welcher alsdann durch seine Schnittpunkte auf allen diesen Geraden das Doppelverhältniss σ in dem soeben festgesetzten Sinne liefert. Durch diese Zuordnungen werden zugleich *Differentialgleichungen* construirt, wenn man in jedem Punkte der Ebene die beiden Richtungen betrachtet, welche von diesem Punkte als Tangenten des ihm jedesmal zugeordneten Kegelschnittes ausgehen. Sind dann die Punkte der Fundamentalcurve durch einfach periodische Functionen eines Parameters v dargestellt, so erhält man die *Integralcurven* dieser Differentialgleichungen, indem man aus den Co-

ordinaten zweier Curvenpunkte mit den Argumenten v und $\varrho \cdot v + \text{const.}$, $x_i = \varphi_i(v)$ und $y_i = \varphi_i(\varrho v + c)$, die Coordinaten der Verbindungslinie: $u = \widehat{xy}$ bildet; durch den Werth von ϱ (oder auch $\frac{1}{\varrho}$) ist die zugehörige Differentialgleichung ($\sigma = \frac{\varrho + 1}{\varrho}$) charakterisirt, durch c die Integrationsconstante geliefert. Die Integralcurven sind *algebraisch*, sobald der Werth des Doppelverhältnisses: σ (also auch ϱ) *rational*, *transscendent* sobald er *irrational* ist. Der Kegelschnitt: $a_x^2 = 0$ und ebenso die doppeltzählende Gerade: $(v_x)^2 = 0$ bilden ein particuläres Integral in Punktcoordinaten, die Classencurve: $(abu)^2 = 0$ und das Punktepaar $(avu)^2 = 0$ ein particuläres Integral in Liniencoordinaten für sämtliche Differentialgleichungen.

II.

Ueber den Zusammenhang des Fundamentalintegrals $\omega(v)$ mit dem auf eine Curve dritter Ordnung bezüglichen elliptischen Integrale.

Die eben behandelte quadratische Gleichung (8) kann nach dem allgemeinen Gedanken, welcher dem Beweise des Abel'schen Theorems zu Grunde gelegt wurde, in engste Beziehung zu der cubischen Gleichung gesetzt werden, welche im vorigen § für die allgemeine Curve dritter Ordnung aufgestellt ist. Zu dem Zwecke betrachte man das Product: $a_x^2 \cdot v_x = 0$ als zusammengehörige cubische Gleichung, so ist:

$$(1) \quad D = \frac{|cx \, dx|}{2 a_x a_c v_x + a_x^2 v_c} \quad (a_x^2 \cdot v_x = 0)$$

ein Differential, dessen Summenwerth für jedes Schnittpunktsystem gleich Null ist. Dieses Differential zerfällt aber in zwei Theile, von denen sich der eine auf den Kegelschnitt: $a_x^2 = 0$, der andere auf die Gerade: $v_x = 0$ bezieht. Die drei zu den Schnittpunkten einer Geraden u_x gehörigen Differentialwerthe werden demnach durch eine cubische Gleichung gewonnen, welche sich aus dem Producte der Gleichung: $D \cdot (avu)^2 - (vudu) = 0$, durch welche der auf die Gerade v_x bezügliche Differentialwerth dargestellt wird, mit der obigen quadratischen Gleichung (8) zusammensetzt, wenn in derselben für D der Werth $2D$ geschrieben wird. Auf diese Weise erhält man das Resultat:

$$(2) \quad 2D^3(abu)^2 \cdot ((avu)^2)^2 + D((audu)^2 \cdot (avu)^2 - 2(abu)^2(vudu)^2) - (audu)^2(vudu) = 0,$$

und diese Gleichung, in welcher der Coefficient von D^2 , wie erforderlich, verschwindet, entspricht genau der im § 6. (5) gebildeten, wenn

dort für D der Werth $3D$ substituirt wird und beide Seiten mit dem Factor $-\frac{1}{2}$ multiplicirt werden:

$$-\frac{3}{2} D^3 \cdot F - \frac{3}{2} D \cdot \Theta - f = 0.$$

Denn setzt man: $\alpha_x^3 = \alpha_x^2 v_x$, so ist:

$$(3) \quad \begin{aligned} F &= (\alpha\beta u)^2 (\gamma\delta u)^2 (\alpha\gamma u)(\beta\delta u) = -\frac{1}{27} (abu)^2 (cvu)^2 (dvu)^2, \\ \Theta &= (\alpha\beta u)^2 \alpha_x \beta_x = \frac{2}{3} (2(abu)^2 v_x^2 - (avu)^2 \cdot \alpha_x^2). \end{aligned}$$

Diese Ergänzung des Differentiales dritter Gattung zu einem solchen, dessen Summenwerth immer gleich Null ist, findet ihren geometrischen Ausdruck darin, dass das elliptische Doppelblatt, welches durch einen Kegelschnitt: $u_\alpha^2 = 0$ erzeugt wird, wenn man bei demselben als einem Tangentengebilde die reellen Träger imaginärer Tangenten ins Auge fasst*), nach Ausscheidung eines Punktes: $u_\gamma = 0$, welcher innerhalb des vom Kegelschnitt umschlossenen Raumes angenommen werden soll, zu einer Art der Ringflächen wird, auf denen sich ein überall endliches Integral erstrecken lässt, oder mit anderen Worten, dass die Riemann'sche Doppelfläche, welche den Verlauf des behandelten Integrales vom Geschlecht $p=0$ repräsentirend, *einfach* zusammenhängend ist, dadurch *dreifach* zusammenhängend wird, dass man durch beide Blätter eine Punktirung ausführt, vermittelt deren zwei übereinanderliegende Punkte ausgeschieden werden, und die beiden Blätter an diesem Punkte wieder zusammenheftet. Während also die Summe der Argumente, welche zweien Tangenten des Kegelschnittes zukommen, durchaus veränderlich ist, wird dieselbe sofort *constant*, sobald auch das Argument der dritten Linie hinzugefügt wird, welche vom Schnittpunkte der beiden Tangenten zum Punkte: u_γ hinführt. Aus der zwischen diesen drei Argumenten bestehenden Relation können alsdann, und darin liegt die Verwerthbarkeit dieser Betrachtung, ebenso wie bei den überall endlichen Differentialen alle die mannigfaltigen geometrischen Sätze abgeleitet werden, die auf einer Theilung der Periode beruhen; *nur muss man hierbei die verschiedenen Argumente unterscheiden*, je nachdem das Differential innerhalb der verschiedenen Gebiete bewegt wird.

Zur Erläuterung dieser Bemerkung diene zunächst die Ableitung des Kegelschnittbüschels, welches die Integralcurven desjenigen Connexes darstellt, für welchen $\varrho = 1$ ($\sigma = 2$) wird. Die Betrachtung soll hierbei mit Zugrundelegung einer Curve 2^{ter} Classe geführt werden. Die auf den adjungirten Punkt bezüglichen Argumente seien durch Klammern bezeichnet und die Integrationswege so normirt, dass

*) Klein: Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Math. Annalen Bd. VII.

zwischen den Argumenten dreier Linien aus einem Punkte die Gleichung besteht:

$$v_1 + v_2 + (v) \equiv 0 \pmod{p = 2\pi i},$$

wenn $p = 2\pi i$ die logarithmische Periode bedeutet; die andere Periode des elliptischen Integrales ist unendlich gross geworden. Die beiden Argumente v_1 und v_2 sollen nun bis auf eine Constante einander gleich sein, und es entsteht die Frage, welche Curven durch den Schnitt zweier Tangenten, welche in dieser Relation zu einander stehen, erzeugt werden. Auf einer Linie (v) liegen zwei Punkte solch einer Curve; denn es ist:

$$2v + c + (v) \equiv 0, \text{ also } v = -\frac{(v)}{2} - \frac{c}{2} \text{ oder } -\frac{(v)}{2} - \frac{c}{2} + \frac{p}{2}.$$

Mithin sind die gesuchten Curven *Kegelschnitte*, und zwar berühren dieselben den Fundamentalkegelschnitt überall, wo sie denselben treffen. Diese Berührung muss aber in den Berührungspunkten der beiden vom Punkte y ausgehenden Tangenten stattfinden, da nur für diese Tangenten die Gleichung $u = u + c$ gelten kann. Die erhaltenen Kegelschnitte bilden also eine Schaar von der Form:

$$\lambda(\alpha\beta x)^2 - 2(\alpha y x)^2 = 0.$$

Auf dieselbe Weise findet man, dass die Integralcurven eines durch den Werth $\varphi = \frac{m}{n}$ oder $\frac{n}{m} \left(\sigma = \frac{m+n}{m} \text{ oder } \frac{m+n}{n} \right)$ charakterisirten Connexes, falls m und n rationale und ganze Zahlen sind, von der Ordnung $(m+n)$ und vom Geschlecht $p=0$ sein müssen; bei der Berechnung dieser Ordnungszahl sind für m und n die absoluten Werthe zu nehmen.

Im Uebrigen aber sind alle diese Curven genau die entsprechenden zu denjenigen, welche für die durch eine Curve dritter Classe gebildete Ringfläche gefunden wurden. Was dort als *Meridiancurven* bezeichnet ist, wird hier durch die Gesamtheit aller durch den adjungirten Punkt gehenden Geraden vorgestellt, während die *Breitencurven* durch das behandelte Kegelschnittbüschel geliefert werden.

Will man das Bild dieses Curvennetzes völlig symmetrisch gestalten, so wähle man zum Fundamentalkegelschnitt einen Kreis und verlege den Unendlichkeitpunkt in den Mittelpunkt dieses Kreises. Fällt insbesondere dieser angenommene Kreis mit den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten selber zusammen, und nimmt man alsdann einen beliebigen Punkt der Ebene zum Unendlichkeitspunkte an, so erhält man Curvensysteme, welche sich auf einer Kugel als die Systeme der *Meridian-* und *Breitencurven* und der *Loxodromen* durch stereographische Projection abbilden lassen.

III.

Ueber die Aronhold'sche Integrationsmethode.

Die Ermittlung der allgemeinen zu einem Kegelschnitte gehörigen Integrale:

$$\int \frac{|cx dx| a_x^{n-1}}{\beta_x^n a_x a_c},$$

von denen im Vorhergehenden nur das einfachste ($n=1$) behandelt wurde, wird bei Aronhold*) auf die beiden Integrale:

$$\int \frac{|cx dx|}{v_x a_x a_c} \quad \text{und} \quad \int \frac{|cx dx| a_x}{v_x w_x a_x a_c} \quad (a_x^2 = 0)$$

zurückgeführt. Diese Zurückführung erfolgt auf die Weise, dass statt der Curven β_x^n ein Product von n Geraden eintritt, welche auf dem Kegelschnitte das nämliche Schnittpunktsystem wie β_x^n ausschneiden. Bezeichnet man dieses Product mit: $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}$, so kann, falls die Linien $p_x^{(i)}$ als von einander verschieden und nicht in linearer Weise von einander abhängig vorausgesetzt werden, der Quotient:

$$\frac{a_x^{n-1}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, deren Nenner die Grössen x entweder in der ersten oder in der zweiten Potenz enthält. Nach Multiplication dieser einzelnen Ausdrücke mit dem Differentialwerth: $\frac{|cx dx|}{a_x a_c}$ handelt es sich noch darum, eine geeignete Substitution für die willkürlichen Grössen c zu ermitteln.

Dieses Verfahren ist nicht mehr ausreichend, sobald eine Curve von höherer als der zweiten Ordnung dem Differentiale zu Grunde gelegt wird, also bei Lösung aller derjenigen Probleme, welche im vorhergehenden Abschnitt durchgeführt wurden. Dagegen erscheint es bei den vorliegenden Problemen unter den mannigfachen Zerlegungsweisen als die einfachste, weshalb ich hier auf diese specielle Methode in Kürze eingehen und nur hinsichtlich der Integration des zweiten Fundamentalintegrals eine geringfügige Abänderung treffen werde.

Die zweckmässigste Zerlegung des Ausdrucks: $\frac{a_x^{n-1}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}}$, in welchem der Nenner um eine Ordnung höher ist als der Zähler,

*) A. a. O. Bd. 61.

nach Partialbrüchen erster und zweiter Ordnung, wird durch die Gleichung geliefert*):

$$(1) \quad \frac{\alpha_x^{n-1}}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}} = \sum_{i,k} \frac{a_{ik} \alpha_x (a p^{(i)} p^{(k)})}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}} + \sum_i \frac{b_i}{p_x^{(i)}}.$$

Die Möglichkeit und Bestimmtheit derselben folgt aus einer Abzählung der auf beiden Seiten stehenden Constanten unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der linearen Functionen $p_x^{(i)}$. Für die rechts vorkommenden Constanten ergeben sich nach der früher gebrauchten Bezeichnung die Werthe:

$$(2) \quad a_{ik} = \frac{(\alpha p^{(i)} p^{(k)})^{n-1}}{(a p^{(i)} p^{(k)})^2 \Pi(p p^{(i)} p^{(k)})}, \quad b_i = \frac{\alpha_{y^{(i)}}^{n-1}}{\Pi(p_{y^{(i)}})} - \sum_k \frac{a_{ik} \alpha_{y^{(i)}} (a p^{(i)} p^{(k)})}{p_{y^{(i)}}^{(k)}}.$$

In diesen Formeln bedeutet $\Pi(p p^{(i)} p^{(k)})$ das Product, welches entsteht, wenn p alle Werthe von $p^{(1)}$ bis $p^{(n)}$ annimmt, mit Ausnahme der Werthe $p^{(i)}$ und $p^{(k)}$. Für den im Uebrigen willkürlichen Punkt $y^{(i)}$ soll die Gleichung bestehen: $p_{y^{(i)}}^{(i)} = 0$ und der Ausdruck $\Pi(p_{y^{(i)}})$, sowie \sum_k umfasst wiederum alle Werthe von p , mit Ausnahme des einen Werthes: $p^{(i)}$. In der That wird man durch diese Partialbrüche nur auf die beiden Integrale:

$$a_{ik} \int \frac{\alpha_x (a p^{(i)} p^{(k)}) |c x dx|}{p_x^{(i)} p_x^{(k)} a_x a_c} \quad \text{und} \quad b_i \int \frac{c x dx |}{p_x^{(i)} a_x a_c} = b_i \cdot \omega(p^{(i)})$$

geführt, von denen das zweite bereits früher ermittelt wurde, das erste dagegen durch Substitution des Werthes: $\widehat{p^{(i)} p^{(k)}} = c$ die einfache Integration zulässt:

$$\int \frac{\alpha_x (a p^{(i)} p^{(k)}) |c x dx|}{p_x^{(i)} p_x^{(k)} a_x a_c} = \int \frac{p_x^{(i)} p_{dx}^{(k)} - p_x^{(k)} p_{dx}^{(i)}}{p_x^{(i)} p_x^{(k)}} = \log \frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(i)}}.$$

Mithin ist:

$$(3) \quad \int \frac{\alpha_x^{n-1} |c x dx|}{\beta_x^n \cdot a_x a_c} = \sum_{i,k} a_{ik} \log \frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(i)}} + \sum_i b_i \cdot \omega(p^{(i)}).$$

Auf diese Weise lässt sich bereits das Fundamentalintegral zweiter Art:

$$\int \frac{|c x dx| \alpha_x}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} a_x a_c}$$

*) A. a. O. p. 126.

behandeln, für welches indessen folgende directe Auswerthung nicht minder einfach ist. Für die beiden auf der Geraden u_x gelegenen Punkte ist die Summe der Differentialwerthe:

$$(4) \quad \sum \frac{\alpha_x |cx dx|}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} a_x a_c} = -2 \left[\frac{\alpha_x |cx dx|}{a_x^2 p_x^{(1)} p_c^{(2)}} + \frac{\alpha_x |cx dx|}{a_x^2 p_x^{(2)} p_c^{(1)}} \right] \\ = -2 \left[\frac{(\alpha p^{(2)} u) (p^2 u du)}{(a p^{(2)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)} - \frac{(\alpha p^{(1)} u) (p^{(1)} u du)}{(a p^{(1)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)} \right]. \\ (p_x^{(2)} = 0) \quad (p_x^{(1)} = 0)$$

Setzt man nun:

$$p^{(1)} \hat{p}^{(2)} = \eta, \quad p^{(2)} \hat{\alpha} = \xi, \quad \alpha \hat{p}^{(1)} = \vartheta$$

und berücksichtigt, dass aus der Gleichung:

$$(\alpha p^{(1)} p^{(2)}) \cdot a_x a_\eta = a_\eta \{ \alpha_x a_\eta + p_x^{(1)} a_\xi + p_x^{(2)} a_\vartheta \}$$

die neuen Gleichungen fliessen:

$$(\alpha p^{(1)} u) = \frac{(p^{(1)} p^{(2)} u) a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^2} + \frac{(\alpha p^{(1)} p^{(2)}) (a p^{(1)} u) a_\eta}{a_\eta^2}, \\ (\alpha p^{(2)} u) = - \frac{(p^{(1)} p^{(2)} u) a_\xi a_\eta}{a_\eta^2} + \frac{(\alpha p^{(1)} p^{(2)}) (a p^{(2)} u) a_\eta}{a_\eta^2},$$

so ergibt sich aus der Substitution dieser Werthe in die Formel (4) der Ausdruck:

$$(5) \quad \frac{2 a_\xi a_\eta}{a_\eta^2} \int \frac{(p^{(2)} u du)}{(a p^{(2)} u)^2} + \frac{2 a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^2} \int \frac{(p^{(1)} u du)}{(a p^{(1)} u)^2} \\ - \frac{2 a_\eta}{a_\eta^2} \int \left[\frac{(\alpha p^{(1)} p^{(2)}) (a p^{(2)} u) (p^{(2)} u du)}{(a p^{(2)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)} - \frac{(\alpha p^{(1)} p^{(2)}) (a p^{(1)} u) (p^{(1)} u du)}{(a p^{(1)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)} \right].$$

Die unter dem dritten Integralzeichen stehende Differenz nimmt, wenn statt der Producte $(\alpha p^{(1)} p^{(2)}) (p^{(2)} u du)$ und $(\alpha p^{(1)} p^{(2)}) (p^{(1)} u du)$ die Werthe:

$$- (p^{(1)} p^{(2)} u) (a p^{(2)} du) + (a p^{(2)} u) (p^{(1)} p^{(2)} du)$$

und

$$- (p^{(1)} p^{(2)} u) (a p^{(1)} du) + (a p^{(1)} u) (p^{(1)} p^{(2)} du)$$

eingeführt werden, die direct integrirbare Form an:

$$- \frac{(a p^{(2)} u) (a p^{(2)} du)}{(a p^{(2)} u)^2} + \frac{(a p^{(1)} u) (a p^{(1)} du)}{(a p^{(1)} u)^2}.$$

Mithin ist:

$$(6) \quad \sum \int \frac{\alpha_x \cdot c x dx}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} a_x a_c} = -\frac{a_g a_\eta}{a_\eta^2} \omega(p^{(1)}) - \frac{a_z a_\eta}{a_\eta^2} \omega(p^{(2)}) + \frac{\alpha_\eta}{a_\eta^2} \log \frac{(a p^{(2)} u)^2}{(a p^{(1)} u)^2}.$$

Um den Werth des Integrales für einen bestimmten Punkt x des Kegelschnittes zu erhalten, setze man wiederum $u = \hat{k}x$ und betrachte k als festen Punkt der Curve; alsdann wird*):

$$(7) \quad \int \frac{\alpha_x \cdot c x dx}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} a_x a_c} = -\frac{a_g a_\eta}{a_\eta^2} \omega(p^{(1)}) - \frac{a_z a_\eta}{a_\eta^2} \omega(p^{(2)}) + \frac{\alpha_\eta}{a_\eta^2} \log \frac{p_x^{(2)}}{p_x^{(1)}},$$

wobei $\omega(p^{(1)})$ und $\omega(p^{(2)})$ die in § 7. I. (Gleichung (6)) definirten Werthe besitzen. In der vorhin bei Bildung der Gleichung (3) benutzten Formel ist: $\alpha_x = a_x a_\eta$, mithin auch $a_g a_\eta = 0$, $a_z a_\eta = 0$ und $a_\eta = a_\eta^2$.

Ein beachtenswerther specieller Fall tritt ferner noch ein, wenn $a_\eta^2 = (a p^{(1)} p^{(2)})^2 = 0$ wird, also der Schnittpunkt der beiden Geraden auf dem Kegelschnitte liegt. Bezeichnet dann $\xi^{(1)}$ den zweiten Punkt, in welchem die Linie $p_x^{(1)}$ den Kegelschnitt trifft, ebenso $\xi^{(2)}$ den zweiten Punkt auf der Geraden $p_x^{(2)}$, so führe man in die Gleichung (4) die Werthe ein: $p_x^{(1)} = (\xi^{(1)} \eta x)$, $p_x^{(2)} = (\xi^{(2)} \eta x)$. Der letzte Ausdruck rechts zerlegt sich in vier direct integrirbare Differentiale, so dass man erhält: Es ist unter den Bedingungen:

$$a_\eta^2 = 0, \quad a_{\xi^{(1)}}^2 = 0, \quad a_{\xi^{(2)}}^2 = 0$$

$$) \int \frac{|c x dx| \alpha_x}{(\xi^{(1)} \eta x) (\xi^{(2)} \eta x) a_x a_c} = \frac{1}{(\xi^{(1)} \xi^{(2)} \eta)} \left\{ -\frac{\alpha_\eta}{a_{\xi^{(1)}} a_\eta} \cdot \frac{(k x \xi^{(1)})}{(k x \eta)} + \frac{\alpha_\eta}{a_{\xi^{(2)}} a_\eta} \cdot \frac{(k x \xi^{(2)})}{(k x \eta)} + \frac{\alpha_{\xi^{(1)}}}{a_{\xi^{(1)}} a_\eta} \log \frac{(k x \xi^{(1)})}{(k x \eta)} - \frac{\alpha_{\xi^{(2)}}}{a_{\xi^{(2)}} a_\eta} \log \frac{(k x \xi^{(2)})}{(k x \eta)} \right\}.$$

Die Fälle endlich, in welchen die linearen Functionen $p_x^{(i)}$, welche in der allgemeinen Form das Schnittpunktsystem von β_x^n vertreten, nicht mehr als in linearer Weise von einander unabhängig betrachtet werden dürfen, lassen sich durch Formen ersetzen, in welchen diese Functionen zu verschiedenen Potenzen erhoben vorkommen, und werden mit Hülfe des δ -Processes erledigt. Diese Fälle treten dann ein, wenn entweder die im Zähler stehende Function β_x^n als irreducibele

*) A. a. O. p. 119.

Curve den Kegelschnitt in einigen Punkten mehrfach schneidet, oder aber selbst schon aus der Potenz einer Function niedriger Ordnung besteht.

Der Einfluss des δ -Processes auf die sub (3) aufgestellte allgemeine Gleichung folgt aus der Formel:

$$(9) \int \frac{\alpha_x |cx dx|}{(p_x)^2 a_x a_c} = \omega((p)^2) = -\delta \omega(p) = \frac{(abp)(ab\alpha)}{(abp)^2} \omega(p) - \frac{2}{p_x} \frac{(ap\alpha) a_x}{(abp)^2}.$$

Die Ableitung derselben kann entweder direct (wie bei Aronhold: p. 106) oder aus der am Schlusse des § 4. erörterten allgemeinen Form gewonnen werden.

§ 8.

Ueber ein Differential vom Geschlecht: $p = 3$.

I.

Das Fundamentalintegral: $\int \frac{\alpha_x |cx dx|}{a_x^3 a_c}.$

Das algebraische Differential, welchem eine allgemeine Curve vierter Ordnung zu Grunde liegt, ist wie bekannt vom Geschlecht: $p = 3$. Soll dasselbe ein in allen Punkten der Curve *endliches* sein, so darf der Nenner ausser der ersten Polare eines beliebigen Punktes c_i in Bezug auf die Fundamentalcurve keine weitere Function enthalten und der Zähler des Differentialies muss für diejenigen Punkte, in denen gleichzeitig a_x^4 und $a_x^3 a_c$ gleich Null werden, ebenfalls verschwinden. Dem gemäss erhält das zu betrachtende homogene Differential die Form:

$$(1) \quad D = \frac{|cx dx| \alpha_x}{a_x^3 a_c} = \frac{\alpha_x (v_x u_{ax} - u_x v_{dx})}{a_x^3 (auv)}, \quad (a_x^4 = 0).$$

Entsprechend den drei willkürlichen Constanten, welche in die lineare Function des Zählers eingehen, giebt es hier *drei* überall endliche Differentiale, d. h. die Werthe jedes anderen überall endlichen Differentialies lassen sich aus dreien linear zusammensetzen. (Unter dem Ausdrucke: „überall endliches Differential“, welcher von der Bezeichnungsweise der Integrale entlehnt ist, wird ein solches Differential zu verstehen sein, dessen Werth in allen Punkten nicht von geringerer Ordnung unendlich klein ist, als der Zuwachs der im Differentialie enthaltenen veränderlichen Grösse x .)

Es sollen nun die symmetrischen Functionen entwickelt werden für diejenigen vier Werthe eines in der Form (1) definirten Differentialies, welche dadurch zu Stande kommen, dass man die Curve vierter Ordnung durch eine gerade Linie schneidet und diese Linie um einen ihrer

Punkte unendlich wenig dreht. Zur Bildung dieser Functionen gelangt man, indem man in der Gleichung (1) u_x gleich Null setzt und die Relation: $u_{dx} + du_x = 0$ berücksichtigt. Alsdann hat man nämlich die Grössen x aus den drei Gleichungen:

$$(2) \quad a_x^4 = 0, \quad u_x = 0, \quad D = -\frac{\alpha_x v_x du_x}{a_x^3 (avv)}$$

zu eliminiren, und findet somit die biquadratische Gleichung, durch welche die Werthe von D als abhängig von den Coordinaten u_i und du_i erscheinen. Diese Eliminationsrechnung liesse sich noch auf die Weise vereinfachen, dass man nach Einführung einer zweiten Reihe von willkürlichen Coordinaten: w_i statt v_i die Gleichungen aufstellt:

$$(3) \quad D = -\frac{\alpha_x v_x du_x}{a_x^3 (avv)}, \quad D = -\frac{\alpha_x w_x du_x}{a_x^3 (aww)}, \quad u_x = 0,$$

und aus diesen nach dem Bildungsgesetze der Resultante einer linearen und zweier cubischen ternären Formen die Grössen x entfernt. In beiden Fällen erhielte man indessen die gesuchte Gleichung noch mit überflüssigen Factoren multiplicirt. Denn bei dem ersten Eliminationsverfahren muss, damit die willkürlichen Grössen v_i herausgehen, der Factor $(avv)^4$ vor den gesammten Endausdruck treten; bei dem zweiten lässt sich um des gleichen Grundes willen der Factor (uww) absondern. Es erscheinen demnach beide Arten als unzweckmässig, wie schon von vornherein daraus ersichtlich wird, dass unter den Bedingungen: $a_x^4 = 0$ und $u_x = 0$ bereits der Ausdruck: $a_x^3 (avv)$ durch v_x theilbar wird.

Ich werde daher im Folgenden einen Weg einschlagen, welcher die gesuchte Gleichung frei von überflüssigen Factoren darstellen lehrt, zugleich aber auch ein allgemeines Gesetz für die Ausführung desselben Problems bei Differentialen von beliebiger Ordnung und beliebigem Geschlechte liefert.

Der ganzen Betrachtungsweise algebraischer Differentiale, welche im Vorliegenden zur Anwendung gekommen ist, liegt der Gedanke als wesentlicher zu Grunde, dass unter der Bedingung: $u_x = 0$ jede Curve beliebiger Ordnung durch ein Product von n geraden Linien dargestellt werden kann, dass also, bis auf Glieder mit dem Factor u_x , die Gleichung gilt:

$$a_x^n = p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdots p_x^{(n)}.$$

Die Grössen $p_x^{(i)}$ haben dabei nur die Bedingung zu erfüllen, dass jede der Geraden durch einen der Schnittpunkte von u_x mit a_x^n hindurchgeht, und werden dann erst in linearer Weise zu dreien von einander abhängig, wenn mehr als zwei dieser Schnittpunkte zusam-

menrücken. Der Beweis für die Giltigkeit dieses Ansatzes folgt, wie schon früher erwähnt wurde, aus der einfachen Ueberlegung, dass in dem Büschel von Curven n^{ter} Ordnung, welche durch die Schnittpunkte von $\alpha_x^n = 0$ und $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)} = 0$ hindurchgehen, jedenfalls eine vorhanden ist, die von der Linie $u_x = 0$ in $n + 1$ Punkten geschnitten wird, die mithin diese Linie als einen Theil ihres Bereiches enthält.

An diese Darstellung einer Curve durch das Product von geraden Linien knüpft sich zugleich eine neue und für gewisse Probleme sehr zweckmässige Art der Symbolik, indem man die Grössen $p^{(i)}$ eben nur als eine symbolische Bezeichnung der Coefficienten der Grundform betrachtet*). In der Darstellungsweise, welche gegenwärtig üblich ist, wird die Curve als die n^{te} Potenz einer linearen Function behandelt. Sie als Product von n verschiedenen geraden Linien anzusehen, ist aber für die symbolische Berechnung algebraischer Formen nur dann von Vortheil, wenn man bei Bildung der covarianten Formen, welche die Coefficienten der Grundform zu höheren Graden enthalten, nicht genöthigt ist, ebensovielen neue Symbole einzuführen wie bei der gewöhnlichen symbolischen Rechnungsweise. Bei dieser wird, damit der Rückgang zur realen Bildung eindeutig bleibt, die Einführung verschiedener Symbolensysteme nothwendig, sobald die Coefficienten der Grundform zu höherer als der ersten Potenz vorkommen. Für die andere Art der Darstellung dagegen ist solch eine Unterscheidung zusammengehöriger Symbole nicht in allen Fällen geboten. Denn die Covarianten einer *ternären* Form werden zum Theil dadurch gewonnen, dass man in allen zu dem Systeme einer *binären* Form gehörigen Bildungen die aus symbolischen Coefficienten der Grundform zusammengesetzten Determinanten durch Hinzufügung einer Reihe von Linien-coordinaten: u_i zu dreigliedrigen Determinanten erweitert**). Man ge-

*) Ein Hinweis auf diese Art symbolischer Bezeichnung für Formen von *drei* oder *mehr* Dimensionen findet sich in dem Aufsatz von Aronhold: Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie (Journal Bd. 62, p. 343). In seiner Abhandlung: Sulle forme ternarie di grado qualunque (Giornale di matematiche Vol. IX, p. 152) hat Battaglini diese Symbolik zu einer Reihe von Formenbildungen benutzt, welche dem binären Systeme entstammen. Inzwischen erschliesst das ebenfalls dort gegebene Beispiel der Resultante dreier beliebigen Curven die Erkenntniss, dass die Giltigkeit des für die Anwendung dieser Bezeichnungsweise im Texte entwickelten einfachen Gesetzes nicht auf die Classe der aus dem binären Gebiete herübergenommenen Formen beschränkt ist. Es ist mir indessen bisher nicht gelungen, die Grenzen der Anwendbarkeit nur eines Symbolensystemes genau zu präcisiren; für die Form der allgemeinen Resultante lässt sich die Zulässigkeit dieser einfachen Darstellung dadurch begründen, dass man den Symbolen zugleich eine *reale* Bedeutung beilegt.

**) Clebsch: Ueber die symbolische Darstellung algebraischer Formen. Journal Bd. 59.

winnt auf diese Weise eine ganze Classe von ternären Bildungen und für diese ergibt sich der Satz:

Bei allen aus einem binären Systeme herübergenommenen ternären Formen bedarf man in der symbolischen Darstellung: $\alpha_x^n = p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}$ nur einer Reihe von Symbolen $p^{(i)}$, welche je nach dem Grade, bis zu welchem die Coefficienten der Grundform in die dargestellte Form eingehen, zu beliebigen Potenzen erhoben vorkommen werden.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich einfach darauf, dass in den eben betrachteten Formen den Grössen $p_x^{(i)}$ auch die reale Bedeutung beigelegt werden kann, in Folge deren jede von ihnen eine gerade Linie repräsentirt. Für alle aus dem binären Systeme herübergenommenen Formen, zu welchen beispielsweise die Curvengleichung in Liniencoordinaten gehört, gewinnt man also durch diese Art der Symbolik eine in vielen Fällen zweckmässige Darstellung, die sich zugleich auch auf einige ternäre Bildungen im eigentlichen Sinne, wie z. B. auf die Resultantenbildung dreier Curven, durch ähnliche Betrachtungen, wie die soeben geführten, erweitern lässt. Es ist leicht einzusehen, dass das analoge Verfahren vermittelt des Productes von n verschiedenen linearen Functionen bei den binären Formen auf die Darstellung der Covarianten als der symmetrischen Functionen aus den n Wurzelwerthen führen muss, so dass hier bei keiner Bildung die Einführung neuer Symbole nothwendig wird. (Für 'quaternäre Formen gilt ein gleich einfaches Gesetz sicher für diejenigen Covarianten, welche durch zweimalige Anwendung der Ränderung binärer Determinanten mit den Ebenencoordinaten u_i und v_i aus dem binären Systeme ins quaternäre Gebiet erhoben sind.)

Führt man nun in die ursprüngliche Form des allgemeinen Differentiales:

$$D = \frac{|cx dx| \alpha_x^{m+n-3}}{\beta_x^m \cdot \alpha_x^{n-1} a_x}, \quad (\alpha_x^n = 0, \quad u_x = 0, \quad u_{dx} + du_x = 0)$$

für α_x^n den Werth $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}$ ein, so erhält man n verschiedene Differentiale, von denen jedes längs einer der Geraden $p_x^{(i)}$ erstreckt ist, und denen nunmehr nach der oft angewandten Substitution $x = p^{(i)} u$, $dx = p^{(i)} du$ die Form gegeben werden kann:

$$D_i = n \cdot \frac{(p^{(i)} u du) (\alpha p^{(i)} u)^{m+n-3}}{(\beta p^{(i)} u)^m \Pi (p p^{(i)} u)}.$$

Unter dem Ausdrucke: $\Pi (p p^{(i)} u)$ ist wiederum der Werth des Productes aus allen Determinanten zu verstehen, welche dadurch zu Stande

kommen, dass p alle Werthe von $p^{(1)}$ bis $p^{(n)}$ mit Ausnahme des Werthes $p^{(i)}$ durchläuft. Es folgt aus dieser Betrachtungsweise der Satz:

Die n Werthe eines auf die Curve α_x bezüglichen Differential, welche dadurch entstehen, dass man die Curve durch eine gerade Linie $u_x = 0$ schneidet und diese Linie um einen ihrer Punkte bis zur benachbarten Linie $u_x + du_x = 0$ bewegt, lassen sich durch n Differentiale ausdrücken, welche längs gerader Linien erstreckt sind, von denen jede bezüglich durch einen der n Schnittpunkte von $\alpha_x = 0$ und $u_x = 0$ hindurchgeht; diese Differentiale sind gleichfalls von den Schnittpunkten mit u_x bis zu den Schnittpunkten mit $u_x + du_x = 0$ zu nehmen.

Der Zuwachs jedes algebraischen Differential bei der Bewegung einer schneidenden Geraden ist also durch den Zuwachs eines rationalen Differential darstellbar. Verwerthen wir nun insbesondere diesen Satz für das in der Gleichung (1) definirte Differential, so erhalten wir, wenn $\alpha_x^4 = p_x^{(1)} p_x^{(2)} p_x^{(3)} p_x^{(4)}$, $u_x = 0$ gesetzt wird, die vier Differentialwerthe:

$$(4) \quad \begin{aligned} D_1 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(1)} u) (p^{(1)} u du)}{(p^{(2)} p^{(1)} u) (p^{(3)} p^{(1)} u) (p^{(4)} p^{(1)} u)}, \\ D_2 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(2)} u) (p^{(2)} u du)}{(p^{(3)} p^{(2)} u) (p^{(4)} p^{(2)} u) (p^{(1)} p^{(2)} u)}, \\ D_3 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(3)} u) (p^{(3)} u du)}{(p^{(4)} p^{(3)} u) (p^{(1)} p^{(3)} u) (p^{(2)} p^{(3)} u)}, \\ D_4 &= 4 \cdot \frac{(\alpha p^{(4)} u) (p^{(4)} u du)}{(p^{(1)} p^{(4)} u) (p^{(2)} p^{(4)} u) (p^{(3)} p^{(4)} u)}. \end{aligned}$$

Der Kürze halber sei für den Punkt $u \hat{d}u$ der Werth ξ , für $u \hat{\alpha}$ der Werth η eingeführt, so dass die Zähler der vorstehenden Differentiale die Formen:

$$4 p_\xi^{(1)} p_\eta^{(1)}, \quad 4 p_\xi^{(2)} p_\eta^{(2)}, \quad 4 p_\xi^{(3)} p_\eta^{(3)}, \quad 4 p_\xi^{(4)} p_\eta^{(4)}$$

annehmen. Da die Grössen ξ und η völlig gleichberechtigt auftreten, so gilt der immerhin bemerkenswerthe Satz, dass der Werth des Differential ungeändert bleibt, wenn auf der Linie u die Bedeutung des Drehpunktes ξ mit dem Punkte η vertauscht wird.

Um die gesuchte biquadratische Gleichung, deren Wurzeln durch die vorstehenden Differentiale gegeben sind, zu bilden, ist das Product $(D - D_1)(D - D_2)(D - D_3)(D - D_4)$ auszumultipliciren. Der Coefficient des mit dem Factor D^3 behafteten Gliedes muss, da wir es hier mit einem Differentiale zu thun haben, welches im Nenner keine andere Function als $\alpha_x^3 \alpha_c$ enthält, zufolge des Abel'schen Theoremes

verschwinden*), so dass nur noch die Coefficienten von D^4 , D^2 , D^1 und D^0 zu betrachten sind.

Der Coefficient von D^4 wird nach Multiplication mit dem Producte der in den Gleichungen (4) stehenden Nenner;

$$\prod (p^{(i)} p^{(k)} u)^2 = (p^{(1)} p^{(2)} u)^2 (p^{(1)} p^{(3)} u)^2 (p^{(1)} p^{(4)} u)^2 (p^{(2)} p^{(3)} u)^2 (p^{(2)} p^{(4)} u)^2 (p^{(3)} p^{(4)} u)^2.$$

Der Coefficient von D^2 lautet:

$$(6) -16 \sum p_{\xi}^{(1)} p_{\eta}^{(1)} p_{\xi}^{(2)} p_{\eta}^{(2)} (p^{(3)} p^{(4)} u)^2 (p^{(1)} p^{(3)} u) (p^{(1)} p^{(4)} u) (p^{(2)} p^{(3)} u) (p^{(2)} p^{(4)} u),$$

wobei die fünf übrigen Glieder der Summe durch cyklische Vertauschung der Indices: 1, 2, 3, 4 aus dem hingeschriebenen Ausdruck folgen.

Ebenso wird der Coefficient von D durch cyklische Vertauschung aus einem seiner Glieder gebildet, demnach durch die Form dargestellt:

$$(7) -64 \sum p_{\xi}^{(1)} p_{\eta}^{(1)} p_{\xi}^{(2)} p_{\eta}^{(2)} p_{\xi}^{(3)} p_{\eta}^{(3)} (p^{(1)} p^{(4)} u) (p^{(2)} p^{(4)} u) (p^{(3)} p^{(4)} u).$$

Der Coefficient des von D freien Gliedes endlich hat die einfache Form:

$$(8) 256 p_{\xi}^{(1)} p_{\xi}^{(2)} p_{\xi}^{(3)} p_{\xi}^{(4)} \cdot p_{\eta}^{(1)} p_{\eta}^{(2)} p_{\eta}^{(3)} p_{\eta}^{(4)}.$$

Wenngleich durch diese Darstellung der einzelnen Coefficienten die Aufgabe der Elimination als gelöst anzusehen und die gesuchte biquadratische Gleichung gefunden ist, so ist es doch von Interesse, diese Coefficienten in der gewöhnlich üblichen Form der zu einer Curve 4ter Ordnung gehörigen Covarianten zu bilden, weil diese, gegründet auf das System einer binären biquadratischen Form, in dieser Gestalt für eine Discussion der Gleichung geläufiger sind. Ein einfaches Verfahren, um von der einen Art der Symbolik zur anderen zu gelangen, beruht wesentlich auf der Kenntniss des vollständigen, zu einer binären Form gehörigen Systemes.

*) Der identisch verschwindende Coefficient von D^3 hat bei der hier gebrauchten symbolischen Darstellung die Form:

$$\sum p_{\xi}^{(1)} p_{\eta}^{(1)} (p^{(2)} p^{(3)} u) (p^{(2)} p^{(4)} u) (p^{(3)} p^{(4)} u) \prod (p^{(i)} p^{(k)} u),$$

wobei sich die vier Glieder dieser Summe durch cyklische Vertauschung der Werthe 1, 2, 3, 4 ableiten. Dieser Ausdruck lässt sich bei der gewöhnlichen Symbolik als Polare der gleichfalls verschwindenden Form:

$$a_x b_x (abu) (acu)^2 (dbu)^2 (deu)^2 (ceu)^2$$

darstellen.

II.

Die Covarianten der binären biquadratischen Form dargestellt als symmetrische Functionen der Wurzelwerthe.

Die Covarianten der binären Formen dritter und vierter Ordnung sind als symmetrische Functionen der Wurzeln von Cayley*) vollständig entwickelt worden und finden sich in übersichtlicher Weise zusammengestellt in dem Lehrbuche von Fiedler: „Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen“ (p. 196). Ich werde mich daher nur darauf beschränken, die Zahlencoefficienten anzugeben, durch welche diese Formeln in Uebereinstimmung mit dem Systeme gebracht werden, welches Clebsch in seiner „Theorie der binären Formen“ aufgestellt hat. Diese Zahlencoefficienten lassen sich an einem einfach gewählten Beispiel einer biquadratischen Gleichung, deren Wurzeln als bekannt vorausgesetzt werden, berechnen**). Auf diese Weise ergeben sich für die beiden Covarianten vierter und sechster Ordnung, die gleich durch Ränderung der in ihnen vorkommenden Determinanten zu ternären Formen erhoben werden sollen, die Werthe:

*) Fifth Memoir upon Quantics; Philos. Transact. 1858, Vol. 148, p. 452 ff.

**) Man findet, dem bisherigen Gange entsprechend, für das auf eine Curve dritter Ordnung bezügliche Differential die drei Werthe:

$$D_1 = \frac{3(p^{(1)}u \, du)}{(p^{(2)}p^{(1)}u)(p^{(3)}p^{(1)}u)},$$

$$D_2 = \frac{3(p^{(2)}u \, du)}{(p^{(3)}p^{(2)}u)(p^{(1)}p^{(2)}u)},$$

$$D_3 = \frac{3(p^{(3)}u \, du)}{(p^{(1)}p^{(3)}u)(p^{(2)}p^{(3)}u)},$$

aus deren Multiplication die cubische Gleichung:

$$-D^3 \prod (p^{(i)}p^{(k)}u)^2 + 9D \sum (p^{(1)}u \, du)(p^{(2)}u \, du)(p^{(1)}p^{(3)}u)(p^{(2)}p^{(3)}u) \\ - 27(p^{(1)}u \, du)(p^{(2)}u \, du)(p^{(3)}u \, du) = 0$$

hervorgeht. Der Coefficient des mit D^2 multiplicirten Gliedes führt auf die vermöge $u_x = 0$ verschwindende Form:

$$(abu)^2(acu)(bcu)c_x = [\Theta f],$$

während

$$F = \frac{2}{27} \prod (p^{(i)}p^{(k)}u)^2,$$

$$\Theta = -\frac{2}{9} \sum p_x^{(1)}p_x^{(2)}(p^{(1)}p^{(3)}u)(p^{(2)}p^{(3)}u)$$

wird.

$$(1) H_x^4 = (ab u)^2 a_x^2 b_x^2 = -\frac{1}{24} \sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p^{(3)} p^{(4)} u)^2,$$

$$(2) T_x^6 = (ab u)^2 (cb u) a_x^2 b_x c_x^3 = \frac{1}{32} \sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p_x^{(3)})^2 (p^{(1)} p^{(4)} u) \cdot (p^{(2)} p^{(4)} u) (p^{(3)} p^{(4)} u).$$

Ebenso findet man für die durch *Ränderung der beiden Invarianten* i und j entstehenden Formen, welche durch Σ und \mathbf{T} bezeichnet werden sollen:

$$(3) \Sigma = (ab u)^4 = \frac{1}{12} \sum (p^{(1)} p^{(2)} u)^2 (p^{(3)} p^{(4)} u)^2,$$

$$(4) \mathbf{T} = (ab u)^2 (ac u)^2 (bc u)^2 = \frac{1}{72} \sum (p^{(3)} p^{(4)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)^2 \cdot \{ (p^{(3)} p^{(1)} u) (p^{(4)} p^{(2)} u) + (p^{(3)} p^{(2)} u) (p^{(4)} p^{(1)} u) \}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Gleichung der Curve $\alpha_x^4 = p_x^{(1)} p_x^{(2)} p_x^{(3)} p_x^{(4)}$ in *Liniencoordinaten*:

$$(5) F = \Sigma^3 - 6 \mathbf{T}^2 = \frac{1}{32} \prod (p^{(i)} p^{(k)} u)^2.$$

Mit diesen Formeln ist das vollständige System aller von einer binären biquadratischen Form herübergewonnenen Covarianten erschöpft; jedoch ist in der vorigen Gleichung (6) ein Ausdruck aufgestellt worden, welcher als Polare von:

$$\sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p^{(3)} p^{(4)} u)^2 (p^{(1)} p^{(3)} u) (p^{(1)} p^{(4)} u) (p^{(2)} p^{(3)} u) (p^{(2)} p^{(4)} u)$$

erscheint, und der sich rational aus den bereits gebildeten Formen ableiten lassen muss. Als Covariante vierter Ordnung, welche in den Coefficienten der Grundform vom vierten Grade ist, kann dieser Ausdruck nur dem Büschel $\kappa f + \lambda H$ angehören, wobei κ und λ die mit blossen Zahlencoefficienten behafteten Formen Σ und \mathbf{T} repräsentiren. Die Zahlencoefficienten werden am besten wiederum durch die Berechnung eines speciellen Beispielles bestimmt; es ist:

$$i) \mathbf{T} \cdot f_x^4 - \Sigma H_x^4 = \frac{1}{48} \sum (p_x^{(1)})^2 (p_x^{(2)})^2 (p^{(3)} p^{(4)} u)^2 (p^{(1)} p^{(3)} u) (p^{(1)} p^{(4)} u) (p^{(2)} p^{(3)} u) (p^{(2)} p^{(4)} u)$$

III.

Die symmetrischen Functionen der Differentialwerthe.

Werden die Werthe (5), (6) und (2) für die sub I. berechneten Coefficienten eingetragen, wobei noch von der Form (6) die quadratische, von der Form (2) die cubische Polare in Bezug auf die Punktcoordinaten als die variablen Grössen zu bilden sind, so erhält man das Resultat:

Die symmetrischen Functionen des Differentialies:

$$D = \frac{|cx \, dx| \alpha_x}{a_x^3 \alpha_c}, \quad (a_x^4 = 0)$$

berechnet für die vier Schnittpunkte von $a_x^4 = 0$ mit der Geraden: $u_x = 0$ und einer dieser benachbarten Geraden: $u_x + du_x = 0$ ergeben sich aus der biquadratischen Gleichung:

$$\frac{1}{8} D^4 \cdot F + 3 D^2 (\mathbf{T} \cdot f_{\xi}^2 f_{\eta}^2 - \Sigma \cdot H_{\xi}^2 H_{\eta}^2) - 8 D \cdot T_{\xi}^3 T_{\eta}^3 + a_{\xi}^4 \cdot a_{\eta}^4 = 0,$$

wenn $\xi = \hat{u} du$, $\eta = \hat{u} a$ gesetzt wird.

Die Formen: $F = \Sigma^3 - 6 \mathbf{T}^2$, H_x^4 etc. haben die sub II. definirten Bedeutungen, unter $f_{\xi}^2 f_{\eta}^2$, $H_{\xi}^2 H_{\eta}^2$ etc. sind die durch Polarenbildungen aus f_x^4 , H_x^4 entstandenen Ausdrücke zu verstehen.

Aus dieser Gleichung geht wie erforderlich zunächst hervor, dass, falls die Linie u_x eine *Tangente* der Curve ist, die beiden Differentiale im Berührungspunkte von höherer Ordnung werden, als das Differential du der unabhängigen Veränderlichen u . Während also bei einem überall endlichen Differentiale der Werth in Bezug auf den Zuwachs dx niemals von niederer Ordnung unendlich klein wird, findet ein gleiches Gesetz in Bezug auf den Zuwachs du nicht statt; denn sobald u eine Tangente der Curve ist, muss für den Berührungspunkt das Increment dx als von der *ersten* Ordnung unendlich klein gelten, sobald du eine unendlich kleine Grösse der *zweiten* Ordnung vorstellt.

Für eine der 24 *Wendetangenten* ist gleichzeitig $\Sigma = 0$ und $\mathbf{T} = 0$, und es verschwindet in diesem Falle sowohl der Coefficient von D^4 als auch der von D^2 , wodurch das Unendlichwerden von *drei* Differentialwerthen angezeigt ist. Bedeutet endlich u eine der 28 *Doppeltangenten* der Curve, so müssen sämmtliche vier Differentiale, welche paarweise zusammengehören, unendlich gross werden, die drei erster Coefficienten unserer Gleichung mithin verschwinden; und zwar unabhängig von bestimmten Werthen der Grössen ξ_i und η_i . Dass dieses in der That eintritt, wird folgendermassen ersichtlich: Wenn ξ_i und η_i zwei beliebige Punkte einer Doppeltangente bezeichnen, so stellt der Ausdruck: $a_{(\xi + \lambda \eta)}^4 = 0$ eine für λ biquadratische Form dar, für welche die Wurzeln paarweise zusammenfallen, deren Hesse'sche Form demnach bis auf einen constanten Factor mit der Fundamentalform selber übereinstimmt; das heisst, es ist:

$$\varrho \cdot a_{\xi}^4 = H_{\xi}^4, \quad \varrho \cdot a_{\eta}^4 = H_{\eta}^4, \quad \varrho \cdot a_{\xi}^3 a_{\eta} = H_{\xi}^3 H_{\eta} \text{ u. s. w. } (u = \hat{\xi} \eta)$$

Aus der im binären Systeme geltenden Beziehung*):

$$4(xy) T_x^3 T_y^3 = a_x^4 \cdot H_y^4 - a_y^4 \cdot H_x^4$$

geht nun für ternäre Formen, wenn $\xi = u \hat{d}u$, $\eta = u \hat{a}$, demnach $u_x = \frac{|\xi \eta x|}{|u \hat{d}u \alpha|}$ gesetzt wird, die Gleichung hervor:

$$(1) \quad 4(u \hat{d}u \alpha) T_\xi^3 T_\eta^3 = a_\xi^4 \cdot H_\eta^4 - a_\eta^4 \cdot H_\xi^4.$$

Setzt man in dieser Formel für η den Werth $\hat{b}u$, wobei b Symbole der Grundform bedeuten, so erhält man:

$$(2) \quad -4 b_\xi T_\xi^3 (T b u)^3 = T \cdot a_\xi^4 - \Sigma \cdot H_\xi^4.$$

Weil nun die Form (1) verschwindet, sobald ξ und η beliebige Punkte einer Doppeltangente bedeuten, so gilt das Nämliche auch für die Form (3), wodurch für diesen Fall das Verschwinden der drei ersten Coefficienten der Gleichung (1) nachgewiesen ist, welche besondere Werthe man auch für die auf u gelegenen Punkte ξ und η wählen mag.

Bleibt man bei der Voraussetzung, dass u eine Tangente der Curve darstellt, so scheint es, als ob jetzt das Verschwinden des zweiten Coefficienten zu jedem Punkte η zwei Drehpunkte ξ liefert, für welche noch ein dritter Differentialwerth im Verhältniss zu den Grössen du unendlich gross wird. Indessen ergibt sich leicht, dass unter der Bedingung: $\Sigma^3 - 6 T^2 = 0$ der Kegelschnitt, welcher bei variablen Werthen von ξ durch das Verschwinden des zweiten Coefficienten der Linie u zugeordnet wird, diese Linie tangirt, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem diese Linie von der Fundamentalcurve berührt wird. Denn es ist, wenn die Bedingung aufgestellt wird, dass die Linie $u_\xi = 0$ den Kegelschnitt:

$$T \cdot f_\xi^2 f_\eta^2 - \Sigma \cdot H_\xi^2 H_\eta^2 = 0$$

tangirt:

$$\begin{aligned} T^2 \cdot a_\eta^2 b_\eta^2 (a b u)^2 - 2 \Sigma \cdot T \cdot a_\eta^2 H_\eta^2 (a H u)^2 + \Sigma^2 \cdot H_\eta^2 H_\eta'^2 (H H' u)^2 \\ = H_\eta^4 (T^2 - \frac{1}{6} \Sigma^3), \end{aligned}$$

und diese Bedingung ist also erfüllt, sobald u eine Tangente der Fundamentalcurve wird. Die beiden vermeintlichen Punkte fallen mit dem Berührungspunkte zusammen, und da für diesen auch die beiden anderen Coefficienten verschwinden, so wird hierbei, wenn Drehpunkt und Berührungspunkt zusammenrücken, die ganze Gleichung illusorisch; die Wurzeln derselben sind unbestimmt, so lange man nicht auf die zweiten Differentiale: $d^2 u$ eingeht.

*) Clebsch: Theorie der binären Formen (p. 144).

Wird schliesslich der Coefficient des Gliedes, welches die erste Potenz von D enthält, gleich Null gesetzt:

$$T_{\xi}^3 T_{\eta}^3 = 0,$$

so gewinnt die biquadratische Gleichung eine durch Quadratwurzeln auflösbare Form. Mithin erhält man den Satz:

Auf jeder Geraden $u_x = 0$ sind bei gegebenen Werthen von α_x , d. h. sobald der Punkt $\eta = \hat{u}\alpha$ auf der Geraden bestimmt ist, noch immer drei Punkte ξ_i vorhanden, welche als Drehpunkte für die Linie u die Eigenschaft besitzen, dass von den vier Differentialen je zwei einander entgegengesetzt gleich werden. Diese drei Punkte bilden die cubische Polare des Punktes $\eta = \hat{u}\alpha$ in Bezug auf die zu den vier Schnittpunkten der Linie u_x mit der Fundamentalcurve gehörige Covariante sechster Ordnung.