SUI

SISTEMI LINEARI DI SUPERFICIE ALGEBRICHE

DOTATI DI SINGOLARITÀ BASE QUALUNQUE.

(Seduta del 27 febbrajo 1887)

Nota del dott. **G. B. Guccia**, a Palermo.

In questa breve Comunicazione mi propongo di far conoscere, pei sistemi lineari *qualunque* di superficie algebriche, un teorema (III) affatto analogo a quello da me enunciato pei sistemi lineari qualunque di curve algebriche piane (*Comptes Rendus*, t. CIII, p. 594 e questi *Rendiconti*, t. I, p. 155-156 e pag. 180). Sarà facile scorgere come la proprietà che io dimostro per lo spazio (ordinario) di tre dimensioni sia suscettibile di estensione agli spazi di un numero qualsivoglia di dimensioni.

In ciò che segue mi lascierò guidare dagli stessi criteri di cui mi sono già servito nelle precedenti ricerche del piano.

Definizioni.

1. Sia $[F]$ un sistema lineare *qualunque*, irreduttibile, di superficie algebriche d'ordine n, *completamente determinato dalla base*, tale, cioè, che la superficie generica F non soddisfi ad alcun' altra condizione oltre quelle assorbite dalle singolarità base (in particolare punti e curve semplici).

Per lo studio di un sistema $[F]$ introdurrò, per la prima volta, quattro numeri p_0, p_1, p_2, p_3, ognuno dei quali riveste il carattere *invariantivo* rispetto a qualsiasi trasformazione birazionale $[\mu, \nu]$ dello spazio. Cioè:

p_0, *le dimensioni del sistema*, ossia il numero dei parametri arbitrari da cui dipendono, linearmente, i coefficienti della superficie generica F.

p_1, *il genere del sistema*, ossia il *genere* della superficie generica F (*).

(*) La teoria, dovuta al Nöther, delle proprietà di una superficie algebrica qualunque $f = 0$, che rimangono inalterate per trasformazioni univoche (*eindeutige Transformationen*) della medesima, è fondata, com'è noto, sulla considerazione delle *superficie aggiunte d'ordine* $n - 4$, $\varphi_l = 0$. Queste superficie (così definite, geometricamente, e pel caso di singolarità ordinarie, che per esse le curve i-ple ed i punti l pli di f sono rispettivamente multipli secondo $i - 1$ ed $l - 2$) godono della singolare proprietà che in una corrispondenza univoca fra due superficie f, f', la curva *mobile* intersezione residua di f con una φ (aggiunta di f) si trasforma nella curva mobile intersezione residua di f' con una φ' (aggiunta di f'). Ora è appunto da siffatto carattere invariantivo delle $\varphi_l = 0$ che discendono le definizioni dei tre numeri p, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ introdotti dal Nöther per qualunque superficie algebrica $f = 0$; cioè: p, il genere (*Flächengeschlecht*) di f, che è il numero dei polinomi φ_l linearmente indipendenti; $p^{(1)}$, il genere della curva mobile intersezione residua di f con una qualunque delle φ (*Curvengeschlecht* di f); $p^{(2)}$, il numero dei punti mobili intersezione residua di f con due qualunque delle φ. Oltre la notevole relazione $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$, vi sono ancora delle funzioni di p e $p^{(1)}$, le quali provengono da condizioni di contatto di $f = 0$ con sistemi di superficie φ. Etc. (Nöther: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*, 2ter Aufsatz; *Math. Annalen*, t. VIII, p. 495, 1875. Pel numero p cfr. parimenti Clebsch, *Comptes Rendus*, 21 dicembre 1868, p. 1238 e Nöther, *Math. Annalen*, t. II, p. 293, 1870).

Per quanto concerne la definizione geometrica del genere della superficie faremo notare, col Nöther, che la formola $p = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - R$, dove R esprime la *postulazione* del sistema composto delle curve $(i-1)$-ple e dei punti $(l-2)$-pli rispetto alla superficie aggiunta $\varphi = 0$, può condurre a due numeri diversi secondo che si abbia, o pur no, riguardo alle modificazioni che subisce il valore R quando $n - 4$ non supera un certo limite. Per $p > 0$ le due definizioni conducono allo stesso numero. Fin da ora dichiariamo formalmente *che nei ragionamenti del testo intenderemo adottata la seconda definizione.*

Veggasi a tal riguardo quanto è esposto nei n^i 14 e 15 della Memoria del Nöther: *Sulle curve multiple di superficie algebriche* (*Annali di Matematica* V_2).

p_2, il *genere della curva mobile* M (variabile coi parametri del sistema): intersezione residua di *due* superficie F(*).

p_3, il numero dei punti mobili (m) (variabili coi parametri del sistema): intersezione residua di *tre* superficie F.

Pel caso particolare del sistema lineare costituito da tutte le superficie d'ordine n si ha:

$$p_0 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1, \; p_1 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3),$$
$$p_2 = n^2(n-2) + 1, \qquad p_3 = n^3.$$

2. Sopra una superficie qualunque F, di un sistema $[F]$, le curve gobbe M formano un sistema lineare $[M]$, definito, come per le curve piane, da tre numeri invariantivi k, p, D; cioè:

k, le dimensioni del sistema,

p, il genere del sistema, ovvero il genere della curva generica M,

D, il numero delle intersezioni mobili di due curve qualunque del sistema.

Nella specie si ha: $k = p_0 - 1$, $p = p_2$, $D = p_3$.

3. Analogamente, sopra una curva qualunque M, del sistema $[M]$, i gruppi di punti (m) formano una serie lineare ∞^{p_0-2} $[(m)]$ di gruppi (m) di p_3 punti: tale, cioè, che dati ad arbitrio, sopra M, $p_0 - 2$

(*) La definizione data dal Nöther per il *genere* di una curva gobba K intersezione residua di due superficie $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, degli ordini n_1, n_2, per le quali una curva C_i è rispettivamente multipla secondo i_1, i_2, un punto P_l è rispettivamente multiplo secondo l_1, l_2, ed un punto Q_ν è punto di contatto d'ordine $\nu - 1$, discende, in modo analogo, dalla considerazione delle *superficie aggiunte di ordine* $n_1 + n_2 - 4$, $\varphi_K = 0$, *della curva* K. Queste superficie sono così definite, geometricamente, e nell'ipotesi di singolarità ordinarie, che per esse: 1° ogni curva C_i è multipla secondo $i_1 + i_2 - 1$; 2° ogni punto P_l è di tale moltiplicità che in detto punto l'aggiunta φ_K ha $l_1 + l_2 - 2$ intersezioni riunite con ciascuno dei rami di K che passano per P_l; 3° ogni punto Q_ν è multiplo secondo $\nu - 1$. Si dimostra allora che in una corrispondenza univoca qualsiasi fra una curva gobba K ed una curva piana C (d'ordine m) gli s punti mobili, intersezione residua di K con una sua superficie aggiunta d'ordine $n_1 + n_2 - 4$, $\varphi_K = 0$, si trasformano nei punti mobili, intersezione residua di C con una sua curva aggiunta d'ordine $m - 3$, $\varphi_C = 0$. Cosicchè, detto p il genere di K e C, si ha $s = 2p - 2$ donde $p = \frac{1}{2}s + 1$.

punti, è completamente determinato il gruppo (m) a cui essi appartengono, e però i rimanenti punti il cui numero è $p_1 - p_0 + 2$.

4. È ovvio il far notare che la *base* di un sistema lineare $[F]$ può offrire le più svariate ipotesi: e per la natura delle *singolarità* delle curve e dei punti *multipli* (in particolare *semplici*) di cui è affetta la superficie generica F, e per la natura dei *legami* che possono intervenire fra questi enti fondamentali del sistema: singolarità e legami i quali hanno, per ogni singolo problema, particolare dipendenza con l'ordine del sistema.

Ciò premesso in termini generali, distingueremo, fin da ora, con la denominazione di *gruppo base ordinario* $(L)_n$ relativo ad una superficie generica F_n d'ordine n, qualunque sistema di curve e punti multipli base che possa essere compreso nelle ipotesi seguenti:

1° Delle curve i-ple (ordinarie) C_i, d'ordine m_i, di rango r_i, con k_{ii} punti doppi effettivi. In un punto qualunque di C_i gli i piani tangenti di F_n sono distinti e variabili coi parametri del sistema.

2° Dei punti l-pli (ordinari) P_l.

3° Dei punti semplici Q_v in ognuno dei quali due superficie qualunque del sistema si toccano secondo un contatto d'ordine $v - 1$.

4° Una curva C_i passa con j_{il} rami per un punto $P_l (i \equiv l)$. Il cono osculatore in P_l, ad F_n, non ha altre generatrici multiple ed è variabile coi parametri del sistema.

5° Due curve C_i, C_j hanno altri k_{ij} punti comuni $(i \equiv j)$.

6° Per le curve C_i ed i punti P_l e Q_v rimane *escluso* qualsiasi ulteriore legame che tenda a specializzare le superiori ipotesi.

7° L'ordine n di F_n a cui si riferisce il gruppo base ordinario $(L)_n$ *non è inferiore* ad un certo limite ε, imposto dalla condizione che pel gruppo $(L)_n$ relativo ad una superficie d'ordine n, e pel gruppo $(L')_{n-4}$ [in cui le curve C_i ed i punti P_l di $(L)_n$ sono considerati, rispettivamente, colle multiplicità $i - 1$ ed $l - 2$] relativo ad una superficie d'ordine $n - 4$, valgano, *senza modificazione alcuna*, le formole generali di *postulazione* date dal Nöther (*).

(*) *Sulle curve multiple di superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, V$_2$, capitolo II). Cfr. parimenti Cayley: *On the Rational Transformation between Two Spaces* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, III, 1870, p. 179).

Proprietà di un gruppo base ordinario $(L)_n$.

5. Un gruppo base ordinario $(L)_n$, dato ad arbitrio, e definito come al n° precedente, appartenga, successivamente, ad una, due, tre (linearmente indipendenti) superficie F_n d'ordine n.

Vogliamo allora considerare quattro numeri A_0, A_1, A_2, A_3, così definiti:

A_0, l'abbassamento prodotto dal gruppo $(L)_n$ nel numero

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1$$

delle costanti arbitrarie di una F_n, ossia la *postulazione* di $(L)_n$ rispetto ad F_n.

A_1, l'abbassamento prodotto dal gruppo $(L)_n$ nel genere

$$\tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

di una F_n. Questo numero vien dato, per definizione, dalla *postulazione* di $(L)'_{n-4}$ rispetto ad una superficie d'ordine $n-4$, aggiunta di F_n; dove $(L)'_{n-4}$ proviene da $(L)_n$ ponendo rispettivamente $i-1$ ed $l-2$ in luogo di i ed l.

A_2, l'abbassamento prodotto da $(L)_n$ nel genere $n^2(n-2)+1$ della curva comune a due F_n, ossia la differenza tra quest' ultimo numero ed il genere della curva M intersezione residua di due F_n dotate del gruppo $(L)_n$. Il numero A_2 vien dato, per definizione, dalla metà dell'*equivalenza* di $(L)_n$ rispetto a due F_n e ad una superficie di ordine $2n-4$ (aggiunta di M), per la quale ultima superficie le curve C_i, i punti P_l ed i punti Q_v di $(L)_n$ sono rispettivamente multipli secondo $2i-1$, $2l-2$ e $v-1$. (*)

(*) Nel numero A_2 sono comprese, come casi particolari, le formole $l^2(l-1)$ ed $\frac{1}{2}v(v-1)$ che esprimono, rispettivamente, gli abbassamenti prodotti da un punto P_l (ordinario, isolato) e da un punto Q_v, nel genere della curva intersezione di due superficie dotate dei punti P_l e Q_v. Questi due problemi furono trattati particolarmente dal prof. N. Salvatore-Dino in una Nota: *Sul genere delle curve gobbe (Rend. della R. Acc. di Napoli*, maggio 1879), ed il primo di essi nell'ipotesi, più generale, del punto ($l_1 l_2$)-plo di una curva gobba risultante dall' intersezione di due superficie per cui P_l è, rispettivamente, l_1-plo, l_2-plo. Ora egli è chiaro che queste formole, ed altre simili, discendono immediatamente dalla definizione di Nöther (*Math. Annalen*, VIII, 1875) delle superficie aggiunte di una curva gobba (vedi la nota della p. 340).

A_3, l' abbassamento prodotto da $(L)_n$ nel numero n^3 dei punti comuni a tre F_n, ossia l'*equivalenza* di $(L)_n$ rispetto a tre F_n.

Ciò posto, adoperando le formole generali di equivalenza e di postulazione (Nöther, loco citato, cap. I e II) si perviene immediatamente alle espressioni di A_0, A_1, A_2, A_3. Ne diamo, senz'altro, i risultati che seguono, dove: 1° la somma doppia $\sum_{ij}$ s' intenderà estesa a tutti i punti d' intersezione delle curve C_i prese due a due, eccetto quelli che cadono nei punti P_l, e a tutt' i punti doppi effettivi di ogni curva C_i; 2° la somma doppia $\sum_{il}$ s' intenderà estesa, dapprima a tutt' i rami delle curve C_i che passano per un punto P_l, e poscia a tutt' i punti P_l:

$$
\begin{aligned}
A_0 = &\sum_i \tfrac{1}{6} i(i+1) \left\{ (3n-2i+5) m_i - \tfrac{1}{2}(2i+1) r_i \right\} - \\
&- \sum_{ij} \tfrac{1}{6} i(i+1)(3j-i+1) k_{ij} + \\
&+ \sum_l \tfrac{1}{6} l(l+1)(l+2) - \\
&- \sum_{il} \tfrac{1}{6} i(i+1)(3l-2i+2) j_{il} + \\
&+ \sum_\nu \tfrac{1}{2} \nu(\nu+1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 = &\sum_i \tfrac{1}{6} i(i-1) \left\{ (3n-2i-5) m_i - \tfrac{1}{2}(2i-1) r_i \right\} - \\
&- \sum_{ij} \tfrac{1}{6} i(i-1)(3j-i-1) k_{ij} + \\
&+ \sum_l \tfrac{1}{6} l(l-1)(l-2) - \\
&- \sum_{il} \tfrac{1}{6} i(i-1)(3l-2i-2) j_{il}.
\end{aligned}
$$

$$A_2 = \sum_i \left\{ [i(2i-1)n + i^2(n-2)]\, m_i - i^2(2i-1)(m_i + \tfrac{1}{2} r_i) \right\} -$$

$$- \sum_{ij} \tfrac{1}{2} \left\{ i(2i-1)(2j-i) + i^2(2j-1) \right\} k_{ij} +$$

$$+ \sum_l l^2(l-1) -$$

$$- \sum_{il} \left\{ i(2i-1)(l-i) + i^2(l-1) \right\} j_{il} +$$

$$+ \sum_\nu \tfrac{1}{2} \nu(\nu-1).$$

$$A_3 = \sum_i i^2 \left\{ (3n-2i)\, m_i - i r_i \right\} -$$

$$- \sum_{ij} i^2(3j-i)\, k_{ij} +$$

$$+ \sum_l l^3 -$$

$$- \sum_{il} i^2(3l-2i)\, j_{il} +$$

$$+ \sum_\nu \nu^2.$$

Ora, siccome è facile verificare, si ha il seguente teorema:

TEOREMA I. — *Fra i numeri* A_0, A_1, A_2, A_3 *relativi ad un gruppo base ordinario* $(L)_n$, *dato ad arbitrio, e definito come al n° 4, esiste la relazione:*

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 = 0.$$

6. Sia $[F]$ un sistema lineare *qualunque*, irreduttibile, di superficie unicursali F d'ordine n, determinato dalla *base*, e definito (n° 1) dai numeri invariantivi p_0, $p_1 = 0$, p_2, p_3.

Supponiamo che il sistema $[F]$ sia tale, che, sulla superficie generica F, il sistema lineare $[M]$ di curve gobbe M, definito (n° 2) dai numeri invariantivi $k = p_0 - 1$, $p = p_2$, $D = p_3$, ammetta:

un sistema lineare subordinato di genere zero, ovvero,

un sistema lineare subordinato di genere uno e dimensioni > 1.

Poichè, per definizione, la superficie unicursale F è rappresentabile punto a punto sopra un piano imagine Π, ne segue che il sistema lineare $[M]$, di F, sarà rappresentato in Π da un sistema lineare di curve piane, *determinato dalle singolarità base*, definito dai numeri $k = p_0 - 1$, $p = p_2$, $D = p_3$, e tale che in esso è contenuto un sistema subordinato di genere zero, ovvero un sistema subordinato di genere uno e dimensioni > 1. Ora in tal caso, pel nostro teorema sui sistemi lineari di curve piane, si ha:

$$k + p - D - 1 = 0 \quad \text{ossia} \quad p_0 + p_2 - p_3 = 2.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

TEOREMA II. — *Se un sistema lineare qualunque $[F]$ di genere zero, determinato dalla base, è tale che sulla superficie generica F il sistema lilineare $[M]$ ammette un sistema lineare subordinato di genere zero, ovvero di genere uno e dimensioni > 1, allora fra i numeri invariantivi p_0, p_2, p_3, del sistema $[F]$, esiste la relazione:*

$$p_0 + p_2 - p_3 = 2.$$

7. Pel caso particolare dei sistemi *omaloidici* di Cremona (sistemi lineari ∞^3 di superficie unicursali, tali che tre superficie arbitrarie si segano in un sol punto mobile) il teorema precedente con-

duce immediatamente alla seguente proposizione, nota per altra via: *Ogni sistema omaloidico è completamente determinato dalla base.*

I SISTEMI LINEARI DI GENERE QUALUNQUE.

8. Sia $[F]$ un sistema lineare *qualunque*, irreduttibile, di superficie algebriche F d'ordine n, determinato dalla base e definito dai numeri invariantivi p_0, p_1, p_2, p_3.

Supponiamo che il sistema $[F]$ sia tale: che un gruppo base ordinario, qualunque, $(L)_n$, dato ad arbitrio e definito come al n° 4, possa determinare in $[F]$ un sistema lineare subordinato $[F']$ di genere zero, il quale soddisfi alla restrizione dell' enunciato II, cioè, che in $[F']$ il sistema lineare $[M']$ sopra la superficie generica F' ammetta un sistema subordinato di genere zero ovvero di genere uno e dimensioni > 1.

Ciò posto, indicando con p'_0, 0, p'_2, p'_3 i numeri invariantivi del sistema $[F']$ e con A_0, A_1, A_2, A_3 i numeri relativi al gruppo base $(L)_n$, definiti come al n° 5, si avrà evidentemente:

$$\begin{aligned} p'_0 &= p_0 - A_0 \\ 0 &= p_1 - A_1 \\ p'_2 &= p_2 - A_2 \\ p'_3 &= p_3 - A_3 \end{aligned}$$

d'onde:

$$p'_0 + p'_2 - p'_3 = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 - (A_0 - A_1 + A_2 - A_3).$$

Or siccome (I)

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 = 0,$$

e (II)

$$p'_0 + p'_2 - p'_3 = 2,$$

ne segue che

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 2.$$

Si ha quindi il seguente teorema generale:

Teorema III. — *Se un sistema lineare qualunque $[F]$, determinato dalla base, è tale che un gruppo base ordinario $(L)_n$, dato ad arbitrio, possa determinarvi un sistema subordinato $[F']$ di genere zero, il quale goda la proprietà che il sistema lineare $[M']$, sopra la superficie generica F', ammetta un sistema subordinato di genere zero, ovvero di genere uno e dimensioni > 1, allora fra i numeri invariantivi p_0, p_1, p_2, p_3, del sistema $[F]$, esiste la relazione:*

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 2.$$

Applicazioni.

9. In un sistema lineare qualunque $[F]$, determinato dalla base, e definito dai numeri invariantivi p_0, p_1, p_2, p_3, supponiamo, unicamente, $p_3 = 1$. Egli è evidente che in tal caso sarà $p_0 > 2$. Possiamo quindi assumere, in $[F]$, quattro superficie F_1, F_2, F_3, F_4 linearmente indipendenti. Se ora consideriamo, ad esempio, la curva M determinata da F_1, F_2 ed il fascio di superficie $(F_3\, F_4)$, egli è chiaro che ogni superficie di questo fascio incontrerà M in uno, ed un solo, punto mobile. Da cui ricavasi che la curva M è razionale; e però nel sistema $[F]$: $p_2 = 0$. Poichè ora la superficie generica F possiede sempre una serie ∞^1 di curve razionali situate ad una ad una sulle superficie d'un fascio, ne segue a dirittura, per un teorema di Nöther (*Math. Annalen,* III, p. 173) che la medesima è rappresentabile punto a punto sopra un piano; cioè $p_1 = 0$. Or essendo $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$, in virtù del teorema III (la cui restrizione nel caso attuale è soddisfatta) si ha $p_0 = 3$. Riassumendo: Posto $p_3 = 1$, ne segue, necessariamente, $p_0 = 3$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$; e però il sistema $[F]$ è *omaloidico.*

Supponiamo ora, se è possibile, che il sistema $[F]$, per cui $p_3 = 1$, non sia completamente determinato dalla base. Sia π_0 il numero delle sue dimensioni e θ il numero delle condizioni lineari cui soddisfa la superficie generica F oltre quelle assorbite dalla base. Sarà allora, medesimamente, $\pi_0 > 2$, e pel ragionamento precedente: $\pi_0 + \theta = 3$. Da cui ricavasi $\theta = 0$. Cioè: *un sistema lineare qualunque di superficie algebriche, tale che tre superficie arbitrarie si segano in un sol punto mobile, è, necessariamente, determinato dalla base.*

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

TEOREMA IV. — *La condizione* NECESSARIA *e* SUFFICIENTE *affinchè un sistema lineare qualunque irreduttibile di superficie algebriche sia un* SISTEMA OMALOIDICO, *è che tre superficie arbitrarie si seghino in un sol punto mobile.* (*)

10. Ci riserbiamo di far conoscere, in un altro lavoro, in che guisa il teorema III permette di estendere, a superficie dotate di singolarità qualunque, i teoremi di Jacobi (**) e di Reye (***) sulla curva, e sui punti, d'intersezione di due, e di tre, superficie generali.

Frattanto, a titolo d'esempio, indicando con (Γ) un *gruppo base qualunque* e con F_n, F'_n, ... delle superficie dotate del gruppo (Γ), linearmente indipendenti, *ed il cui ordine n non sia inferiore ad un certo limite ε imposto dalla condizione che il sistema lineare* $[F]$ *soddisfi alla restrizione dell'enunciato* III, si hanno immediatamente le seguenti proposizioni:

TEOREMA V. — *Delle* p_3 *intersezioni di tre superficie* F_n, F'_n, F''_n, $p_2 - p_1$ *sono conseguenza dei rimanenti* $p_1 - p_2 + p_3$.

TEOREMA VI. — *Ogni superficie* F_n *che passi per* $p_1 - p_2 + p_3 + 1$ *punti arbitrari della curva ulteriore intersezione di due superficie* F'_n, F''_n, *la contiene per intero.*

Pel caso particolare delle superficie *generali* d'ordine n si ritrovano i noti teoremi:

(*) Ragionando allo stesso modo si perviene, in virtù del teorema $k = D - p + 1$, alla proprietà analoga nel piano, cioè: *La condizione* NECESSARIA *e* SUFFICIENTE *affinchè un sistema lineare qualunque irreduttibile di curve algebriche piane sia una* RETE OMALOIDICA, *è che due curve arbitrarie s'incontrino in un sol punto mobile.*

(**) *De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum*, etc. (*Crelle's Journal*, XV, 1836, p. 285).

(***) *Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projectivische Erzeugung* (*Mathem. Annalen*, II, 1870, p. 475).

Le n^3 *intersezioni di tre superficie generali d' ordine* n *sono individuate da* $\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)-2$ *fra esse.*

Ogni superficie d' ordine n *che passi per* $\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)-1$ *punti arbitrari della curva comune a due superficie d' ordine* n*, la contiene per intero.*