Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume.

(Zweite Abhandlung.)

Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich.

Von

Ludwig Bieberbach in Königsberg i. Pr.

§ 1.

Einführung.

Dieser Aufsatz stellt die Fortsetzung meiner im 70. Bande dieser Annalen erschienenen Arbeit über die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume I dar. Die Ergebnisse dieser hat inzwischen Herr Frobenius in seiner in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1911 erschienenen Arbeit über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen auf eine vereinfachte Weise abgeleitet. Die folgenden Seiten beschäftigen sich ausschließlich mit solchen Bewegungsgruppen, welche einen endlichen Fundamentalbereich besitzen. Für diese gilt, wie ich bereits in einer in den Göttinger Nachrichten 1910 erschienenen Note angedeutet habe, und wie Herr Frobenius in der eben genannten Arbeit dargelegt hat, der Satz, daß es nur endlich viele derartige Gruppen gibt. Bewegung des n-dimensionalen euklidischen Raumes nannten wir eine reelle lineare Substitution von n Variabeln

$$x_i' = \sum_1^n {}_k\, a_{ik} x_k + A_i \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Dabei ist die durch Nullsetzen der A_i entstehende homogene lineare Substitution eine orthogonale Substitution, die wir mit Herrn Frobenius den rotativen Teil der Bewegung nennen wollen. Die Substitution

$$x_i' = x_i + A_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

stellt den Translationsteil der Bewegung dar. Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}$ den rotativen, mit $\mathfrak{T}$ den Translationsteil einer Bewegung $\mathfrak{B}$, so läßt sich diese im Sinne des Matrizenkalküls als Produkt $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\mathfrak{R}$ der beiden darstellen. Eine Bewegung, die mit ihrem rotativen Teile übereinstimmt, nennen wir Rotation; eine Bewegung, die mit ihrem Translationsteil übereinstimmt, Translation. Eine Gruppe aus solchen Bewegungen heißt Bewegungsgruppe. Die Forderung, daß diese Gruppe einen Fundamentalbereich besitzen soll, ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß sie keine infinitesimalen Operationen enthält. Dies stellten wir im § 6 der ersten Abhandlung fest. Jenachdem sich der Fundamentalbereich der Gruppe durchs Unendliche zieht oder nicht, kann man zwei Arten von Bewegungsgruppen unterscheiden. Die Gruppen mit einem unendlichen Fundamentalbereich sind immer zerlegbar, und es haben alle zerlegbaren Gruppen, sofern sie überhaupt einen solchen besitzen, einen unendlichen Fundamentalbereich. Dabei nannten wir eine Gruppe zerlegbar, wenn sie bei zweckmäßiger Wahl der Variabeln auf die Form

$$x_i' = \sum_{1}^{h} {}_k\, a_{ik}^{(\nu)} x_k \qquad (i = 1, \cdots, h)$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots)$$

$$x_\mu' = \sum_{h+1}^{n} {}_\tau\, a_{\mu\tau}^{(\nu)} x_\tau + A_\mu \qquad (\mu = h+1, \cdots, n)$$

gebracht werden konnte. Wir stellten weiter fest, daß die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich immer Translationen enthalten. Wie leicht zu sehen, bilden diese Translationen eine ausgezeichnete Untergruppe der Bewegungsgruppe. Denn ist $\mathfrak{T}$ eine Translation und $\mathfrak{B}$ eine beliebige Bewegung, so ist auch $\mathfrak{B}\mathfrak{T}\mathfrak{B}^{-1}$ eine Translation. Die Gruppe enthält, wenn anders der Fundamentalbereich endlich sein soll, n unabhängige Translationen, d. h. es gibt immer n Translationen

$$\mathfrak{T}_i \equiv x_i' = x_i + A_i^{(\nu)} \qquad (i, \nu = 1, \cdots, n)$$

in der Gruppe, sodaß es keine Zahlen $a_1, \cdots, a_n$ gibt, für die die folgenden Relationen gelten:

$$\sum_{1}^{n} {}_\nu\, a_\nu A_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

(Math. Ann. 70, S. 333). Diese Ergebnisse der ersten Arbeit bilden die Grundlage des folgenden.

Zwei Bewegungsgruppen gelten als verschieden, wenn sie nicht äquivalent sind. Dabei heißen zwei Gruppen äquivalent, wenn sie durch eine lineare Änderung der Variabeln auseinander hervorgehen.

Dann gilt, wie wir darlegen wollen, der Satz, *daß es nur endlich viele verschiedene Bewegungsgruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich gibt.* Auf diese Gleichheitsdefinition wird man schon in der Krystallographie geführt und in dieser Form hat auch Herr Frobenius den Satz bewiesen. Ich selbst hatte in meiner Mitteilung in den Göttinger Nachrichten zwei Gruppen gleich genannt, wenn sie isomorph sind. Dies ist aber in der Tat genau das Gleiche. Denn es gilt der Satz (was ich allerdings damals nicht angab), daß im Sinne der angegebenen Definition *zwei isomorphe Bewegungsgruppen immer gleich* sind.

Unser Beweis beruht auf Methoden, die unter Weiterbildung der Ideen, welche Gauß und Dirichlet in der Theorie der ternären Formen benutzten, Minkowski zuerst in der Theorie der positiven quadratischen Formen von n Variabeln verwendet hat. Um eine in sich geschlossene Darstellung geben zu können, sowie um die nahe Beziehung der Untersuchung zur erwähnten Theorie Minkowskis deutlicher hervortreten zu lassen, werden wir an einigen Stellen längst bekannte Dinge dieser Art erneut auseinandersetzen müssen. Den Gedankengang des Beweises habe ich Gött. Nachr. 1910 angedeutet.

§ 2.

Die Translationsuntergruppe.

Wie wir gesehen haben, gibt es in der ausgezeichneten Translationsuntergruppe immer n unabhängige Translationen. Seien solche z. B.

$$\mathfrak{A}_i \equiv x_k' = x_k + A_k^{(i)} \qquad (k, i = 1, \cdots, n),$$

so gibt es also keine Zahlen $a_1, \cdots, a_n$, sodaß die folgenden Relationen bestehen:

$$\sum_1^n {}^i\, a_i A_k^{(i)} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n).$$

Translationsgruppen dieser Art erhält man offenbar, wenn man irgend welche n unabhängige Translationen $\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_n$ nimmt und aus ihnen durch beliebige Kombination eine Gruppe bildet. Aber wir wollen uns nun überzeugen, daß man in jeder unserer Translationsuntergruppen immer n unabhängige Translationen $\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_n$ finden kann, aus welchen sich die Gruppe in dieser Weise erzeugen läßt, sodaß sich also jede andere Translation $\mathfrak{T}$ in der Form

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1^{t_1} \cdots \mathfrak{T}_n^{t_n}$$

schreiben läßt, wo die $t_1, \cdots, t_n$ ganze Zahlen sind. Dies kann man (cf. z. B. Minkowski Geometrie der Zahlen, S. 172 ff.) so einsehen. Seien zunächst $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ irgendwelche n unabhängige Translationen der Gruppe, so lassen sich die Komponenten $T_1, \cdots, T_n$ jeder Translation $\mathfrak{T}$ so darstellen:

$$T_i = t_1 A_i^{(1)} + t_2 A_i^{(2)} + \cdots + t_n A_i^{(n)} \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Wir schreiben symbolisch:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A}_1^{t_1} \mathfrak{A}_2^{t_2} \cdots \mathfrak{A}_n^{t_n}.$$

Hier sind die t_i im allgemeinen keine ganzen Zahlen. Dies ist nur dann der Fall, wenn die $\mathfrak{A}_i$ Erzeugende der Gruppe sind. Wir nennen nun von zwei Translationen

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{A}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{A}_n^{a_n}$$

und

$$\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{A}_1^{b_1} \cdots \mathfrak{A}_n^{b_n}$$

die erste niedriger als die zweite, wenn die erste nicht verschwindende der Differenzen $a_n - b_n$, $a_{n-1} - b_{n-1}$, $\cdots$, $a_1 - b_1$ negativ ist. Wir betrachten weiter die Gesamtheit aller Translationen $\mathfrak{T}$ der Gruppe, für die in der Darstellung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A}_1^{t_1} \cdots \mathfrak{A}_n^{t_n}$$

alle Zahlen $t_1, \cdots, t_n$ positiv und kleiner oder gleich 1 sind. Es gibt mindestens n solcher Translationen, denn die $\mathfrak{A}_i$ selbst gehören dazu. Es gibt aber nur endlich viele solcher Translationen, da sonst infinitesimale Operationen in der Gruppe vorkämen. Unter diesen Translationen gibt es daher eine niedrigste. Wir nennen sie $\mathfrak{T}_1$. Sie ist notwendig von der Form $\mathfrak{A}_1^{t_{11}}$. Unter allen angegebenen Translationen, die nicht von der Form $\mathfrak{A}_1^{a_1}$ sind, gibt es nun wieder eine niedrigste. Wir nennen sie $\mathfrak{T}_2$. Sie ist notwendig von der Form $\mathfrak{A}_1^{t_{12}} \mathfrak{A}_2^{t_{22}}$. Unter allen Translationen, die nicht von der Form $\mathfrak{A}_1^{a_1} \mathfrak{A}_2^{a_2}$ sind, gibt es nun wieder eine niedrigste. Wir nennen sie T_3. Sie ist notwendig von der Form $\mathfrak{A}_1^{t_{13}} \mathfrak{A}_2^{t_{23}} \mathfrak{A}_3^{t_{33}}$. So fortfahrend erhalten wir ersichtlich n voneinander unabhängige Translationen:

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{A}_1^{t_{11}}; \quad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{A}_1^{t_{12}} \mathfrak{A}_2^{t_{22}}; \cdots; \quad \mathfrak{T}_n = \mathfrak{A}_1^{t_{1n}} \cdots \mathfrak{A}_n^{t_{nn}}.$$

Aus ihnen läßt sich aber nun jede andere Translation

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1^{b_1} \cdots \mathfrak{A}_n^{b_n}$$

in der Form $\mathfrak{T}_1^{\beta_1} \cdots \mathfrak{T}_n^{\beta_n}$ darstellen, wo aber nun die $\beta_1, \cdots, \beta_n$ ganze Zahlen sind. Denn man kann jedenfalls die ganzen Zahlen $\beta_1, \cdots, \beta_n$ so bestimmen, daß in

$$\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{T}_1^{-\beta_1} \cdots \mathfrak{T}_n^{-\beta_n} = \mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1^{c_1} \mathfrak{A}_2^{c_2} \cdots \mathfrak{A}_n^{c_n},$$

wo

$$c_1 = b_1 - \beta_1 t_{11}, \; c_2 = b_2 - \beta_1 t_{12} - \beta_2 t_{22}, \cdots, c_n = b_n - \beta_1 t_{1n} - \cdots - \beta_n t_{nn}$$

die Zahl c_1 kleiner ist als die entsprechende Zahl t_{11} in $\mathfrak{T}_1$, daß c_2 kleiner ist als die entsprechende Zahl t_{22} in $\mathfrak{T}_2$, daß endlich die Zahl c_n kleiner ist als die entsprechende Zahl t_{nn} in $\mathfrak{T}_n$. Diese Translation $\mathfrak{C}$ ist daher niedriger als $\mathfrak{T}_n$ und daher ist $c_n = 0$, sie ist niedriger als $\mathfrak{T}_{n-1}$ und daher ist $c_{n-1} = 0$, sie ist endlich niedriger als $\mathfrak{T}_1$ und daher ist $c_1 = 0$. Sie ist somit die Identität und also ist jede Translation $\mathfrak{B}$ der Gruppe in der Form

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{T}_1^{\beta_1} \cdots \mathfrak{T}_n^{\beta_n}$$

mit ganzzahligen β_i darstellbar.

Damit haben wir n erzeugende Translationen in der Gruppe ausfindig gemacht. Diese sind nicht die einzigen dieser Art. Denn wenn $\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_n$ erzeugende Translationen sind, so sind auch die n Translationen

$$\mathfrak{T}_i' = \mathfrak{T}_1^{c_{1i}} \cdots \mathfrak{T}_n^{c_{ni}},$$

wenn die Determinante der ganzzahligen c_{ik} gleich ± 1 ist, bekanntlich erzeugende Translationen, und umgekehrt läßt sich jedes System erzeugender Translationen in dieser Weise aus irgend einem anderen gewinnen.

Man kann sich die n Translationen $\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_n$ vom Koordinatenanfangspunkt aus als Vektoren abgetragen denken und diese Vektoren als Einheitsstrecken eines neuen schiefwinkligen Koordinatensystems einführen, oder analytisch, man kann, wenn

$$\mathfrak{T}_i \equiv x_k' = x_k + A_k^{(i)} \qquad (i, k = 1, \cdots, n)$$

die n Translationen sind, durch

$$x_i = \sum_r^n {}_k A_i^{(k)} \xi_k \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

die neuen Variabeln ξ_i einführen. Deutet man dann in diesem neuen Koordinatensystem die Translationen der Gruppe alle als Vektoren, so macht die Gesamtheit der Endpunkte dieser Vektoren gerade die Gesamtheit der Punkte aus, die im neuen Koordinatensystem ganzzahlige Koordinaten haben; oder analytisch, wenn man durch die angegebene Substitution neue Variable einführt, so schreiben sich die Translationen in den neuen Variabeln wieder in der Form

$$\xi_k' = \xi_k + A_k^{(i)} \qquad (i, k = 1, \cdots, n).$$

Die Koeffizienten $A_k^{(i)}$ sind aber nun ganze Zahlen. Insbesondere werden die n erzeugenden Translationen, die wir zur Einführung der ξ benützten:

$$\xi_k' = \xi_k + A_k^{(i)} \quad \left(A_k^{(i)} = \begin{Bmatrix} 1 & i = k \\ 0 & i \gtrless k \end{Bmatrix} \ (i, 2 = 1 \cdots n) \right).$$

Die oben genannten unimodularen ganzzahligen Substitutionen (ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1), die die verschiedenen Systeme erzeugender Translationen miteinander verbinden, vermitteln nun auch den Übergang zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen, in welchen sich die Translationen in *dieser* Weise mit ganzzahligen Koeffizienten schreiben lassen.

(Die Gesamtheit der ganzzahligen Punkte in einem gewissen Koordinatensystem nennt man Gitter. Die Figur des Gitters ist es, die der Minkowskischen Theorie der quadratischen Formen ihr durchsichtiges Gepräge verleiht. Auf diese Figur werden wir auch bei den Translationsgruppen geführt. Darauf beruht geometrisch der nahe Zusammenhang. Man hat nur nötig, in bezug auf eines unserer schiefwinkligen Koordinatensysteme, in welchen sich die Translationsgruppe ganzzahlig schreibt, den analytischen Ausdruck des Quadrates der Entfernung aufzustellen; dann erhält man eine der unendlich vielen dergestalt zu unserem Gitter gehörigen positiven quadratischen Formen. Da die Übergänge zwischen den verschiedenen Koordinatensystemen durch unimodulare ganzzahlige Substitutionen vermittelt werden, so gehen alle diese quadratischen Formen durch unimodulare ganzzahlige Transformationen ihrer Variabeln auseinander hervor.)

§ 3.

Die Gruppe der rotativen Teile.

Unter dem rotativen Teile einer Bewegung

$$x_i' = \sum_1^n{}^k b_{ik} x_k + B_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

verstehen wir die orthogonale Substitution

$$x_i' = \sum_1^n{}^k b_{ik} x_k \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Es ist leicht zu sehen, daß die rotativen Teile der Bewegungen einer Bewegungsgruppe selbst unter sich eine Gruppe bilden, welche mit jener Bewegungsgruppe mehrstufig isomorph ist. Diese Gruppe der rotativen Teile ist, wie wir jetzt zeigen wollen, eine endliche Gruppe. Um das einzusehen, beziehen wir die ganze Bewegungsgruppe und also auch die Gruppe der rotativen Teile auf eines der im vorigen Paragraphen erwähnten schiefwinkligen Koordinatensysteme, die dadurch charakterisiert waren, daß die darauf bezogenen Translationen ganzzahlige Substitutionen waren. Hat man solcherart neue Variable eingeführt, so erhalten nun auch die *rotativen Teile ganzzahlige Koeffizienten.* Dies folgt daraus, daß für jede Bewegung B mit dem rotativen Teile B' zugleich mit irgend einer Translation $\mathfrak{T}$ auch $B\mathfrak{T}B^{-1} = B'\mathfrak{T}(B')^{-1}$ eine Translation der Gruppe ist. Wendet man dies inbesondere auf eine der erzeugenden Translationen $\mathfrak{T}_i$

an, bei welchen nur eine Komponente von Null verschieden und zwar gleich 1 ist, z. B. auf

$$\mathfrak{T}_i \equiv x_i' = x_i + 1, \qquad x_k' = x_k, \qquad (k \gtrless i)$$

so wird für den rotativen Teil

$$B' \equiv x_i' = \sum_1^n {}_k\, b_{ik} x_k \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

die Translation

$$B \mathfrak{T} B^{-1} \equiv x_k' = x_k + b_{ki} \qquad (k = 1, \cdots, n).$$

Die Komponenten dieser Translation müssen aber ganze Zahlen sein. Das heißt aber, daß die Koeffizienten in der i^{ten} Kolonne des rotativen Teiles und also auch in allen Kolonnen ganze Zahlen sind. Die Determinante dieser ganzzahligen Substitution ist übrigens ± 1, weil sie durch Änderung der Variabeln aus einer orthogonalen Substitution hervorging. Die ganzzahlige Gruppe der rotativen Teile läßt nun aber eine positive quadratische Form invariant, eben weil sie durch Änderung der Variabeln aus einer Gruppe hervorging, für die das der Fall ist, nämlich aus einer Gruppe orthogonaler Substitutionen, für die die Quadratsumme der Variabeln invariant ist. (Geometrisch würde man sagen: da die rotativen Teile Bewegungen darstellen, müssen sie die quadratische Form, die der analytische Ausdruck der Entfernung ist, bezogen auf das schiefwinklige Koordinatensystem, invariant lassen.) Daraus, daß die ganzzahlige Gruppe der rotativen Teile eine positive quadratische Form fest läßt, folgt nach einem bekannten Satze *die Endlichkeit dieser Gruppe*; ja man kann sogar eine nur von der Variabelnzahl abhängige obere Grenze für die Ordnung dieser Gruppe angeben.

Der Vollständigkeit halber wollen wir in geometrischem Gewande den Grundgedanken nach einen Beweis dieses Satzes skizzieren (obwohl wir uns dazu auch auf den in § 4 heranzuziehenden Satz berufen könnten) (cf dazu Minkowski, Geometrie der Zahlen, S. 176 ff.). Durch die Drehungen der Gruppe der rotativen Teile gehen aus einem ersten System von n erzeugenden Translationen der Translationsuntergruppe weitere solche Systeme erzeugender Translationen hervor. Sei l die größte unter den $\mathfrak{T}_1, \cdots, \mathfrak{T}_n$ vorkommende Länge. Dann sind alle Translationen, die dergestalt durch die Drehungen aus den $\mathfrak{T}_i$ hervorgehen, kürzer als l. Es gibt aber sicher nur endlich viele verschiedene Translationen, die kürzer sind als l (da es sonst infinitesimale Operationen in der Gruppe gäbe). Diese endlich vielen Translationen kann man nur auf endlich viele verschiedene Weisen zu Systemen von n Erzeugenden zusammenfassen. Da die Substitution, die den Übergang zwischen zwei solchen erzeugenden Systemen, bez. den zugehörigen Koordinatensystemen vermittelt, durch die beiden völlig bestimmt ist, so kommen für die rotativen Teile nur endlich viele Substitutionen in Betracht. Die Gruppe der rotativen Teile ist also endlich.

Um auch die Existenz einer nur von n abhängenden Grenze für die Ordnung dieser Gruppe zu erkennen, legt man zweckmäßig statt des eben benutzten Systems von n erzeugenden Translationen ein anders gewähltes System von n unabhängigen Translationen zugrunde. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{T}_1$ die kürzeste in der Gruppe vorhandene Translation, mit $\mathfrak{T}_2$ die kürzeste, die nicht in der Form $\mathfrak{T}_1^a$ darstellbar ist, mit $\mathfrak{T}_3$ die kürzeste nicht in der Form $\mathfrak{T}_1^{a_1}\mathfrak{T}_2^{a_2}$ darstellbare, $\cdots$ mit $\mathfrak{T}_n$ die kürzeste nicht in der Form $\mathfrak{T}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{T}_{n-1}^{a_{n-1}}$ darstellbare Translation der Gruppe. (Dabei brauchen die Zahlen a_i keine ganzen Zahlen zu sein, weil ja auch das so ausgewählte System von Translationen kein System von erzeugenden Translationen zu sein braucht.) Durch die Drehungen der rotativen Teile gehen aus diesem System von Translationen nur endlich viele weitere hervor und wie oben könnten wir auf die Endlichkeit der Gruppe der rotativen Teile schließen. Aber jetzt gelingt es auch zu zeigen, daß die Zahl der Translationen, die man durch Drehung aus diesen n erhalten kann, eine nur von n abhängige Grenze nicht überschreiten kann, und damit diese Tatsache auch für die Ordnung der Gruppe der rotativen Teile zu erkennen. Denn aus dem kürzesten $\mathfrak{T}_1$ werden sicher endlich viele Translationen, deren Zahl eine von n abhängende Grenze nicht überschreitet; denn sei l_1 die Länge von $\mathfrak{T}_1$, so endigen alle Translationen, die man daraus durch Drehungen ableiten kann, auf einer Kugel vom Radius l_1; sie bilden da ein Punktsystem, in dem keine zwei Punkte um weniger als l_1 voneinander entfernt sind. Ihre Zahl ist also kleiner als eine gewisse nur von n abhängende Zahl $s(=(2\sqrt{n}+1)^n)$. Sei nun l_2 die Länge von $\mathfrak{T}_2$, so endigen alle Translationen, die man aus $\mathfrak{T}_2$ durch die Drehungen erhalten kann, auf einer Kugel vom Radius l_2; sie bilden darauf ein Punktsystem, sodaß sich in der Entfernung l_1 von einem jeden seiner Punkte sicher immer höchstens s weitere Punkte des Systems finden. Daraus folgt, daß die Zahl dieser Punkte höchstens s^2 ist. Diesen Schluß kann man für alle nacheinander wiederholen und daraus den Satz ableiten. Dies ist der einfache Grundgedanke, den Minkowski, allerdings ohne ihn anzugeben, in einer etwas anderen Weise verwertet, die den Vorteil bietet, schärfere Resultate zu liefern. Er betrachtet dabei die Reste der Koordinaten der eben angeführten in Betracht kommenden Gitterpunkte in bezug auf ein passend gewähltes Koordinatensystem nach dem Modul 2. Es zeigt sich dabei, daß diese Restsysteme alle voneinander verschieden sind. Dies liefert ersichtlich die bekannte Grenze $(2^{n+1}-2)^n$ für die Ordnung der Gruppe der rotativen Teile.

§ 4.
Ansatz zum Endlichkeitsbeweise.

Gestützt auf die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Paragraphen wollen wir nun zunächst zeigen, daß zwei isomorphe Bewegungsgruppen immer durch eine passende Änderung der Variabeln auseinander hervorgehen. Wenn also $A_1, A_2, \cdots$ die Bewegungen einer ersten Bewegungsgruppe und $B_1, B_2, \cdots$ die Bewegungen einer zweiten Gruppe sind, sodaß immer zwei Bewegungen, die einander bei dem Isomorphismus entsprechen, den gleichen Index tragen, so wollen wir zeigen, daß es immer eine vom Index i unabhängige Substitution S gibt, sodaß für alle Indices i zugleich $SA_iS^{-1} = B_i$ ist. Um das einzusehen, bemerken wir zunächst, daß bei der isomorphen Zuordnung notwendig den *Translationen der einen* Gruppe die *Translationen der anderen* entsprechen. Denn jedenfalls muß einer Translation A der ersten Gruppe eine Bewegung B der zweiten entsprechen derart, daß alle $B_iBB_i^{-1}$ mit B vertauschbar sind. Nehmen wir für die B_i z. B. n unabhängige Translationen, so folgt daraus schon nach Überlegungen, die wir im ersten Teile dieser Arbeit mehrfach angestellt haben (vgl. z. B. § 5 daselbst), daß B eine Translation ist. Da also nun bei dem Isomorphismus die Translationsuntergruppen einander entsprechen, so wählen wir in beiden Gruppen auf Grund der Ergebnisse der beiden vorausgegangenen Paragraphen die Variabeln so, daß die Translationen ganzzahlige Substitutionen werden, und daß entsprechende Translationen beider Gruppen identisch ausfallen. Wir haben dazu nur nötig, in beiden Gruppen entsprechende Systeme von n erzeugenden Translationen als Einheitsstrecken der neuen Koordinatensysteme einzuführen. Wenn wir das tun, so werden nun aber auch die nunmehr ganzzahligen rotativen Teile von irgend zwei entsprechenden Bewegungen beider Gruppen identisch. Denn seien

$$A \equiv x_i' = \sum_1^n {}^k a_{ik} x_k + A_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

und

$$B \equiv x_i' = \sum_1^n {}^k b_{ik} x_k + B_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

zwei zugeordnete Bewegungen der beiden Gruppen und $\mathfrak{T}_i$ die in beiden Gruppen vorkommende erzeugende Translation

$$\mathfrak{T}_i \equiv x_i' = x_i + 1; \quad x_k' = x_k \qquad (i \gtrless k),$$

so sind

$$x_k' = x_k + a_{ik} \qquad (i, k = 1, \cdots, n)$$

und

$$x_k' = x_k + b_{ik} \qquad (i, k = 1, \cdots, n)$$

nun auch zugeordnete Translationen und müssen daher identisch sein; das bedeutet aber Übereinstimmung der i^{ten} Kolonnen der rotativen Teile beider Bewegungen; da dieser Schluß für alle Kolonnen gilt, so folgt daraus die Übereinstimmung der rotativen Teile irgend zweier zugeordneter Bewegungen. Seien nun also

$$\mathfrak{A}_h \equiv x_i' = \sum_1^n {}^k a_{ik}^{(h)} x_k + A_i^{(h)} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

und

$$\mathfrak{B}_h \equiv x_i' = \sum_1^n {}^k a_{ik}^{(h)} x_k + B_i^{(h)}$$

die Bewegungen der beiden Gruppen, so bilden wir die Bewegungen

$$\mathfrak{C}_h \equiv x_i' = \sum_1^n {}^k a_{ik}^{(h)} x_k + A_i^{(h)} - B_i^{(h)}.$$

Diese bilden nun ersichtlich selbst wieder eine Gruppe. Diese Bewegungsgruppe ist aber nun, da nur endlich viele verschiedene rotative Teile vorkommen und da die Gruppe keine Translationen enthält, eine endliche Gruppe. (Sind nämlich $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei Bewegungen unserer Gruppe mit übereinstimmendem rotativen Teile, so ist $\mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{C}_2$ eine Translation und daher, da keine Translationen in der Gruppe vorkommen, die Identität.) Dann gibt es aber nach einem Satze von Maschke (vgl. auch die Überlegungen in § 9 des ersten Teiles dieser Abhandlung) eine Translation

$$\mathfrak{T} \equiv x_i' = x_i + T_i,$$

sodaß $\mathfrak{T}\mathfrak{C}_h\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{D}_h$ die folgende homogene Substitution wird:

$$\mathfrak{D}_h \equiv x_i' = \sum_1^n {}^k a_{ik}^{(h)} x_k.$$

Üben wir nun diese Translation $\mathfrak{T}$ noch auf die Bewegungsgruppe $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots$ aus, sodaß wir also eine aus den Bewegungen $\mathfrak{T}\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}^{-1}$, $\mathfrak{T}\mathfrak{A}_2\mathfrak{T}^{-1}, \cdots$ bestehende Gruppe erhalten, so werden die dann einander entsprechenden Bewegungen $\mathfrak{T}\mathfrak{A}_h\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{A}_h'$ und $\mathfrak{B}_h$ vollends identisch. Denn es wird

$$\mathfrak{A}_h' = x_i' = \sum_1^n {}^k a_{ik}^{(h)} x_k + A_i',$$

wobei

$$A_i' = T_i - \sum_1^n {}^k a_{ik} T_k + A_i,$$

und es wird

$$\mathfrak{D}_h \equiv x_i' = \sum_1^n {}_k\, a_{ik}^{(h)} x_k + D_i,$$

wobei

$$D_i = T_i = \sum_1^n {}_k\, a_{ik} T_k + A_i - B_i.$$

Hier ist aber $D_i = 0$. Also $A_i' = B_i$. Und das ist gerade unsere Behauptung.

Isomorphe Bewegungsgruppen gehen also durch eine passende Änderung der Variabeln auseinander hervor. Um also zu beweisen, wie wir es im § 1 in Aussicht nahmen, daß es nur endlich viele Bewegungsgruppen gibt, die nicht durch solche Variabelnänderungen auseinander hervorgehen, brauchen wir jetzt nur noch zu beweisen, *daß es nur endlich viele nicht isomorphe Bewegungsgruppen gibt.*

Zu diesem Zwecke nehmen wir fortan die Variabeln so gewählt an, daß die Translationen ganzzahlige Substitutionen werden, und daß die rotativen Teile ganzzahlige Koeffizienten erhalten. Dies kann in jeder Gruppe auf verschiedene Weise erreicht werden, je nach dem System erzeugender Translationen, welches man zur Einführung des schiefwinkligen Koordinatensystems benutzt. Bei diesen verschiedenen Möglichkeiten gehen die jeweiligen Gruppen der rotativen Teile dadurch auseinander hervor, daß man durch passende unimodulare ganzzahlige Substitutionen neue Variabeln einführt (vgl. § 2, 3). Wenn somit zwei Bewegungsgruppen isomorph sein sollen, so müssen die Gruppen der rotativen Teile durch Transformation mit einer unimodularen ganzzahligen Substitution auseinander hervorgehen, weil sie ja, wie wir gerade vorher gesehen haben, bei passender Wahl des schiefwinkligen Koordinatensystems identisch werden. Wenn wir also zeigen wollen, daß es nur endlich viele nicht isomorphe Bewegungsgruppen gibt, so werden wir zunächst zeigen müssen, daß es nur endlich viele verschiedene endliche Gruppen ganzzahliger Substitutionen in n Variabeln gibt, die nicht durch eine unimodular ganzzahlige Transformation der Variabeln auseinander hervorgehen. (Man überzeugt sich nämlich leicht, daß jede beliebige endliche Gruppe ganzzahliger Substitutionen als Gruppe der rotativen Teile einer passenden Bewegungsgruppe auftreten kann.) Dies ist der Inhalt eines tief liegenden Satzes, der in der Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen bewiesen wird.

Den in Rede stehenden Satz hat C. Jordan*) entdeckt und ihn mit Hilfe einer von Korkine und Zolotareff herrührenden Reduktionsmethode

*) In dem ersten Teile dieser Arbeit habe ich diesen Satz irrtümlicherweise Minkowski zugeschrieben. Ich stelle das hiermit richtig.

bewiesen*). Einen weiteren dem Jordanschen nahestehenden Beweis gab Minkowski**) auf Grund der von ihm verbesserten Hermiteschen Reduktionsmethode. Einen dritten Beweis veröffentliche ich eben in den Göttinger Nachrichten ebenfalls auf Grund der Minkowskischen Reduktionstheorie***). Es würde indessen zu weit führen, wenn wir diese Beweise hier auseinander setzen wollten. Wir müssen dafür auf die angeführten Arbeiten verweisen, sowie auf eine in einiger Zeit in diesen Annalen erscheinende Arbeit über Reduktion der quadratischen Formen, die der Verfasser zusammen mit Herrn I. Schur veröffentlichen wird.

§ 5.

Durchführung des Endlichkeitsbeweises.

Wir fassen zunächst noch einmal zusammen, wieweit unser Endlichkeitsbeweis jetzt gediehen ist. Wenn wir die Bewegungsgruppen auf passende schiefwinklige Koordinatensysteme beziehen, so kennen wir zunächst ein für allemal die Translationsuntergruppe; es ist die aus den n Translationen

$$\mathfrak{T}_i \equiv x_i' = x_i + 1; \quad x_k' = x_k \qquad (i \gtrless k)$$

erzeugte Gruppe. Des weiteren wissen wir nach dem vorigen Paragraphen, daß für die Gruppen der rotativen Teile nur endlich viele verschiedene Möglichkeiten in Frage kommen. Aber über die Translationsbestandteile derjenigen Bewegungen, welche nicht selbst Translationen sind, wissen wir noch nichts. Wir werden also nun alle Bewegungsgruppen, die in den Gruppen der rotativen Teile übereinstimmen, in eine (von endlich vielen) Klassen zusammenfassen und dann zeigen, daß auch für die Translationsteile der einzelnen Bewegungen nur endlich viele Möglichkeiten bleiben. Zwei Gruppen sind dabei nach § 4 als gleich anzusehen, wenn sie isomorph sind. Dann kann man folgendermaßen†) schließen.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Bewegung und $\mathfrak{T}$ eine Translation der Gruppe, so haben alle Bewegungen $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$ den gleichen rotativen Teil, und umgekehrt gehen alle Bewegungen mit gleichem rotativen Teil auf diese Weise auseinander hervor. Wir fassen sie in eine von endlich vielen Klassen $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B}$ von Be-

*) C. Jordan, Journal de l'École Polytechnique cah. 48.

**) Minkowski: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. J. f. Math. 129.

***) Bieberbach: Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen. Gött. Nachr. 1912.

†) Auf eine ein wenig andere, vielleicht auch etwas einfachere Weise führt Herr Frobenius in der erwähnten Arbeit den Beweis. Der Hauptunterschied besteht darin, daß Herr Frobenius zunächst die in den Translationsteilen noch vorhandene Willkür durch eine passende Wahl des Koordinatensystems aufhebt und alsdann statt des hier vorgetragenen Schlusses eine Rechnung mit Kongruenzen benutzt.

wegungen zusammen. Durch passende Wahl von $\mathfrak{T}$ kann man immer erreichen, daß in der Bewegung

$$\mathfrak{T}\mathfrak{B} \equiv x_i' = \sum_1^n {}_k b_{ik} x_k + B_i$$

alle $0 \leqq B_i < 1$. Es gibt in jeder Klasse $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$ von Bewegungen gerade eine solche Bewegung. Wir nennen sie die *reduzierte* Bewegung der Klasse. Sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zwei reduzierte Bewegungen, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ das Produkt der beiden und $\mathfrak{B}_3$ die reduzierte Bewegung der Klasse $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, so ist also bei passender Wahl von $\mathfrak{T}$: $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{T}\mathfrak{B}_3$. Wir zeigen, daß bei gegebenen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ für $\mathfrak{T}$ nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht kommen. Es seien nämlich b_1 und b_2 die rotativen Teile von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, also $\mathfrak{B}_1 = t_1 b_1$ und $\mathfrak{B}_2 = t_2 b_2$. Sei weiter b_3 der rotative Teil von $\mathfrak{B}_3$, sei also $\mathfrak{B}_3 = t_3 b_3$ und also

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{T} \cdot t_3 b_3 = \mathfrak{T} \cdot t_3 b_1 b_2,$$

dann ist

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 = t_1 b_1 t_2 b_2 = t_1 \cdot b_1 t_2 b_1^{-1} \cdot b_1 b_2$$

und wegen $b_3 = b_1 b_2$

$$\mathfrak{T} t_3 = t_1 \cdot b_1 t_2 b_1^{-1};$$

die Komponenten von t_1, t_2, t_3 sind alle kleiner als 1, die Koeffizienten von b_1 sind fest gegeben und also liegen die Komponenten von $b_1 t_2 b_1^{-1}$ jedenfalls unter einer angebbaren Grenze. Daher müssen auch die Komponenten von $\mathfrak{T}$ unter einer angebbaren Grenze liegen und daher kommen für $\mathfrak{T}$, da es eine Translation der Gruppe (mit ganzzahligen Komponenten) ist, nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht. Wir können diese Betrachtung für alle die endlich vielen Produkte von reduzierten Bewegungen wiederholen, und wenn wir dann zwei Gruppen vorläufig dann als gleich ansehen, wenn für irgend zwei Produkte reduzierter Bewegungen die Translation, um die sich das Produkt von der reduzierten Bewegung des Produktes unterscheidet, übereinstimmen, so erhalten wir nur endlich viele verschiedene Gruppen. Nun ist aber die Sache die, daß zwei derartige Gruppen, für die also alle die angegebenen Translationen übereinstimmen, *isomorph* sind. Um das einzusehen, brauchen wir nur in beiden Gruppen die gleichen Translationen und die jeweils reduzierten Bewegungen mit gleichen rotativen Teilen einander zuzuordnen, um eine isomorphe Zuordnung der beiden Gruppen zu erhalten. Damit ist aber dann unser Satz bewiesen.

Heppenheim a. d. B., Weihnachten 1911.