Beweis der Existenz linear-polymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen.

Von

SEVERIN JOHANSSON in Kotka (Finland).

Das Problem.

1. In der vorliegenden Abhandlung wird das folgende Problem gelöst.

*Sind auf einer beliebig gegebenen Riemannschen Fläche des Geschlechtes p über der z-Ebene n willkürlich gewählte Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ markiert, so verlangt man den Nachweis der Existenz und eindeutigen Bestimmtheit einer an diesen Stellen verzweigten, sonst aber auf der Fläche unverzweigten, linear-polymorphen Funktion $\eta = \eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$, welche die kanonisch zerschnittene Fläche auf ein Polygon mit Grenzkreis und von der Signatur $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abbildet, unter den $k_\varkappa$ beliebige ganze Zahlen > 1 oder ∞ verstanden.**)

Diese Fragestellung ist von grundlegender Bedeutung innerhalb der Theorie der automorphen Funktionen. Sie wurde von Klein und Poincaré, den beiden Schöpfern der genannten Theorie, aufgestellt und bezeichnet eines der Theoreme, welche Klein „Fundamentaltheoreme" (der Theorie der automorphen Funktionen) benennt. Klein und Poincaré haben auch eine weitreichende Methode zur Lösung dieses Fundamentalproblems gegeben, die sogenannte „méthode de continuité"**). Indessen selbst die eingehenden Entwicklungen von Poincaré, obwohl scharfsinnig und bewundernswert, dürften lange nicht alle Schwierigkeiten der Methode überwinden. Neuerdings hat sich Herr Fricke***) mit dem Kontinuitätsbeweise eingehend beschäftigt und hat den Beweis von dem Standpunkte einer entwickelten Theorie der diskontinuierlichen Gruppen aus in Angriff genommen, ohne aber bis jetzt mehr als die einfachsten Spezialfälle erledigt zu haben.

*) Dabei muß $\sum \frac{1}{k_\varkappa} < 2p + n - 2$ sein, damit der Grenzkreisfall überhaupt vorliegt.

**) Klein, Math. Ann. Bd. 21, p. 208 ff. Poincaré, Acta mathem., Bd. 4, p. 233 ff.

***) Gött. Nachr. 1903; Math. Ann. Bd. 59, pp. 449—513.

Weitaus kürzer und schärfer kommt man zum Ziele mittels der sogenannten Methode der Liouvilleschen Differentialgleichung. Diese Methode, deren Grundgedanke wohl auf Schwarz zurückgeht, ist von Picard und Poincaré ausgebildet worden.*)

Im folgenden entwickle ich eine wesentlich neue Methode, indem ich nämlich durch ein rekurrentes Verfahren die Lösung des Problems erbringe. Dabei knüpfe ich an denjenigen Satz an, den ich in dem vorhergehenden Aufsatze bewiesen habe.**)

2. Das zu lösende Problem ist mit den folgenden drei äquivalent.

Problem I. *Sind in der z-Ebene n willkürlich gewählte Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_n$ markiert, so fragt man nach der Existenz einer an diesen Stellen verzweigten, sonst aber in der Ebene unverzweigten, linear-polymorphen Funktion $\eta = \eta(z;\ (0, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n))$, welche die geeignet zerschnittene Ebene auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(0;\ n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abbildet, unter den $k_\varkappa$ beliebige ganze Zahlen > 1 oder ∞ verstanden.* Dabei muß $\sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k_\varkappa}\right) > 1$ sein.

Problem II. *Ist eine beliebige Riemannsche Fläche vom Geschlechte $p \geqq 2$ gegeben, so fragt man, ob es auf dieser Fläche eine unverzweigte linear-polymorphe Funktion $\eta = \eta(z;\ (p, 0))$ gibt, die die kanonisch zerschnittene Fläche auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, 0)$ abbildet.*

Problem III. *Sind auf einer beliebig gegebenen Riemannschen Fläche mit $p \geqq 1$ irgend $n \geqq 1$ Punkte markiert, so fragen wir nach einer in diesen Punkten verzweigten, sonst aber auf der Fläche unverzweigten linear-polymorphen Funktion $\eta = \eta(z;\ (p, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n))$, welche die kanonisch zerschnittene Riemannsche Fläche auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abbildet.*

Die zugrunde liegende Riemannsche Fläche nennen wir allgemein $\varphi(p, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$, oder speziell beim ersten Problem $\varphi(0, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ und beim zweiten $\varphi(p, 0)$.

---

*) Picard, Journ. de Math. sér. 4, t. 9, p. 195 ff., pp. 273—291, Compt. Rend. t. CXVI, p. 1075. Poincaré, Journ. de Math. sér. 5, t. 4, pp. 137—230.

**) Diese Methode habe ich für das erste der unten folgenden Probleme schon in meiner Dissertation: „Über die Uniformisierung Riemannscher Flächen mit endlicher Anzahl von Windungspunkten" (Acta Soc. Sc. Fenn. T. XXXIII (1905)) entwickelt, die übrigen Sätze habe ich im Sommer 1905 mehreren Mitgliedern der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vorgetragen. Durch Herrn Geh. Rat Klein bin ich auf eine unterdessen erschienene einschlägige Broschüre von Herrn Brodén (Lund 1905) aufmerksam gemacht worden. Diese Arbeit kommt aber für meine Sätze nicht in Betracht: sie gibt wesentlich nur die Resultate von Poincaré (Bull. Soc. Math. de France t. 11 (1883)) und die auch in meiner Dissertation bewiesene Tatsache, daß das Poincarésche Verfahren zu einer Abbildung auf das ganze Innere des Einheitskreises führt. Weitere Bemerkungen über diese Arbeit werde ich gelegentlich später machen.

I. Die Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

3. Auf der Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist die gesuchte Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ unendlich vieldeutig. Führen wir aber auf der Fläche eine kanonische Zerschneidung ein, die in bekannter Weise aus p Paaren von Rückkehrschnitten $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ und n Einschnitten $d_1, d_2, \cdots, d_n$ nach den Verzweigungsstellen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ besteht, so ist auf der so zerschnittenen Fläche die Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ eindeutig. Der Inbegriff der Werte, welche η auf ihr annimmt, bildet einen Funktionszweig der vieldeutigen Funktion.

Auf einer so zerschnittenen Fläche $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ kann nun jeder Zweig der Funktion η ausgebreitet werden. Entsprechend den unendlich vielen Zweigen, entstehen so unendlich viele genau kongruente Flächen φ'.

Ist die Funktion η gegeben, so sind in diesen unendlich vielen Flächen diejenigen Uferpunkte zusammenzuheften, wo η mit demselben Werte auftritt. Auf der so entspringenden unendlichblättrigen Fläche ist dann η eindeutig und einwertig.

4. Die Frage ist nun, wie man jetzt, wo die Existenz von η gerade zu beweisen ist, diese unendlichblättrige Fläche herstellen kann. Um diese Frage zu beantworten, ziehe ich irgend welches kanonische Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ in Betracht. Zwischen den Seiten dieses Polygons und den offenen Kanten von $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ führe ich eine Zuordnung folgendermaßen ein. Ich biege das kanonische Polygon zusammen, so daß die äquivalenten Randpunkte einander gegenüber zu liegen kommen; so entspringt eine mit einer kanonischen Zerschneidung ausgestattete Riemannsche Fläche vom Geschlechte p. Diese Fläche trägt also p Paare von Rückkehrschnitten $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ und n Einschnitte $d_1, d_2, \cdots, d_n$. Ist nun die kanonische Zerschneidung der Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ so gewählt, daß die beiden Schnittsysteme, das der eben definierten Fläche und das von $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$, in genau gleicher Ordnung bei positiver Umkreisung der zerschnittenen Flächen durchlaufen werden, so ordnen wir in der durch diese Umkreisung fixierten Ordnung die beiden Ufer der Schnitte a_i, b_i und d_i der einen Fläche den beiden Ufern der gleichgenannten Schnitte der anderen Fläche zu. Dadurch gewinnen wir aber auch eine Korrespondenz zwischen den Stücken der Berandung von $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ und den Seiten des kanonischen Polygons.

Die Fläche $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ denken wir uns also in unendlich vielen kongruenten Exemplaren vorhanden. Andererseits reproduzieren wir das kanonische Polygon durch die zugehörigen Gruppensubstitutionen.

Die beiden Mengen — die Menge der Flächenexemplare und die der Polygone — ordnen wir einander eineindeutig zu. In zwei zugeordneten Individuen ordnen wir wieder diejenigen Berandungsstücke einander zu, die kongruent bez. äquivalent mit zwei zusammengehörigen Berandungsstücken in der Ausgangsfläche und im Ausgangspolygone sind.

Nunmehr fügen wir die unendlich vielen Riemannschen Flächen Exemplar über Exemplar genau so zusammen wie die zugeordneten Polygone im Polygonnetze zusammengefügt sind, so daß immer, wenn zwei Polygone mit zwei Seiten zusammenstoßen, die zugeordneten Flächen mit den entsprechenden Berandungsstücken zusammengeheftet werden.

Es entspringt durch diesen Prozeß eine unendlichblättrige Riemannsche Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$, die grade die gesuchte Fläche ist.

5. Die Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist ersichtlich *einfach zusammenhängend.*

Sie ist weiter in bezug auf $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ als Grundgebilde oder „Blatt" *regulär,* indem nämlich jedes Flächenexemplar oder „Blatt" genau so mit den übrigen verzweigt und verschlungen ist wie jedes andere.

6. Auf der hiermit definierten Fläche ist die gesuchte Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ *eindeutig und einwertig.* Jedes „Blatt" trägt einen Zweig der gesuchten Funktion und wird durch dieselbe auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abgebildet. Die ganze Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ wird somit durch die Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ auf das Innere des Einheitskreises schlicht und lückenlos abgebildet.

II. Ein grundlegender Satz.

7. Von der Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ gilt nun aber auch umgekehrt folgender grundlegender Satz:

Falls es eine auf $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ eindeutige und einwertige Funktion gibt, die die Fläche auf das Innere des Einheitskreises schlicht und lückenlos abbildet, so ist diese Funktion eine Lösung des Fundamentalproblems.

8. Dieser Satz hängt mit dem folgenden zuerst zu beweisenden Satze eng zusammen:

Zwei Funktionen $\eta_1(z)$ und $\eta_2(z)$, die dieselbe einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche F auf das Innere des Einheitskreises abbilden, gehen durch eine lineare Transformation, welche den Einheitskreis in sich verschiebt, auseinander hervor.

Um den Beweis dieses Satzes zu erbringen, definieren wir eine dritte Funktion $\eta_3(z)$ durch die Gleichung

$$\eta_3(z) = S\eta_2(z),$$

wo wir die lineare Verschiebung S des Einheitskreises in sich so wählen, daß $\eta_3(z)$ gleichzeitig mit $\eta_1(z)$ verschwindet, und daß die beiden Funktionen in einem gegebenen Punkte denselben Argumentwert aufweisen.

Die so festgelegte Funktion $\eta_3(z)$ ist nun auch eindeutig und einwertig auf F. Die Funktionen $\eta_1(z)$ und $\eta_3(z)$ sind also eindeutige Funktionen voneinander, und der Quotient $\frac{\eta_1}{\eta_3}$ ist somit eindeutig innerhalb des Einheiskreises sowohl der η_1- als der η_3-Ebene; überdies bleibt der Quotient, da η_1 und η_3 gleichzeitig verschwinden, daselbst stets endlich und von Null verschieden.

Das harmonische Potential

$$u = \log \left| \frac{\eta_1}{\eta_3} \right|$$

ist also innerhalb des Einheitskreises der η_3-Ebene eine eindeutige, endliche und stetige Funktion der reellen Veränderlichen ω_1 und ω_2, wo

$$\eta_3 = \omega_1 + i\omega_2.$$

Betrachten wir nunmehr in der η_3-Ebene einen mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreis, dessen Radius r kleiner ist als Eins. Wenn η_3 auf der Peripherie dieses Kreises verbleibt, so ist

$$|\eta_1| < 1$$

und folglich

$$u < \log \frac{1}{r}.$$

Wenn aber ein harmonisches Potential für ein Gebiet eindeutig, endlich und stetig ist, so erreicht das Potential sein Maximum auf der Berandung des Gebietes.

Also kann u innerhalb des Kreises mit dem Radius r nirgends Werte annehmen, die $\log \frac{1}{r}$ überschreiten.

Lassen wir r gegen Eins zunehmen, so ist

$$\lim_{r=1} \log \frac{1}{r} = 0,$$

und wir schließen, daß innerhalb des Einheitskreises der η_3-Ebene u nirgends positiv wird. Es ist also in jedem Punkte von F

$$\left| \frac{\eta_1}{\eta_3} \right| \leqq 1.$$

Genau ebenso folgt, daß

$$\left| \frac{\eta_3}{\eta_1} \right| \leqq 1.$$

Wir haben also in jedem Punkte von F notwendig

$$|\eta_1| = |\eta_3|$$

und also

$$\eta_3 = \eta_1 e^{\vartheta i}$$

wo ϑ eine reelle Konstante ist.

Nach der Voraussetzung aber haben η_1 und η_3 in einem gewissen Punkte denselben Argumentwert; also ist

$$\vartheta = 0$$

und

$$\eta_3 = \eta_1$$

oder

$$\eta_1 = S\eta_2,$$

womit der Satz bewiesen ist*).

9. Sei nunmehr $\eta(z)$ eine Funktion, die unsere Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ auf das Innere des Einheitskreises abbildet; $\eta_1, \eta_2, \cdots$ seien ihre Zweige, deren jeder also auf seinem Exemplare der Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ausgebreitet ist. Wir wollen beweisen, daß diese Zweige durch eine lineare Verschiebung des Einheitskreises in sich zusammenhängen.

Unsere Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist eine reguläre Fläche. Wir können also die Wertemenge der Funktion $\eta(z)$ insoweit beliebig auf der Fläche ausbreiten, ohne daß $\eta(z)$ aufhört auf der Fläche eindeutig und einwertig zu sein, daß wir nach Willkür ein „Blatt" als Träger des Ausgangszweiges $\eta_1(z)$ wählen können. Denken wir uns zwei verschiedene derartige Ausbreitungen so vollzogen, daß ein und dasselbe „Blatt" das eine Mal $\eta_i(z)$, das andere Mal $\eta_k(z)$ trägt. Dann gehen nach dem obigen Satze diese Zweige durch lineare Verschiebungen des Einheitskreises in sich auseinander hervor.

Die Zweige von $\eta(z)$ gehen also auseinander durch lineare Verschiebung des Einheitskreises in sich hervor. Diese Verschiebungen bilden eine Gruppe, die ersichtlich von der Signatur $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist. Hiermit ist aber der auf der Seite 187 formulierte, grundlegende Satz bewiesen.

10. Durch Vermittelung dieses Satzes tritt an Stelle des Fundamentalproblems ein neues äquivalentes Problem uns entgegen. Dieses verlangt *eine konforme Abbildung der Fläche* $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ *auf das schlichte und lückenlose Innere des Einheitskreises.*

---

*) Zu dem obigen Beweise vergl. Poincaré, Acta math. 4, pp. 231—232, und meine Abhandlung *Über die Uniformisierung etc.* Acta Soc. Sc. Fenn. T. XXXIII, Nr. 7.

III. Die Rekursionssätze.

11. An die Spitze dieser Abteilung stelle ich den Satz, den ich in der vorhergehenden Note*) ausgesprochen habe. Dieser Satz lautet:

Falls auf einer gegebenen unendlichblättrigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche F ein eindeutiges positives Potential existiert, dessen kritische Punkte, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, gegen keinen regulären Punkt der Fläche sich häufen, so läßt sich diese Fläche F immer auf das Innere des Einheitskreises abbilden.

12. Mit Hilfe dieses Satzes und des in der vorigen Abteilung bewiesenen grundlegenden Satzes kann ich, den drei mit dem Fundamentalprobleme äquivalenten Problemen (S. 185) entsprechend, drei Rekursionssätze aufstellen.

Der erste lautet:

Satz I. *Falls es unter den Punkten $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ im ersten Probleme $\nu < n$ solche gibt, $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_\nu}$, daß das Problem für die mit diesen Punkten signierte Ebene und die zugehörigen Zahlen $k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu}$ lösbar ist, so ist das Problem auch für die gegebene Ebene lösbar.*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Nach der Voraussetzung existiert nämlich $\eta = \eta\big(z;\, (0, \nu;\, k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)$. Diese Funktion ist aber auf unserer Fläche $\Phi(0, n;\, k_1, k_2, \cdots, k_n)$ eindeutig und nimmt daselbst keine Werte an, deren Moduln größer sind als Eins; diejenigen Stellen der Fläche, wo $\eta\big(z;\, (0, \nu;\, k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)$ verschwindet, liegen übereinander in der z-Ebene und häufen sich folglich gegen keinen regulären Punkt der Fläche.

Das Potential

$$U = -\log \left|\eta\big(z;\, (0, \nu:\, k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)\right|$$

ist folglich auf der Fläche ein eindeutiges positives Potential, dessen kritische Punkte, die ja mit den Nullstellen von $\eta\big(z;\, (0, \nu;\, k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)$ zusammenfallen, die Bedingung meines Satzes erfüllen. Also können wir schließen, daß man die Fläche $\Phi(0, n;\, k_1, k_2, \cdots, k_n)$ auf das Innere des Einheitskreises abbilden kann. Das besagt aber nach unserem grundlegenden Satze, daß das erste Problem lösbar ist. Der Satz I ist folglich richtig.

Satz II. *Falls das zweite Problem für alle Flächen vom Geschlechte p gelöst ist, so läßt es sich auch für alle Flächen vom Geschlechte $p + 1$ lösen.*

Um den Beweis dieses Satzes zu erbringen, gehen wir aus von derjenigen Normalform der Riemannschen Fläche, die dadurch charakterisiert ist, daß sie lauter einfache Windungspunkte trägt und daß diejenigen Windungspunkte, die dieselben Blätter verbinden, immer paarweise vorkommen;

*) Seite 177—183 dieses Bandes.

die Verzweigungsschnitte verbinden diese Windungspunkte genau so wie auf einer gewöhnlichen Verzweigungsfläche der hyperelliptischen Funktionen.*)

$\varphi(p+1, 0)$ sei die in diese Normalform gebrachte Riemannsche Fläche vom Geschlechte $p+1$, $\Phi(p+1, 0)$ die zugehörige unendlichblättrige Fläche der unverzweigten polymorphen Funktion.

Wenn wir auf $\varphi(p+1, 0)$ ein Paar Verzweigungspunkte dadurch verschwinden lassen, daß wir die zu demselben Blatte gehörenden Ufer des zugehörigen Verzweigungsschnittes zusammenheften, so entsteht eine Fläche vom Geschlechte p, $\varphi(p, 0)$.

Jede auf $\varphi(p, 0)$ unverzweigte Funktion ist nun ersichtlich auch auf $\varphi(p+1, 0)$ unverzweigt. Auf $\varphi(p, 0)$ existiert aber nach unserer Voraussetzung die unverzweigte polymorphe Funktion $\eta(z; (p, 0))$. Diese Funktion ist folglich auch auf $\varphi(p+1, 0)$ unverzweigt und somit eindeutig auf $\Phi(p+1, 0)$.

Das Potential

$$U = -\log|\eta(z; (p, 0))|$$

ist also ein positives eindeutiges Potential auf $\Phi(p+1, 0)$, und wir können wieder genau so wie beim ersten Satze schließen, daß man die Fläche $\Phi(p+1, 0)$ auf das Innere des Einheitskreises abbilden kann. Hiermit ist aber auch der Satz II bewiesen.

Satz III. *Wenn das Problem II gelöst ist, so läßt sich auch das Problem III lösen.*

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt unmittelbar. Denn die zur Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ gehörende unverzweigte polymorphe Funktion, die ja nach der Voraussetzung existiert, ist auch auf $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ eindeutig. Das Potential

$$U = -\log|\eta(z; (p, 0))|$$

ist also ein eindeutiges positives Potential auf $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$. Diese Fläche läßt sich folglich auf das Innere des Einheitskreises abbilden. Der Satz III ist also bewiesen.

IV. Die Lösung des Problems.

13. Mit Hilfe der obigen Rekursionssätze können wir von einfachen Spezialfällen ausgehend die drei Probleme und somit das ganze Fundamentalproblem lösen.

---

*) Lüroth, Math. Ann. Bd. 4, p. 181 (1871), Münch. Abh. Bd. 15, p. 329 ff. (1885); Clebsch, Math. Ann. Bd. 6, p. 216 (1872); vergl. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen (1896) p. 31 ff.

Problem I. Hier ist nun erstens zu beachten, daß dieses Problem für drei Windungspunkte eine Lösung hat, falls die zugehörigen Zahlen k_1, k_2 und k_3 die Ungleichung

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}<1$$

befriedigen; diese Lösung ist die Dreiecksfunktion

$$\eta(z;\,(0,3;\,k_1,k_2,k_3)) = s\left(\frac{1}{k_1},\,\frac{1}{k_2},\,\frac{1}{k_3};\,\frac{z-a_1}{z-a_3}\cdot\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\right).$$

Also können wir mit Hilfe des ersten Rekursionssatzes schließen, daß das erste Problem jedenfalls dann zu lösen ist, wenn unter den Zahlen $k_\varkappa$ drei k_{i_1}, k_{i_2} und k_{i_3} vorkommen, die der Ungleichung

$$\frac{1}{k_{i_1}}+\frac{1}{k_{i_2}}+\frac{1}{k_{i_3}}<1$$

genügen.

Um aber ganz allgemein das erste Problem zu erledigen, knüpfen wir an die Untersuchungen von Herrn Fricke an. In Math. Ann. Bd. 59, p. 497 ff. hat Herr Fricke nämlich mit der Kontinuitätsmethode die Lösung für vier Windungspunkte sichergestellt, außer natürlich im Falle $k_1=k_2=k_3=k_4=2$, welcher ja gar nicht zum Grenzkreistypus gehört. Mit Hilfe von Satz I ist nun daraus zu schließen, daß das Problem I für beliebig viele Windungspunkte eine Lösung hat, falls nur nicht alle Zahlen $k_\varkappa(\varkappa=1,2,\cdots,n)$ gleich 2 sind.

Um aber auch diesen Fall zu beherrschen, müssen wir die Lösung für den Fall $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=2$ zuerst bringen. Nun hat wieder Herr Fricke in Math. Ann. Bd. 59 gezeigt, daß auf jedem elliptischen Gebilde eine in *einem* Punkte verzweigte polymorphe Funktion unserer Art, $\eta(z;\,(1,1,k))$, vorkommt. Wir denken uns folglich ein zweiblättriges elliptisches Gebilde, dessen vier einfache Windungspunkte mit den Windungspunkten a_1, a_2, a_3 und a_4 der Fläche $\Phi(0,5;\,2,2,2,2,2)$ zusammenfallen, und markieren den Punkt a_5 der z-Ebene in dem einen Blatte des Gebildes. Auf dem elliptischen Gebilde existiert alsdann die Funktion $\eta(z;\,(1,1;\,2))$, deren Windungspunkt auf der Fläche im Punkte a_5 liegt. Diese Funktion ist aber auf der Fläche $\Phi(0,5;\,2,2,2,2,2)$ eindeutig. Das Potential

$$U=-\log|\eta(z;\,(1,1;\,2))|$$

ist folglich ein eindeutiges, positives Potential auf derselben Fläche, woraus wiederum in schon bekannter Weise zu schließen ist, daß das Problem I für die Signatur $(0,5;\,2,2,2,2,2)$ eine Lösung hat.

Dann hat aber auch für den Fall, daß alle $k_\varkappa(\varkappa=1,2,\cdots,n)$ gleich 2 sind, das Problem I eine Lösung. Das Problem I ist also vollständig gelöst.

Problem II. Bei diesem Probleme stehen wir schließlich vor der Aufgabe, das Problem für die Signatur $(2, 0)$ zu erledigen. Denn mit Hilfe des Satzes II kann man daraus auf die Lösung für die Signatur $(p, 0)$ schließen.

Nun sind aber alle Flächen vom Geschlechte 2 hyperelliptisch. Durch birationale Transformation erteilen wir also unserer Grundfläche $\varphi(2, 0)$ die Gestalt einer gewöhnlichen zweiblättrigen Fläche mit sechs Windungspunkten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6. Nach dem Vorausgehenden existiert nun die Funktion $\eta(z;\ (0, 6;\ 2, 2, 2, 2, 2, 2))$ mit Windungspunkten in a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6. Diese Funktion ist aber auf der Fläche $\Phi(2, 0)$ eindeutig, und wir können wieder in bekannter Weise schließen, daß die Funktion $\eta(z;\ (2, 0))$ existiert.

Hiermit ist also das Problem II in seiner ganzen Ausdehnung gelöst.

Problem III. Die Möglichkeit der Lösung dieses Problems folgt nunmehr unmittelbar aus dem Satze III.

Kotka, im Januar 1906.