

Ueber die Umhüllungslinie der Pollinien einer Curve und deren inverse Linie.

(Von Herrn R. Hoppe.)

Die Beziehungen zwischen der in Rede stehenden Linie und ihrer Urcurve zeigen einige Aehnlichkeit mit denen zwischen der Evolvente und Evolute. Wie die Darstellung der Evolute in Elementen der Evolvente durch die Torsion der letztern vermittelt wird, so dient hier die Krümmung zum gleichen Zwecke. Ich nenne deshalb die Umhüllungslinie der Pollinien einer Curve die *Involvente* der letztern, und jede Curve, deren Involvente eine andere Curve ist, eine *Involute* derselben. Die Darstellung der Involute in Elementen der Involvente ist der Inhalt des Folgenden.

Für einige häufig vorkommende Größen sei es mir in Ermangelung gebräuchlicher Namen gestattet, hier die folgenden zu wählen. Ist $\tau' = \frac{1}{\rho}$ die Krümmung, ϑ' die Torsion einer Curve, so heiße

$$\tau = \int \tau' \partial s = \int \frac{\partial s}{\rho},$$

d. i. das Integral des Contingenzwinkels der Tangenten, der *Krümmungswinkel*;

$$\vartheta = \int \vartheta' \partial s,$$

d. i. das Integral des Contingenzwinkels der Osculationsebenen, der *Torsionswinkel*;

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \operatorname{tg} \lambda$$

das *Krümmungsverhältniß*; und λ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ genommen die *Krümmungsbreite*.

Es sei nun (x, y, z) ein Punkt der Involute, (x_1, y_1, z_1) der entsprechende der Involvente; ebenso mag der Index 1 bei andern Buchstaben ausdrücken, daß sie sich auf die Involvente beziehen. Ferner seien l, m, n die Cosinus der Richtungswinkel der Pollinie. Die Accente bezeichnen die Differentialquotienten nach dem jedesmal zugehörigen Curvenbogen. Dann sind die Gleichungen der Pollinie der Involute:

$$x_1 = x + \rho^2 x'' + ul, \quad y_1 = y + \rho^2 y'' + um, \quad z_1 = z + \rho^2 z'' + un,$$

wo u das Stück der Pollinie vom Krümmungsmittelpunkt bis zum Punkt (x_1, y_1, z_1) ausdrückt. Läßt man s bei constanten x_1, y_1, z_1 in $s + \partial s$ übergehen, so geht u über in

$$u + \partial u - \partial s_1$$

und man erhält durch Differentiation der Gleichungen:

$$0 = \varrho \varrho' x'' + \varrho \vartheta' l - u \varrho \vartheta' x'' + \frac{\partial u - \partial s_1}{\partial s} l$$

nebst zwei analogen Gleichungen. Die Quadratsumme aller drei giebt:

$$0 = (\varrho' - u \vartheta')^2 + \left(\varrho \vartheta' + \frac{\partial u - \partial s_1}{\partial s} \right)^2,$$

woraus

$$u = \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial s} = \varrho \vartheta' + \frac{\partial u}{\partial s} = \vartheta' \left(\varrho + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \vartheta^2} \right).$$

Nach Einführung des Werthes von u in die Gleichungen der Pollinie gehen diese in die der Involute über, nämlich:

$$x_1 = x + \varrho^2 x'' + \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} l, \quad y_1 = y + \varrho^2 y'' + \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} m, \quad z_1 = z + \varrho^2 z'' + \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} n.$$

Differentiirt geben sie:

$$x_1' \frac{\partial s_1}{\partial s} = \varrho \vartheta' l + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \vartheta^2} \vartheta' l = l \frac{\partial s_1}{\partial s}$$

nebst zwei analogen Gleichungen, woraus:

$$(1.) \quad x_1' = l, \quad y_1' = m, \quad z_1' = n.$$

Nach nochmaliger Differentiation erhält man:

$$(2.) \quad x_1'' \frac{\partial s_1}{\partial s} = -\varrho \vartheta' x'', \quad \text{etc.}$$

und als Quadratsumme der drei Größen:

$$\frac{1}{\varrho_1^2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial s} \right)^2 = \vartheta'^2,$$

woraus

$$(3.) \quad \varrho_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \vartheta} = \varrho + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \vartheta^2}$$

oder auch

$$\partial \vartheta = \frac{\partial s_1}{\varrho_1} = \partial \tau_1.$$

Läßt man die Größen $s, \tau, \vartheta, s_1, \tau_1, \vartheta_1$, deren jede eine willkürliche Constante enthält, gleichzeitig verschwinden, so ist

$$(4.) \quad \vartheta = \tau_1.$$

Ferner ergibt sich durch Multiplication der Gleichungen (2.), (3.):

$$(5.) \quad \varrho_1 x_1'' = -\varrho x'', \quad \varrho_1 y_1'' = -\varrho y'', \quad \varrho_1 z_1'' = -\varrho z'',$$

woraus wiederum in Verbindung mit den Gleichungen (1.) hervorgeht:

$$l_1 = \varrho_1 (y_1' z_1'' - z_1' y_1'') = \varrho (y'' n - z'' m) = x'$$

und nach Analogie:

$$l_1 = x', \quad m_1 = y', \quad n_1 = z'.$$

Dies wiederum differentiirt giebt:

$$-\vartheta' \varrho_1 x_1'' \frac{\partial s_1}{\partial s} = x'', \quad \text{etc.}$$

oder in Folge der Gleichungen (5.):

$$\partial \vartheta_1 = \frac{\partial s}{\varrho} = \partial \tau, \\ \vartheta_1 = \tau.$$

Dies in Verbindung mit Gleichung (4.) giebt:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau_1} = \frac{\partial \tau}{\partial \vartheta} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \lambda_1 \operatorname{tg} \lambda = 1,$$

woraus:

$$\lambda + \lambda_1 = \frac{1}{2} \pi.$$

Die einzige noch fehlende Relation liefert die Integration der Gleichung (3.), die nach Substitution von τ_1 für ϑ lautet:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \tau_1^2} + \varrho = \frac{\partial s_1}{\partial \tau_1},$$

und das Integral hat:

$$\varrho = \sin \tau_1 \int \partial s_1 \cos \tau_1 - \cos \tau_1 \int \partial s_1 \sin \tau_1,$$

woraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varrho}{\partial \tau_1} = \cos \tau_1 \int \partial s_1 \cos \tau_1 + \sin \tau_1 \int \partial s_1 \sin \tau_1.$$

Nach Substitution der gefundenen Werthe in die Gleichungen der Involute erhält man:

$$x = x_1 + \varrho_1 x_1'' \left(\sin \tau_1 \int \partial s_1 \cos \tau_1 - \cos \tau_1 \int \partial s_1 \sin \tau_1 \right) \\ - x_1' \left(\cos \tau_1 \int \partial s_1 \cos \tau_1 + \sin \tau_1 \int \partial s_1 \sin \tau_1 \right)$$

nebst zwei analogen Gleichungen, welche zusammen die Involute in Elementen der Involute darstellen.

In den Beziehungen zwischen beiden Curven zeigt sich eine bemerkenswerthe Reciprocität. Die Hauptnormalen sind einander parallel, die Richtungen der Tangenten und Pollinien hingegen vertauscht. Als natürliche Folge davon sind dann auch Krümmungswinkel und Torsionswinkel vertauscht, und die Krümmungsbreiten gegenseitige Complemente.

Da bekanntlich alle parallelen Curven eine gemeinsame Pollinie haben, so haben sie offenbar auch eine gemeinsame Involute. Es ist auch ersichtlich, dafs umgekehrt alle Involuten derselben Curve einander parallel sind; denn da mit der Pollinie auch der laufende Punkt der Involute auf der Normalebene jeder Involute liegt, so ist diese Normalebene allen gemein. In der That gehen auch die Gleichungen einer Parallele ganz einfach aus denen der Involute hervor. Zwei Involuten derselben Curve unterscheiden sich nur durch die in den beiden Integralen enthaltenen Constanten. Subtrahirt man also die entsprechenden Coordinaten beider, die mit x, y, z, x_2, y_2, z bezeichnet sein mögen, so kommt:

$$x_2 = x + \rho_1 x_1'' a \sin(\tau_1 + c) - x_1' a \cos(\tau_1 + c).$$

Setzt man für $\rho_1 x_1'', x_1', \tau_1$ ihre Werthe $-\rho x'', l, \vartheta$, so hat man die Gleichung der Parallele.

Berlin, den 8^{ten} September 1860.