3. *Über Astigmatismus, Koma und Aberration;*
von Allvar Gullstrand.

(Hierzu Taf. VIII.)

Die Abweichungen von der Homozentrizität in Strahlenbündeln, welche eine optische Abbildung vermitteln, werden einwandsfrei aus den geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche des betreffenden Strahlenbündels deduziert. Diese Methode bietet nicht nur dadurch Vorteile, daß die einfache geometrische Beziehung zwischen Fläche und Normalenbündel eine leicht anzuwendende strenge mathematische Kontrolle ermöglicht, sondern auch darin, daß das Wahre von dem nur annähernd Wahren leichter getrennt werden kann, indem anstatt einer Anzahl ihrer geometrischen Bedeutung nach unbekannten Koeffizienten in einer Potenzenreihe — die ja nur annäherungsweise die Wahrheit darstellen kann — geometrische Größen untersucht werden, welche an und für sich die volle Wahrheit aussagen. Will man für die Beurteilung der Abweichungen die Potenzenreihen entwickeln, so findet man die fraglichen geometrischen Größen in den jetzt ihrer Bedeutung nach bekannten Koeffizienten der Reihe wieder.

Ganz abgesehen davon, daß die Wissenschaft als solche die Kenntnis des — nur durch die Untersuchung der Wellenfläche zu ermittelnden — Wesens der Abweichungen fordern muß, glaube ich, daß die Würdigung der geometrischen Beziehungen auch praktischen Nutzen bringen kann, indem die Abschätzung des Gültigkeitsbereiches der gewonnenen Formeln erleichtert wird.

Die mathematische Bedeutung der Brechungsformeln ist eine Beziehung zwischen den Hauptkrümmungen der Wellenflächen des einfallenden und gebrochenen Strahlenbündels und denjenigen der brechenden Fläche. Obwohl dieselben für die einfacheren Sonderfälle gewöhnlich ohne Bezugnahme auf die Wellenfläche hergeleitet werden, und obwohl dasselbe für gewisse Abweichungen von der Homozentrizität der Fall ist, so ist einesteils eine erfolgreiche Erweiterung des zugänglichen Untersuchungsgebietes nur durch weitere Verfolgung der Beziehungen zwischen den drei Flächen zu erwarten, während andernteils auch diese Beziehungen einer strengen mathematischen Kontrolle leicht zugänglich sind.

Nur den Nachteil hat die flächentheoretische Methode, daß sie gewöhnlich nicht als so leicht zugänglich angesehen wird, weshalb auch in der geometrischen Optik der dritten Dimension meistens, so weit als möglich, durch Projektionen aus dem Wege gegangen wird. Es ist auch nicht meine Absicht hier eine Darstellung zu geben, welche etwa gründliche Kenntnisse von der Geometrie der Flächen voraussetzte, sondern ich werde, da der Gegenstand nicht ohne Betreten dieses Gebietes hinreichend erläutert werden kann, nur eine möglichst leichtfaßliche Darstellung der geometrischen Beziehungen zwischen Wellenfläche und Strahlenbündel in den einfachsten Fällen geben, wobei ich von mathematischen Beweisen nur das zum Verständnis der Koma bei endlichem Einfallswinkel sowie der sogenannten sphärischen Aberration auf der Achse Unumgängliche anführen werde, im übrigen aber auf frühere Publikationen verweise.

Wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, ist die Darstellung auf monochromatische Abweichungen beschränkt, die in einfach brechenden Medien entstanden sind.

Unter dieser Bedingung kann bekanntlich durch jeden Punkt eines beliebigen Strahles eine Fläche gelegt werden, zu welcher sämtliche Strahlen des durch Brechung oder Spiegelung von ursprünglich homozentrischem Licht entstandenen Strahlenbündels Normalen sind. Eine solche Fläche, welche eigentlich die einhüllende Fläche der Elementarwellenflächen darstellt, wird Wellenfrontfläche oder kurz Wellenfläche des Strahlenbündels genannt. Die Bedeutung der Untersuchung dieser Fläche liegt darin, daß eben dieselben Abweichungen von der Homozentrizität, welche in einem Normalenbündel möglich sind, und — unter der erwähnten Bedingung — keine anderen im Strahlenbündel vorkommen.

Die Untersuchungsmethode kann nur eine differentialgeometrische sein, da nur die Differentialquotienten der Wellenflächengleichung in einem bestimmten Punkte aus den Gesetzen der Brechung erhalten werden, die Gleichung selber aber unbekannt bleibt und nur annäherungsweise durch Reihenentwickelung dargestellt werden kann. Ebenso wie der untersuchte Punkt auf der Wellenfläche durch diese Differentialquotienten mathematisch charakterisiert ist, eben auf dieselbe Weise geben uns die aus den Differentialquotienten ermittelten geometrischen Größen mathematisch exakte Maße, welche den durch den betreffenden Punkt gehenden Strahl und dessen Beziehungen zu der nächsten Umgebung im Strahlenbündel charakterisieren. Diese Untersuchung eines Strahlenbündels in der Umgebung eines bestimmten Strahles, welche mit der Untersuchung einer Fläche in der Umgebung eines bestimmten Punktes zusammenfällt, liefert also mathematisch genaue Resultate. Sobald man aber die durch Reihenentwickelung gewonnene Flächengleichung oder die entsprechenden Gleichungen der Normale benutzt, hat man schon den Boden der strengen Wahrheit verlassen, und die Resultate müssen bei jedem Schritt besonders auf ihre Zuverlässigkeit geprüft werden.

Es wird also eine endliche Öffnung des Strahlenbündels vorausgesetzt und dasselbe zunächst längs einem ausgewählten Strahle, dem Hauptstrahl, untersucht. Wird die Untersuchung längs mehreren Strahlen ausgeführt, so gewinnt man eine um so ausgedehntere Kenntnis vom Strahlenbündel, je mehr Untersuchungen angestellt werden. Die exakte Kenntnis kann nur auf diese Weise gewonnen werden, und die Sache würde sich offenbar nicht anders verhalten, wenn die Gleichung der Wellenfläche bekannt wäre, da ja dieselbe nur auf diese Weise, d. h. durch Untersuchung verschiedener Flächenpunkte, angewendet werden könnte.

Astigmatismus.

In der Flächengleichung $z = f(xy)$ mögen die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, wie gebräuchlich mit $p\,q\,r\,s\,t$ bezeichnet werden. Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß derjenige Strahl, längs welchem das Strahlenbündel untersucht wird, mit der Z-Achse, die Haupttangenten im entsprechenden Punkte der Wellenfläche mit der X- bez. Y-Achse zusammenfallen. Für diesen Punkt ist dann

$$x = y = z = p = q = s = 0$$

sowie
$$D_{,} = \frac{1}{\varrho_{,}} = r, \quad D_{,,} = \frac{1}{\varrho_{,,}} = t,$$
wenn mit $D_{,} D_{,,}$ die Hauptkrümmungen, mit $\varrho_{,} \varrho_{,,}$ die entsprechenden Krümmungshalbmesser im ersten bez. zweiten Hauptnormalschnitte bezeichnet werden, und derjenige Hauptnormalschnitt, welcher mit der XZ-Ebene zusammenfällt, der erste genannt wird.

Die allgemeinen Gleichungen der Flächennormale
$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0 \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0$$
geben, differentiiert, für den fraglichen Punkt, d. h. nach Einsetzen von $z = p = q = s = 0$:
$$d\xi = dx(1 - \zeta r), \quad d\eta = dy(1 - \zeta t).$$

Geht man auf der Fläche zu einem unendlich nahe gelegenen Punkt über, so entspricht diesem Punkte ein dem untersuchten Strahle unendlich nahe verlaufender anderer Strahl, dessen Beziehungen zum ersten diese Gleichungen angeben. Um zu erfahren, ob der untersuchte Strahl von anderen unendlich nahe verlaufenden Strahlen geschnitten wird, und in welchen Punkten, setzt man $d\xi = d\eta = 0$, woraus sich ergibt
$$\text{entweder} \quad \zeta = \varrho_{,}, \quad dy = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta = \varrho_{,,}, \quad dx = 0,$$
wofern nicht $\varrho_{,} = \varrho_{,,}$ ist. Dies besagt, daß ein Strahl nur in den Krümmungsmittelpunkten der Wellenfläche, den *Fokalpunkten* des Strahlenbündels, von nächstliegenden Strahlen geschnitten werden kann, sowie daß die Ebene, welche zwei sich schneidende, einander unendlich nahe verlaufende Strahlen enthält, mit einem Hauptnormalschnitte der Wellenfläche zusammenfällt, den Fall $\varrho_{,} = \varrho_{,,}$ ausgeschlossen. Daß der Strahl wirklich von nächstliegenden Strahlen geschnitten wird, beweisen erst sukzessive Differentiationen, die ich an anderer Stelle[1]) ausgeführt habe.

Ein Strahl kann also entweder in zwei oder aber nur in einem Punkte von anderen ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen desselben, ursprünglich homozentrisch gewesenen Strahlenbündels geschnitten werden. Im ersteren Falle *ist das Strahlenbündel längs dem betreffenden Strahle astigmatisch,*

1) Allgemeine Theorie der monochromathischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophtalmologie, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III 1900. Separat im Buchhandel zugänglich. p. 45.

und der Grad des Astigmatismus wird — vom Brechungsindex des betreffenden Mediums abgesehen — durch die Differenz der Hauptkrümmungen der Wellenfläche $D_{,} - D_{,,}$ gemessen, falls das Strahlenbündel auf eine solche bezogen wird. Dies ist bei Übergang von einem Medium zum anderen der Fall, aber nicht bei Übergang von einer brechenden Fläche zur anderen in einem und demselben Medium. Hierbei wird der Astigmatismus durch die Brennstrecke $\varrho_{,,} - \varrho_{,}$ gemessen, die mit E bezeichnet werden mag.

Von der allgemeinen Konstitution des astigmatischen Strahlenbündels haben wir nur erfahren, daß die beiden Ebenen, *Hauptschnitte des Strahlenbündels*, die einen beliebigen Strahl und die ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen enthalten, welche ihn schneiden, aufeinander senkrecht stehen und mit den Hauptnormalebenen der Wellenfläche zusammenfallen. Ohne den Boden des exakten Wissens zu verlassen, erfahren wir auf dieser Stufe der Untersuchung auch nicht mehr davon.

Wird eine Reihenentwickelung nach Potenzen von x und y vorgenommen, wobei die Flächengleichung

$$z = \frac{x^2}{2\varrho_{,}} + \frac{y^2}{2\varrho_{,,}} + \dots$$

und die Normalengleichungen

$$\xi = x\left(1 - \frac{\zeta}{\varrho_{,}}\right) + \dots, \qquad \eta = y\left(1 - \frac{\zeta}{\varrho_{,,}}\right) + \dots$$

erhalten werden, so ist auch damit kein Schade geschehen, solange keine weiteren Schlüsse daraus gezogen werden. Wenn aber aus dem Umstande, daß die so erhaltene Flächengleichung ein Paraboloid darstellt, der Schluß gezogen wird, daß das oskulierende Paraboloid ein besseres Bild des allgemeinen Flächenelementes gäbe als irgend ein anderes oskulierendes Flächenstück, so ist das ebenso falsch, wie die allgemein verbreitete Ansicht, daß das aus den so erhaltenen Normalengleichungen hergeleitete Sturmsche Konoid besser als irgend ein anderes beliebiges, der Tatsache der beiden aufeinander senkrechten Hauptschnitte nicht widersprechendes Modell die allgemeine Konstitution des Strahlenbündels darstelle. Im allgemeinen Strahlenbündel variieren sowohl die Fokalabstände wie die Hauptschnitte von Strahl zu Strahl, und die Typen dieser Variationen können erst durch sukzessive Differentiationen ermittelt werden. Ein Modell, das die *allgemeine* Konstitution des Strahlenbündels darstellen soll, kann nicht mehr als vier Strahlen enthalten, von welchen je zwei in einem der beiden aufeinander senkrechten Hauptschnitte symmetrisch zu der Schnittlinie dieser beiden Ebenen miteinander verlaufen, da es weiter nichts Allgemeingültiges in der Konstitution des unendlich dünnen Strahlenbündels gibt. Wird ein einziger Strahl mehr hinzugefügt, so ist, wie unten weiter dargelegt werden soll, schon etwas vom speziellen Typus ausgesagt. Es ist leicht einzusehen, daß dies auch für den Fall gilt, daß ein Strahl in einem der beiden Hauptschnitte zugefügt wird, indem derselbe entweder durch den Schnittpunkt der beiden anderen gehen muß oder nicht, wodurch ausgesagt wird, ob der betreffende Fokalabstand längs dem Hauptstrahl ein Maximum bez. Minimum hat oder nicht. Der Ausdruck, daß der Hauptstrahl im Fokalpunkte von nächstliegenden oder ihm unendlich nahe verlaufenden Strahlen geschnitten wird, darf nämlich nicht mehr bedeuten, als daß dieser Punkt die Limeslage des Schnittpunktes darstellt, welche erst in dem Augenblicke erreicht wird, wo die sich schneidenden Strahlen in einem zusammenfallen.

Da das Konoid von Sturm also nicht die allgemeine Konstitution des Strahlenbündels angibt, sondern einen bestimmten Typus bezeichnet, so ist es von Interesse zu erfahren, ob dieser Typus auch den allgemeinsten Fall darstelle. Ich schicke von den Resultaten der nächsten Stufe der Rechnung, der Untersuchung der Koma, voraus, daß es nur den speziellsten, durch zwei Symmetrieebenen charakterisierten Haupttypus darstellen könnte. Endlich beantworte ich auch im voraus die Frage, ob das Konoid überhaupt einen mathematisch möglichen Typus des Strahlenbündels darstelle. Das ist bei einfach brechenden Medien und ursprünglich homozentrischem Lichte nicht der Fall, da ein Flächennormalenbündel mit zwei geraden Brennlinien nicht existiert.

Der Umstand, daß vom Sturmschen Konoide als Repräsentanten für die Konstitution eines dünnen Strahlenbündels nur das wirklich wahr ist, was aus den Eigenschaften des allgemeinen Flächenpunktes direkt hervorgeht, dürfte den Vorteil der Kenntnis von den geometrischen Eigenschaften der Wellenfläche für die Untersuchung der im Strahlenbündel vorkommenden Abweichungen von der Homozentrizität beweisen. Es ist zwar gestattet, ein Flächenstück, dessen Breite ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung darstellt, wenn die Länge unendlich klein von der ersten Ordnung ist, als eine unendlich kurze Linie zu betrachten, und es ist wahr, daß jedes Strahlenbündel zwei aufeinander und auf den Hauptstrahl senkrechte solche Querschnitte hat — aber nur wenn es unendlich dünn ist, d. h. bei stetig sich verengernder Blende erst in dem Augenblicke, wo es verschwindet.

Praktische Versuche lehren auch, daß das Konoid, wenn es sich um reelle Strahlenbündel handelt, nur den Typus mit zwei Symmetrieebenen einigermaßen repräsentieren kann.

Will man die Abweichung von der Homozentrizität im Strahlenbündel durch Entwickeln nach Potenzen der Öffnungswinkel ausdrücken, so kann man schon auf diese Stufe eine longitudinale und eine laterale Abweichung definieren. Wenn nämlich einer der Fokalpunkte als das Zentrum angesehen wird, von welchem aus man die Abweichung rechnet, so kann der Abstand des Schnittpunktes des in einem Hauptschnitte verlaufenden Strahles mit dem anderen Hauptschnitte vom gewählten Zentrum als die longitudinale Abweichung dieses Strahles, der Abstand des Schnittpunktes mit der im gewählten Zentrum senkrecht zum Hauptstrahl gelegten Ebene vom selben Zentrum als die laterale Abweichung bezeichnet werden. Wenn die Öffnungswinkel $w, w_{,,}$ auf dieser Stufe der Rechnung und im gewählten Koordinatensystem durch die Beziehungen

$$dw_{,} = D_{,} dx, \quad dw_{,,} = D_{,,} dy$$

definiert werden, so erhält man, falls z. B. der erste Fokalpunkt als Zentrum gewählt wird, für die longitudinale Abweichung den Wert E, für die laterale: $w_{,,} . E$. Obwohl nun diese Bezeichnung nicht üblich ist, führe ich die Werte deshalb an, weil man aus denselben schon auf dieser Stufe der Rechnung das allgemeingültige Gesetz ablesen kann, daß aus den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung der Flächengleichung, die unendlich kleinen Größen der Ordnung $n - 1$ in der lateralen, der Ordnung $n-2$ in der longitudinalen Abweichung eines Strahles von der Homozentrizität erhalten werden.

Ist die Brennstrecke von derselben Größenordnung wie die Öffnung des Strahlenbündels, so gehorcht dasselbe den Gesetzen des Astigmatismus nicht mehr. Diese Fälle gehören in dieselbe Kategorie wie die nicht astigmatischen Strahlenbündel, von welchen auf dieser Stufe der Rechnung nur der Fokalpunkt bekannt ist, indem erst weitere Differentiationen lehren, von welchen nächstliegenden Strahlen ein Strahl geschnitten wird, längs welchem das Strahlenbündel ohne Astigmatismus — *anastigmatisch* — ist.

Was die Terminologie betrifft, so habe ich den Astigmatismus als Eigenschaft des Strahlenbündels längs einem ausgewählten Strahle bezeichnet, was immer gemeint wird, wenn kurz vom Astigmatismus eines Strahlenbündels gesprochen wird. Unter Astigmatismus eines optischen Instrumentes wird leider Verschiedenes verstanden. In der medizinischen Optik, wo Instrumente vorkommen, in welchen das axiale Strahlenbündel längs der Achse astigmatisch ist — astigmatische Augen, sphärozylindrische bez. torische Brillen — wird diese Eigenschaft gemeint. In der Literatur der konstruktiven Optik dagegen versteht man darunter den Astigmatismus eines schief einfallenden Strahlenbündels, oft auch nur den eines Strahlenbündels mit unendlich kleiner Neigung gegen die Achse, in welchem letzteren Falle der Astigmatismus des Instrumentes durch die Krümmungsdifferenz der beiden Bildflächen im Schnittpunkte mit der Achse gemessen wird. Ich kann nicht umhin, der Meinung Ausdruck zu geben, daß erstere Terminologie wissenschaftlich richtig, letztere recht unglücklich ist.

Die Formeln für die Berechnung des Astigmatismus im gebrochenen Strahlenbündel, wenn das einfallende Strahlenbündel und die brechende Fläche bekannt sind, hat schon Hamilton[1]) implizite gegeben, wonach dieselben von Sturm[2]) in leicht verständlicher Form entwickelt wurden. Man erhält sie, wie solche höherer Ordnung, durch Differentiation des

1) W. R. Hamilton, Theory of Systems of rays. Suppl. Trans. Roy. Irish Acad. **16.** T. 1. 1830. p. 19. Lit. V.

2) Ch. Sturm, Mémoire sur l'optique. Journal de Math. pures et apliquées. 1838.

analytischen Ausdruckes für das Brechungsgesetz und der Normalengleichungen. Allgemein erhält man aus den Differentialquotienten einer beliebigen Ordnung im Schnittpunkte der Wellenfläche des einfallenden Bündels mit einem bestimmten Strahle und den Differentialquotienten derselben Ordnung in der Gleichung der brechenden Fläche für den Schnittpunkt mit dieser die exakten Werte der entsprechenden Differentialquotienten für den Schnittpunkt des gebrochenen Strahles mit der Wellenfläche des gebrochenen Strahlenbündels. Für die Spezialfälle, wo ein Hauptschnitt des einfallenden Strahlenbündels und ein Hauptnormalschnitt der brechenden Fläche mit der Brechungsebene zusammenfällt, werden die entsprechenden einfacheren Formeln gewöhnlich ohne Rücksichtnahme auf die Wellenfläche entwickelt.

Koma.

Durch die Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung erhält man die von der zweiten Potenz der Öffnungswinkel abhängigen lateralen Abweichungen von der Homozentrizität, die Komafehler. Zunächst hat man dabei die geometrische Bedeutung dieser Differentialquotienten zu ermitteln.

Werden die allgemeinen Gleichungen für die Hauptkrümmungen der Flächen differentiiert, dann $p = q = s = 0$ gesetzt, so erhält man für das gewählte Koordinatensystem:

$$d D_{,} = d r\,, \quad d D_{,,} = d t.$$

Werden nun allgemein die Bogenelemente der Hauptkrümmungslinien der Fläche mit $d s_{,}\, d s_{,,}$ bezeichnet, so ergeben sich für das fragliche Koordinatensystem, in welchem $d s_{,} = d x$ und $d s_{,,} = d y$ ist, die einfachen Beziehungen:

$$\frac{d D_{,}}{d s_{,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,, \quad \frac{d D_{,}}{d s_{,,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}\,, \quad \frac{d D_{,,}}{d s_{,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}\,, \quad \frac{d D_{,,}}{d s_{,,}} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

durch welche einerseits aus einer beliebigen Flächengleichung die vom Koordinatensystem unabhängigen geometrischen Größen $d D_{,}/d s_{,} \ldots$ für einen beliebigen Punkt erhalten werden, andererseits aber auch, wenn diese bekannt sind, die Flächengleichung bis einschließlich der dritten Potenz von x und y entwickelt werden oder, was damit gleichbedeutend ist, die Gleichung einer Fläche gewonnen werden kann, welche im fraglichen Punkt eine vollständige Berührung dritter Ordnung mit der Wellenfläche hat. Wir wissen hiermit, daß von Komafehlern das, und nur das, wahr ist, was aus diesen geometrischen Größen direkt abgeleitet werden kann: wird nach anderer Methode weniger gefunden, so hat die Methode nicht die volle Wahrheit gegeben, und was mehr gefunden wird, ist entweder falsch oder nur annähernd wahr.

Da die vier Größen die Variation der Hauptkrümmungen längs den beiden Hauptkrümmungslinien beim Durchgang durch den fraglichen Punkt bezeichnen, so zeigt der erste Blick, daß je zwei von ihnen verschwinden, je nachdem das Strahlenbündel um die eine oder andere Hauptnormalebene symmetrisch ist. Es empfiehlt sich schon deshalb, aber auch aus praktischen Gründen, je nachdem zwei Symmetrieebenen, nur eine oder gar keine vorhanden ist, drei Haupttypen der möglichen Strahlenbündel zu unterscheiden, welche als symmetrische Strahlenbündel, bez. Strahlenbündel mit einfacher, mit doppelter Asymmetrie bezeichnet werden.

Für die sogenannten Komafehler in zentrierten optischen Instrumenten braucht man also nur den Typus mit einfacher Asymmetrie zu berücksichtigen, indem bei schiefem Einfall das Strahlenbündel längs dem die Achse des Instrumentes schneidenden Strahle untersucht wird.

Wenn derjenige Hauptschnitt des Strahlenbündels, welcher mit der Symmetrieebene zusammenfällt, als der erste bezeichnet wird, so sind also nur die beiden Größen $dD_{,}/ds_{,}$ und $dD_{,,}/ds_{,}$ von Null verschieden. Ich bezeichne sie der Kürze halber mit U bez. W und nenne sie die *direkte* bez. die *transversale Krümmungsasymmetrie längs der ersten Hauptkrümmungslinie* im fraglichen Punkt. Die beiden Werte, welche gleich Null sind, werden also die direkte bez. die transversale Krümmungsasymmetrie längs der zweiten Hauptkrümmungslinie genannt.

So wie die Hauptkrümmungen von Punkt zu Punkt auf der Wellenfläche variieren, so entsprechen jedem Punkte auf dieser Fläche zwei Krümmungsmittelpunkte, und die verschiedenen Krümmungsmittelpunkte bilden zusammen zwei Flächen oder, wie man es gewöhnlich ausdrückt, eine Fläche, die Krümmungsmittelpunktsfläche oder Evolute, mit zwei gesonderten Schalen, welche nur in einzelnen ausgezeichneten Punkten sich berühren. Diejenige Schale, welche den ersten Krümmungsmittelpunkt, den Schnittpunkt des Hauptstrahles mit den ihm im ersten Hauptschnitt nächstliegenden Strahlen enthält, nenne ich die erste.

Für die Richtungskosinus $\alpha \beta \gamma$ einer beliebigen Flächennormale gilt allgemein

$$\alpha = -\frac{p}{N}, \quad \beta = -\frac{q}{N}, \quad \gamma = \frac{1}{N},$$

wo

$$N^2 = 1 + p^2 + q^2$$

gesetzt ist. Werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Wellenfläche mit $x y z$, die des entsprechenden ersten Krümmungsmittelpunktes mit $\xi \eta \zeta$ bezeichnet, so ergibt die Projektion des ersten Krümmungshalbmessers $\varrho_,$ auf die drei Koordinatenachsen:

$$N(\xi - x) = -p\varrho_,, \quad N(\eta - y) = -q\varrho_,, \quad N(\zeta - z) = \varrho_,.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen ergibt für das gewählte Koordinatensystem, in welchem $p = q = s = 0$, mithin auch $dN = 0$ ist:

$$d\xi = dx - \varrho_, dp = 0, \quad d\eta = dy - \varrho_, dq = \frac{D_, - D_{,,}}{D_,} dy,$$

$$d\zeta = d\varrho_, = -\frac{U}{D_,^2} dx,$$

$$d^2\xi = d^2 x - \varrho_, d^2 p - 2\, d\varrho_, dp = \frac{U}{D_,} dx^2 - \frac{W}{D_,} dy^2.$$

Man kann nun η und ζ als unabhängige Variablen betrachten, ξ als abhängige, wobei für die Differentialquotienten der Gleichung $\xi = f(\eta\, \zeta)$ der ersten Evolutenschale im ersten Krümmungsmittelpunkt folgende Werte resultieren

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta\, \partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} = -\frac{D_, W}{(D_, - D_{,,})^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} = \frac{D_,^3}{U},$$

aus welchen direkt hervorgeht, daß die Hauptnormalebenen der ersten Evolutenschale mit der Symmetrieebene bez. der ersten Fokalebene des Strahlenbündels, d. h. der im ersten Fokalpunkt senkrecht den Hauptstrahl schneidenden Ebene zusammenfallen, und für den Krümmungsradius der Schnittlinie der Schale mit erstgenannter Ebene der Wert

$$R = \frac{U}{D_{,}^{3}}$$

erhalten wird, während die Krümmung der Schnittlinie der Schale mit der Fokalebene den Wert $-D_{,} W/(D_{,} - D_{,,})^2$ hat.

Erstgenannter Krümmungsradius dient als Maß der *direkten Asymmetrie des Strahlenbündels im ersten Hauptschnitt.* Man erhält ihn mittels obiger Formel unmittelbar aus dem entsprechenden Asymmetrienwerte der Wellenfläche und umgekehrt. Er wird, wie alle Krümmungen, positiv gerechnet, wenn die konkave Seite der betreffenden Linie der positiven Richtung der betreffenden Koordinatenachse zugekehrt ist. Wie ersichtlich, ist die Schale konkavkonvex, wenn die beiden Asymmetrienwerte der Wellenfläche, wie in optischen Instrumenten meistens der Fall ist, dasselbe Vorzeichen haben. Je größer dabei diese Asymmetrienwerte sind, um so größer wird der Krümmungsradius der Schnittlinie der Schale mit der Symmetrieebene, um so kleiner der Radius der Schnittlinie mit der Fokalebene, um so mehr geht also die Gestalt der Schale von einer sattelähnlichen in eine rinnenförmige über, was Anlaß zu der Bezeichnung „Rinnenfehler" gegeben hat, wovon weiter unten die Rede sein wird.

Von der zweiten Evolutenschale wissen wir im voraus, daß sie im ersten Hauptschnitt des Strahlenbündels eine Kante haben muß, denn sonst wäre dieser Hauptschnitt keine Symmetriebene. Um die Richtung der Kantlinie zu finden, differentiieren wir die Gleichungen für die zweite Schale

$$N(\xi - x) = -p\,\varrho_{,,}\,, \qquad N(\zeta - z) = \varrho_{,,}$$

und erhalten

$$d\,\xi = -\frac{D_{,} - D_{,,}}{D_{,,}}\,d\,x\,, \qquad d\,\zeta = -\frac{W}{D_{,,}^{2}}\,d\,x\,,$$

d. h. für den Winkel ϑ, den die Tangente der Kantlinie mit der zweiten Fokalebene bildet

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{W}{D_{,,}(D_{,} - D_{,,})}\,,$$

wobei die positive Richtung dieses Winkels durch die Beziehung $\operatorname{tg}\vartheta = -d\,\zeta/d\,\xi$ definiert ist. Wird im zweiten Fokalpunkt die Normale zur Kantlinie in der Symmetrieebene gezogen und verlängert, bis sie die erste Fokalebene trifft, so findet man für den längs der Normale der ersten Schale gemessenen Abstand des Schnittpunktes vom ersten Krümmungsmittelpunkt den Wert

$$S = -E \operatorname{tg} \vartheta = \frac{W}{D_{,} D_{,,}^{2}},$$

der als Maß der *transversalen Asymmetrie des Strahlenbündels im ersten Hauptschnitt* dient. Wie ersichtlich, entspricht einem positiven Werte von S die Bedingung $\xi > 0$ für den fraglichen Schnittpunkt.

Durch die beiden Asymmetrienwerte R und S ist das Strahlenbündel bezüglich Komafehler vollständig charakterisiert. Dieselben sind von der Lage der Wellenfläche unabhängig, werden aber durch die ermittelten Beziehungen unmittelbar aus den entsprechenden Differentialquotienten der Gleichung einer beliebigen Wellenfläche erhalten und geben andererseits unmittelbar durch dieselben Beziehungen die Differentialquotienten dritter Ordnung einer beliebigen Wellenfläche.

Ebenso wie die Fokalabstände von Strahl zu Strahl variieren, ist das auch mit den Asymmetrienwerten der Fall. Wenn kurz von den Asymmetrienwerten eines Strahlenbündels gesprochen wird, so wird also nur die Asymmetrienwerte längs dem fraglichen Strahle gemeint.

Um die Abweichungen eines Strahles von der Homozentrizität mittels dieser Werte nach Potenzen von den Öffnungswinkeln $w_{,} w_{,,}$ entwickeln zu können, müssen wir zunächst diese näher definieren. Am einfachsten tun wir dies, indem wir damit die Winkel bezeichnen, welche die Projektionen des Strahles auf den beiden Hauptnormalebenen mit dem Hauptstrahl bilden. Hierbei gelten für $p = q = s = 0$ folgende Beziehungen:

$$d w_{,} = d p, \quad d^2 w_{,} = d^2 p, \quad d w_{,,} = d q, \quad d^2 w_{,,} = d^2 q,$$

durch welche auch die Vorzeichen in Übereinstimmung mit der vorläufigen, p. 947 gegebenen Definition bestimmt sind. Eine kurze Überlegung lehrt, daß diese Beziehungen auch für die Definition der Öffnungswinkel als der Winkel zwischen dem

Strahle und den beiden Hauptschnitten gültig sind, da die Ausdrücke für diese Definition

$$w_{\prime} = - \arcsin \alpha, \quad w_{\prime\prime} = - \arcsin \beta$$

auch zu denselben führen.

Durch die unmittelbar herzuleitenden Beziehungen

$$R = - \frac{d\varrho_{\prime}}{dw_{\prime}}, \quad S = - \frac{d\varrho_{\prime\prime}}{dw_{\prime}}$$

tritt die analoge Bedeutung der Asymmetrienwerte des ohne Zusammenhang mit einer Wellenfläche untersuchten Strahlenbündels und der Krümmungsasymmetrien der Wellenfläche zutage.

Um nicht zu viele Ausdrücke für die Abweichungen eines Strahles von der Homozentrizität im astigmatischen Strahlenbündel zu erhalten, empfiehlt es sich, die lateralen Abweichungen in den beiden Fokalebenen so zu messen, daß in der ersten nur der Abstand des Schnittpunktes des Strahles mit der Fokalebene vom zweiten Hauptschnitt berücksichtigt, in der zweiten nur der Abstand des Schnittpunktes des Strahles mit der Fokalebene vom ersten Hauptschnitt gemessen wird. Die lateralen Abweichungen eines Strahles sind dann die Abweichungen vom Typus des Konoides von Sturm. Die auf diese Weise in der ersten Fokalebene gemessene Abweichung nenne ich *die erste laterale,* die andere die *zweite laterale.* Die entsprechenden longitudinalen Abweichungen lassen sich nur unter Berücksichtigung der abwickelbaren Normalflächen definieren, können aber auch bei der Untersuchung der Komafehler entbehrt werden, weshalb ich sie hier übergehe, um die Darstellung nur mit dem notwendigen Minimum von der Flächentheorie zu belasten.

Wir haben also die Gleichungen der Normale noch einmal zu differentiieren, wobei $\xi\,\eta$ als Funktionen von $w_{\prime}\,w_{\prime\prime}$ zu behandeln, mithin zunächst $x\,y$ als Funktionen von $p\,q$ darzustellen sind. Aus den Beziehungen

$$d^2 p = U\,dx^2 + W\,dy^2 + D_{\prime}\,d^2 x, \quad d^2 q = 2\,W\,dx\,dy + D_{\prime\prime}\,d^2 y$$

erhalten wir

$$d^2 x = - R\,dp^2 - S\,dq^2 + \varrho_{\prime}\,d^2 p, \quad d^2 y = - 2\,S\,dp\,dq + \varrho_{\prime\prime}\,d^2 q,$$

und aus den Normalengleichungen durch zweimalige Differentiation

$$d^2\xi = d^2x - \zeta d^2p, \quad d^2\eta = d^2y - \zeta d^2q,$$

mithin, indem wir für die erste laterale Abweichung in der ersten Gleichung $\zeta = \varrho_{,}$, für die zweite laterale Abweichung in der zweiten $\zeta = \varrho_{,,}$ setzen, die Werte:

$$\text{Erste laterale Abweichung:} \quad \xi = -\frac{w_{,}^2}{2}R - \frac{w_{,,}^2}{2}S.$$

$$\text{Zweite laterale Abweichung:} \quad \eta = -w_{,}w_{,,}S.$$

Andere Komafehler als diese gibt es nicht, wofern man darunter Abweichungen versteht, welche der zweiten Potenz der Öffnungswinkel proportional sind. Wie ersichtlich, würde man den gleichen Ausdruck für diese Abweichungen erhalten, wenn dieselben in einer beliebigen zum Hauptstrahl senkrechten Ebene gemessen würden, da $d^2p = d^2w_{,}$, $d^2q = d^2w_{,,}$ ist, und $w_{,}w_{,,}$ unabhängige Variabelen sind. Es würde aber dabei ein Glied erster Ordnung hinzukommen, während die angegebenen Werte für die erste bez. zweite laterale Abweichung die totale Abweichung bis einschließlich der Ordnung der Komafehler darstellen, indem das Glied erster Ordnung verschwindet. Dazu kommt noch, daß auf der Stufe der Aberrationen nur auf diese Weise einfache Werte erhalten werden können, und eine gleichmäßige Behandlung der Abweichungen verschiedener Ordnung immer ein Vorteil ist.

Diese Darstellung der Komafehler habe ich, um dieselbe zugänglicher zu machen, nicht nur in der Weise beschränkt, daß ich nur auf Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie Rücksicht genommen habe, sondern auch dadurch, daß nur diejenigen aus den Differentialquotienten dritter Ordnung der Flächengleichung zu ermittelnden geometrischen, das Strahlenbündel charakterisierenden Größen hergeleitet wurden, die für das Verständnis des Wesens der Abweichungen unumgänglich sind. Die vollständige Untersuchung einschließlich der Aberrationen, d. h. unter Berücksichtigung sämtlicher Differentialquotienten bis einschließlich der vierten Ordnung in der Gleichung einer beliebigen Wellenfläche, findet man in der schon zitierten Arbeit. Die vollständige Untersuchung der Asymmetrienwerte findet sich mit geringerem mathematischen Apparate in einer älteren Publikation.[1]) Zwar findet man weder auf der einen noch auf der anderen Stelle den Namen Koma, weil dieser Name einen Spezialfall bezeichnet, und die Untersuchungen allgemeingültig sind. In letztgenannter Arbeit sind allgemeingültige Formeln entwickelt, welche für ein beliebiges einfallendes Strahlenbündel nach Brechung in einer beliebigen Fläche — unter Berücksichtigung der Differentialquotienten dritter Ordnung auch in der Gleichung dieser — die Asymmetrienwerte des gebrochenen Strahlenbündels geben. Die einfacheren Formeln, welche beim Vorhandensein einer Symmetrieebene gelten, sind dort auch mit den einfachsten Mitteln entwickelt.

Mit diesen Formeln habe ich die Asymmetrienwerte bei schiefem Durchgang durch Linsen berechnet und durch Versuche kontrolliert, Versuche, welche bewiesen haben, daß für praktisch vorkommende Öffnungen die Berücksichtigung der Asymmetrien genügt, um die verschiedenen Typen von Strahlenbündeln zu charakterisieren, so daß also die Definition einer Brennlinie als eines Strahlenbündelquerschnittes, dessen Breite unendlich klein von dritter Ordnung ist, wenn die Länge ein Unendlichkleines erster Ordnung darstellt, hinreichend genau ist, um bei den vorkommenden Öffnungen auch diese Brennlinie auf einen entsprechend schief gehaltenen Schirm auffangen zu können.

Die oben gegebene Darstellung der Asymmetrien geht davon aus, daß die Brennstrecke endlich ist. Doch ist es ersichtlich, daß die in den Werten der lateralen Abweichungen auftretenden Größen R und S unabhängig von der Größe der Brennstrecke aus den Differentialquotienten dritter Ordnung der Wellenflächengleichung erhalten werden. In der Tat sind dieselben auch im anastigmatischen Strahlenbündel gültig. Die Untersuchung dieser Strahlenbündel erforderte eine Durchforschung der Kreispunkte der Flächen, welche mir vollständig erst in der zitierten späteren Arbeit gelang, wo ich das für die fragliche Aufgabe Notwendige angeführt habe.[2])

1) A. Gullstrand, Skand. Arch. f. Physiologie 2. p. 269. 1890.
2) Vgl. auch A. Gullstrand, Acta Mathematica 29. p. 59. 1904.

Von anderen Darstellungen der Komafehler bei endlicher Neigung des Strahlenbündels gegen die Achse eines zentrierten optischen Instrumentes kenne ich nur diejenige von Czapski[1]), welcher darunter nur die direkte Asymmetrie in der Symmetrieebene des Strahlenbündels versteht, und diejenige von König und v. Rohr[2]), welche *drei* Komafehler beschreiben. Der erste wird Koma im engeren Sinne oder, wie auch bei Czapski, Unsymmetrie in tangentialen Büscheln erweiterter Öffnung genannt und entspricht vollkommen, wie auch die Benennung angibt, der direkten Asymmetrie. Der Zusammenhang mit dem Evolutenradius wird hier aus Versehen so angegeben, daß der *halbe* Asymmetrienwert gleich dem Radius gesetzt wird.[3]) Der zweite Komafehler wird Rinnenfehler genannt und als die tangentiale Abweichung in sagittalen Büscheln erweiterter Öffnung definiert. Da die Tangentialebene die Symmetrieebene darstellt, so entspricht dieser Definition der transversale Asymmetrienwert. Die Rechnung, welche das von der zweiten Potenz des sagittalen Öffnungswinkels abhängige Glied in dem Wert für den Abstand des Schnittpunktes eines windschiefen Strahles mit der Tangentialebene von der Sagittalebene zu ermitteln bezweckt, wird für Strahlenbündel endlicher Neigung nicht zu Ende geführt. Wäre das der Fall, so hätte sie den transversalen Asymmetrienwert ergeben müssen, da der Definition nach das gesuchte Glied eben das Glied $-(w_{,,}{}^2/2)\,S$ im Werte für die erste laterale Abweichung ist.

Will man dieses Resultat durch die von den Verfassern bezweckte Rechnung erhalten, so hat man nur, um den Schnittpunkt eines beliebigen Strahles mit der Tangentialebene zu finden, in der Normalgleichung

$$\eta - y + q(\zeta - z) = 0$$

1) S. Czapski, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. 2. Aufl. p. 144. 1904. Auch schon in der ersten Auflage von Winkelmanns Handb. d. Phys. 2. Abt. 1. p. 130ff.

2) M. v. Rohr, Die Theorie der optischen Instrumente I. Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik p. 265ff. 1904.

3) Bei S. Czapski l. c. findet man den entgegengesetzten Druckfehler, doch nur in der zweiten Auflage.

$d\eta = d^2\eta = 0$ zu setzen, wonach durch zwei Differentiationen erhalten wird:

$$dy(1 - \zeta t) = 0, \quad d^2y - \zeta d^2q - 2\,dq\,d\zeta = 0,$$

welche Werte, wenn die Öffnungswinkel als unabhängige Variabelen angesehen werden, unter Anwendung des bei der Ermittelung der lateralen Abweichungen gefundenen Wertes für d^2y die Beziehungen

$$\zeta = \varrho_{,,}, \quad d\zeta = -S\,dp$$

ergeben, aus welchen mittels des dortselbst angegebenen Wertes für d^2x durch zweimalige Differentiation der Normalengleichung

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0$$

resultiert:

$$d\xi = dx(1 - \zeta r) = -E\,dp,$$

$$d^2\xi = d^2x - 2\,d\zeta\,dp = -(R - 2S)\,dp^2 - S\,dq^2,$$

d. h. für den gesuchten Abstand des Schnittpunktes eines Strahles mit der Tangentialebene von der Sagittalebene

$$\xi = -w_{,}E - \frac{w_{,}^2}{2}(R - 2S) - \frac{w_{,,}^2}{2}S,$$

wo das letzte Glied also nach der gegebenen Definition den Rinnenfehler bezeichnet und durch die bezweckte Rechnung erhalten ist.

Der Umstand, daß das zweite Glied hier nicht mit dem ersten Gliede im Werte für die erste laterale Abweichung übereinstimmt, steht nur scheinbar damit in Widerspruch, daß die laterale Abweichung, soweit sie von den zweiten Potenzeu der Öffnungswinkel abhängig ist, für jede beliebige Ebene, mit welcher der Hauptstrahl senkrecht geschnitten wird, unveränderlich bleibt, denn die Ebene, mit welcher der Hauptstrahl hier geschnitten wurde, steht nicht senkrecht auf denselben, oder, wie man es auch ausdrücken kann, die Lage der den Hauptstrahl senkrecht schneidenden Ebene ist von der ersten Potenz des Öffnungswinkels $w_{,}$ abhängig.

Der dritte von den beschriebenen Komafehlern wird Dreiecksfehler oder die tangentiale Differenz der sagittalen Schnittweiten genannt. Letztere Benennung entspricht der transversalen Asymmetrie, und die Rechnung führt auch zu dem oben ermittelten Werte für die zweite laterale Abweichung. Zum Namen Dreiecksfehler kann daran erinnert werden, daß die Dreiecksform der Strahlenbündelquerschnitte, wie meine oben zitierten Versuche auch praktisch darlegen, dann am ausgeprägtesten ist, wenn eben die transversale Asymmetrie gleich Null ist, indem dabei, wie die angegebenen Werte für die Krümmungen der ersten Evolutenschale lehren, die eine Seite des Dreieckes bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gerade wird.

Die Untersuchung der Komafehler wird von den Verfassern in Zusammenhang mit der Entwickelung von Formeln für die Berechnung derselben im gebrochenen Strahlenbündel ausgeführt. Von diesen Formeln stimmen diejenigen für den Komafehler im engeren Sinne und für den sogenannten Dreiecksfehler nach entsprechender Umformung mit den meinigen überein und führen auch in erster Linie zu zwei, von den Verfassern mit $d\tau/du$ bez. $d\varsigma/du$ bezeichneten Werten, welche, vom Vorzeichen abgesehen, mit den Asymmetrienwerten des gebrochenen Strahlenbündels identisch sind.

In einer eben erschienenen Arbeit behandelt Gleichen[1]) unter dem Begriffe Koma nur die direkte Asymmetrie und sagt von den Resultaten der Untersuchung, durch welche das Wesen der Komafehler ermittelt und die Berechnung derselben für das gebrochene Strahlenbündel durchgeführt wurde, daß sie für die photographische Optik zurzeit noch keine Verwendbarkeit beanspruchen können.[2]) Daß der Name Koma in der erwähnten Untersuchung nicht vorkommt, dürfte doch vielleicht dieses Urteil mit veranlaßt haben.

Beschränkt man sich bei der Darstellung der Komafehler auf den Fall eines unendlich wenig gegen die Achse eines zentrierten Instrumentes geneigten Strahlenbündels, so braucht man nur auf die direkte Asymmetrie Rücksicht zu nehmen, weil dann die Erfüllung einer Bedingungsgleichung genügt, um beide Asymmetrienwerte gleich Null zu machen.

1) A. Gleichen, Vorlesungen über photographische Optik, p. 136 ff. Leipzig 1905.

2) l. c. p. 114.

Aberration.

Solange man sich auf die Untersuchung des axialen Bündels in zentrierten optischen Instrumenten beschränkte, war Aberration gleichbedeutend mit Abweichung von der Homozentrizität. In diesem allgemeinsten Sinne umfaßt also der Begriff der monochromatischen Aberrationen auch die durch Astigmatismus und Asymmetrie oder sogenannte Koma bedingten Abweichungen und müßte eigentlich auch auf solche höherer Ordnung ausgedehnt werden. Die Gesetze der Aberration wurden aber für symmetrische Abweichungen hergeleitet, welche als laterale zu der dritten, als longitudinale zu der zweiten Potenz des Neigungswinkels eines Strahles gegen den Hauptstrahl proportional sind, mithin von den Differentialquotienten vierter Ordnung in der Flächengleichung abhängen. Bei der allgemeinen Untersuchung empfiehlt es sich daher unter *Aberration im engeren Sinne* nur symmetrische Fehler zu verstehen, welche durch die Differentialquotienten vierter Ordnung in der Gleichung der Wellenfläche bestimmt werden. Außer von der Aberration eines Strahles spricht man aber auch von Instrumenten mit größerer oder geringerer Aberration, wobei eine Eigenschaft des im Instrumente gebrochenen Strahlenbündels gemeint wird. Da ich nun durch die Untersuchung der Aberrationen im engeren Sinne geometrische Größen ermittelt habe, welche für diese Stufe der Rechnung eine ähnliche Bedeutung haben wie die Asymmetrienwerte für die Komafehler, und da diese Werte ebenso wie jene von Strahl zu Strahl variieren, so spreche ich von den durch dieselben bestimmten *Aberrationen eines Strahlenbündels* von endlicher Öffnung *längs einem bestimmten Strahle.* Diese Aberrationswerte sind also von der Blendengröße unabhängig. Je kleiner aber die Blende ist, um so genauer kann aus ihnen die Abweichung des periphersten Strahles berechnet werden. Für das axiale Strahlenbündel in zentrierten optischen Instrumenten, wo es nur einen Aberrationswert gibt, ist dieser gewöhnlich nicht gleich Null, wenn „die sphärische Aberration behoben ist“, indem darunter gewöhnlich die Behebung der Abweichung eines Rand- oder intermediären Strahles verstanden wird. Um diese Begriffe auseinander zu halten, habe ich die Abweichung eines Randstrahles bei bestimmter Blendengröße als *periphere Totalaberration* bezeichnet. Durch die Kenntnis der Aberration längs der Achse und der einer bestimmten Blendengröße entsprechenden peripheren Totalaberration ist man schon einigermaßen imstande, eine Vorstellung von der Wirkung der sonst sogenannten Zonen der sphärischen Aberration zu gewinnen. Von diesen beiden Werten entspricht aber nur die Aberration längs der Achse dem Begriffe der Aberrationen im engeren Sinne, während die periphere Totalaberration durch rechnerische Verfolgung eines Randstrahles ermittelt werden muß.

Im Falle des axialen Strahlenbündels in einem aus Umdrehungsflächen zusammengesetzten zentrierten optischen System genügt es die Schnittlinie der Wellenfläche mit einer der Koordinatenebenen zu untersuchen. Wird also in der Flächengleichung $y = 0$ gesetzt, so resultiert eine Gleichung $z = f(x)$, in welcher die Krümmung der fraglichen Schnittlinie in einem beliebigen Punkt allgemein durch die Formel

$$D = \frac{r}{N^3}$$

erhalten wird, in welcher

$$r = \frac{d^2 z}{d x^2}, \qquad N^2 = 1 + \left(\frac{d z}{d x}\right)^2$$

gesetzt worden ist. Wird diese Gleichung zweimal differentiiert, dann

$$\frac{d z}{d x} = \frac{d^3 z}{d x^3} = 0$$

gesetzt, mithin dasjenige Koordinatensystem gewählt, in welchem der Hauptstrahl mit der Z-Achse zusammenfällt, so ergibt sich

$$\frac{d^2 D}{d s^2} = \frac{d^4 z}{d x^4} - 3\,D^3 .$$

Dieser Wert, den ich mit Φ bezeichne, dient zur geometrischen Charakterisierung der Fläche auf der fraglichen Stufe der Rechnung. Ist er positiv, so hat die Umdrehungsfläche im Pol eine schwächere Krümmung, ist also bei positiver Krümmung hier flacher als in den umgebenden Punkten, und der Unterschied von der Form der oskulierenden Sphäre wird in erster Annäherung durch denselben gemessen. Ich nenne deshalb Φ den *Abflachungswert* der Fläche im fraglichen Punkte,

d. h. im Pol der Umdrehungsfläche, da andere Punkte nicht durch *einen* Abflachungswert hinreichend charakterisiert sind. Die geometrische Bedeutung des Abflachungswertes kann an Umdrehungsflächen zweiten Grades illustriert werden. Wird die allgemeine Gleichung einer solchen für das angewendete Koordinatensystem

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\varepsilon\frac{z^2}{c^2}=\frac{2z}{c},$$

welche ein Rotationsellipsoid, -paraboloid bez. -hyperboloid bezeichnet, je nachdem $\varepsilon=+1$, $\varepsilon=0$ bez. $\varepsilon=-1$ gesetzt wird, differentiiert, so ergibt sich für $y=0$, d. h. für die Schnittlinie mit der XZ-Ebene:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d^3z}{dx^3}=0,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{c}{a^2},\quad \frac{d^4z}{dx^4}=\frac{3\varepsilon c}{a^4},$$

woraus resultiert

$$-\frac{\Phi}{3D^3}=\frac{c^2-\varepsilon a^2}{c^2}.$$

Dies besagt, daß, wenn Abflachungswert und Krümmung verschiedenes Vorzeichen haben, die Zahl $-\Phi/3D^3$ das Quadrat der Exzentrizität jener konischen Sektion darstellt, in welcher die XZ-Ebene die Umdrehungsfläche zweiten Grades schneidet, welche mit der fraglichen Umdrehungsfläche eine vollständige Berührung vierter Ordnung im Pole hat, d. h. bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als der für die Berechnung der Aberration in Frage kommenden mit ihr zusammenfällt, während, wenn Abflachungswert und Krümmung dasselbe Vorzeichen haben, die Zahl $\Phi/3D^3$ gemäß obenstehendem Ausdrucke die Achsen des Rotationsellipsoids angibt, welches in seinem Punkte kleinster Krümmung die erwähnte Berührung mit der untersuchten Fläche hat.

Die Beziehung des Abflachungswertes zu dem von Siedentopf[1]) nach Abbe angegebenen Deformationskoeffizienten $\varkappa$ findet man, indem die in Polarkoordinaten gegebene Gleichung für ein rechtwinkliges Koordinatensystem umgeformt wird, durch entsprechende Differentiation, wobei

$$\Phi=-24\varkappa$$

erhalten wird.

1) l. c. M. v. Rohr, Die Theorie etc. p. 26.

Die dem Abflachungswerte entsprechende, die Evolute charakterisierende geometrische Größe kann auf folgende Weise ermittelt werden. Wenn allgemein für eine in der XZ-Ebene gelegene krumme Linie $\varrho\, d s$ bez. $R\, d\sigma$ Krümmungshalbmesser und Bogenelement der Linie selbst bez. deren Evolute bezeichnen, so gilt für den Öffnungswinkel w unter Berücksichtigung der Richtung, in welcher die Krümmungen positiv gerechnet werden, und wenn man die Bogenelemente in derselben Richtung wie die betreffenden Koordinaten positiv rechnet,

$$d w = \frac{d s}{\varrho} = - \frac{d \sigma}{R},$$

weil ja die Normalen der Evolute auf den entsprechenden Normalen der Evolvente senkrecht stehen. Allgemein ist nun, wie oben bewiesen worden,

$$- \frac{d \varrho}{d w} = R,$$

d. h. durch Differentiation

$$- \frac{d^2 \varrho}{d w^2} = \frac{d R}{d w} = - R \frac{d R}{d \sigma} = A,$$

wenn mit A der Krümmungshalbmesser der Evolute von der Evolute bezeichnet wird. Für den Fall einer Umdrehungsfläche, deren Achse mit der Z-Achse zusammenfällt, erhält man unmittelbar

$$- \frac{d^2 \varrho}{d w^2} = \frac{\Phi}{D^4},$$

mithin

$$A = \frac{\Phi}{D^4} = - \frac{d^2 \varrho}{d w^2}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser A, den ich den *Aberrationswert des Strahlenbündels* nenne, enthält alles, was von der Aberration im engeren Sinne im fraglichen Strahlenbündel ausgesagt werden kann, und an demselben ist man sehr gut imstande, sich eine Vorstellung davon zu machen, wie viel — oder wie wenig — dies ist. Man ersieht, daß die Schnittlinie der Evolute oder kaustischen Fläche des Strahlenbündels mit einer Meridianebene als Kreisevolvente durch Abwickelung eines Fadens konstruiert werden kann. Da der Evolutenradius von der Wellenfläche gleich Null ist, mithin die fragliche

Schnittlinie eine Spitze hat, welche ihre eigene Evolute berührt, so erhält man durch eine Abwickelung nur einen Zweig der kaustischen Linie. Den anderen erhält man, wenn der Faden in entgegengesetzter Richtung aufgewickelt wird, indem man die Abwickelung wieder am selben Berührungspunkte beginnt. Fällt die positive Richtung der Z-Achse, wie gewöhnlich, mit der Bewegungsrichtung des Lichtes zusammen, so bedeutet ein positiver Wert von A eine sogenannte positive oder unterkorrigierte sphärische Aberration.

Durch den Aberrationswert ist nur der Krümmungsradius der Evolute von der kaustischen Linie im Berührungspunkte beider gegeben. Die kaustische Linie kann also ebensogut von einer anderen beliebigen Kurve abgewickelt werden, welche im Berührungspunkte dieselbe Krümmung hat, nur darf diese Kurve keine Inflexionspunkte haben — wohl aber Spitzen von derselben Art wie die der kaustischen Linie — da nämlich erstere einem unendlich großen Asymmetrienwert längs dem entsprechenden Strahle entsprechen würden, was ausgeschlossen ist. Da nun sämtliche Strahlen des Strahlenbündels als Tangenten der gewonnenen kaustischen Linie konstruiert werden, so kann man auf diese Weise eine beliebige Anzahl Strahlenbündel mit einem und demselben Aberrationswerte konstruieren, welche in anschaulicher Weise die Bedeutung dieses Wertes illustrieren.

Bekanntlich wird die kaustische Linie gewöhnlich als semikubische Parabel aufgefaßt und konstruiert. Von dieser Auffassung ist ebensoviel richtig wie von der Auffassung derselben als der Evolvente einer beliebigen Kurve mit dem entsprechenden Krümmungsradius im Berührungspunkte, da die Spitze der fraglichen semikubischen Parabel bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als der dem Aberrationswerte entsprechenden mit der Spitze der genannten Evolvente zusammenfällt.

Die semikubische Parabel erhält man durch sukzessive Differentiation der oben angewendeten Gleichungen für die Evolute

$$N(\xi - x) = -p\varrho\,, \quad N(\zeta - z) = \varrho\,,$$

wobei für die Schnittlinie einer Umdrehungsfläche mit der

XZ-Ebene im angewendeten Koordinatensystem resultiert (x als unabhängige Variabele betrachtet)

$$\zeta = \varrho\,, \quad d\,\xi = d^2\,\xi = d\,\zeta = 0\,, \quad d^2\,\zeta = d^2\,\varrho = -\frac{\Phi}{D^2}\,d\,x^2\,,$$

sowie

$$d^3\,\xi - 3\,d^2\,N\,d\,x = -3\,d\,p\,d^2\,\varrho - \varrho\,d^3\,p = \left(\frac{3\,\Phi}{D} - \frac{1}{D}\,\frac{d^4\,z}{d\,x^4}\right)d\,x^3\,,$$

oder da $d^2\,N = D^2\,d\,x^2$, ist:

$$d^3\,\xi = \frac{2\,\Phi}{D}\,d\,x^3\,.$$

Werden dann ξ und ζ nach Potenzen von x entwickelt, so erhält man

$$\xi = \frac{x^3\,\Phi}{3\,D}\,, \qquad \zeta - \varrho = -\frac{x^2\,\Phi}{2\,D^2}$$

und nach Elimination von x die Gleichung der semikubischen Parabel

$$9\,A\,\xi^2 = -8\,(\zeta - \varrho)^3\,,$$

aus welcher wieder durch Differentiation auf gewöhnliche Weise der Wert A für den Evolutenradius in der Spitze erhalten werden kann.

Für die laterale Aberration in der Fokalebene $\zeta = \varrho$ findet man durch Differentiation der Normalengleichung

$$\xi - x + p\,(\zeta - z) = 0:$$

$$d^3\,\xi = d^3\,x - \varrho\,d^3\,p + 3\,d\,p\,d^2\,z = -\frac{\Phi}{D}\,d\,x^3 = -A\,d\,w^3\,,$$

da nämlich $d^3\,p = (d^4\,z/d\,x^4)\,d\,x^3 + r\,d^3\,x$ ist.

Es ist also die laterale Aberration

$$\xi = -\frac{w^3}{6}\,A$$

und die Beziehung des Aberrationswertes zu den Koeffizienten $\mathfrak{a}$ von Czapski und anderen

$$A = -6\,\mathfrak{a}\,.$$

Durch Differentiation des analytischen Ausdruckes für das Brechungsgesetz und der Normalengleichungen erhält man die für diesen Sonderfall früher bekannte Formel für die Berechnung der Aberration, wobei aber der Abflachungswert der brechenden Fläche mitberücksichtigt wird.

Mit dieser Darstellung der Aberration des axialen Bündels in einem zentrierten System habe ich am einfachsten Beispiele die Methode demonstrieren wollen, welche die Untersuchung der Aberrationen im allgemeinen Fall und die vollständige Diskussion der Sonderfälle ermöglicht hat. Eine solche Untersuchung wäre nach der bisher für die sogenannte sphärische Aberration angewendeten Methode, so weit ich sehen kann, nicht möglich.

Schon bei der Untersuchung der Aberration längs dem axialen Strahle in einem Instrumente für anamorphotische Abbildung scheitert diese Methode, da zwar die in den beiden Hauptschnitten des Instrumentes verlaufenden Strahlen untersucht werden können, wobei sich zwei Aberrationswerte ergeben, die Aberrationen aber erst durch drei voneinander unabhängige Werte bestimmt sind.

In diesen Instrumenten ist das axiale Strahlenbündel zwischen zwei Brechungen astigmatisch mit zwei Symmetrieebenen. Für solche Strahlenbündel ist die Wellenfläche durch die vier geometrischen Größen

$$\Phi' = \frac{d^2 D_{,}}{d s_{,}^2}, \quad \Omega' = \frac{d^2 D_{,}}{d s_{,,}^2}, \quad \Omega'' = \frac{d^2 D_{,,}}{d s_{,}^2}, \quad \Phi'' = \frac{d^2 D_{,,}}{d s_{,,}^2}$$

bestimmt, welche ich in Übereinstimmung mit der für die Asymmetrienwerte angewendete Terminologie benenne, so daß Φ' bez. Ω'' die direkte bez. transversale Abflachung längs der ersten Krümmungslinie messen, die beiden anderen die entsprechende Bedeutung für die zweite Krümmungslinie haben. Die beiden transversalen Abflachungswerte sind aber nicht unabhängig voneinander, wie aus den Beziehungen zu den Differentialquotienten vierter Ordnung der Flächengleichung hervorgeht.

Diese sind im oben angewendeten Koordinatensysteme

$$\Phi' = \frac{\partial^4 x}{\partial x^4} - 3 r^3, \qquad \Omega' = \frac{\partial^4 x}{\partial x^2 \partial y^2} - r t^2,$$

$$\Omega'' = \frac{\partial^4 x}{\partial x^2 \partial y^2} - r^2 t, \quad \Phi'' = \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} - 3 t^3,$$

wonach

$$\Omega' - \Omega'' = D_{,} D_{,,} (D_{,} - D_{,,})$$

ist. Die beiden übrigen Differentialquotienten vierter Ordnung sind bei Vorhandensein von auch nur einer Symmetrieebene in diesem Koordinatensystem gleich Null.

Für das Strahlenbündel kommen die vier Größen

$$A' = \frac{\Phi}{D_,^4}, \quad C' = \frac{\Omega'}{D_,^2 D_{,,}^2}, \quad C'' = \frac{\Omega''}{D_,^2 D_{,,}^2}, \quad A'' = \frac{\Phi''}{D_{,,}^4}$$

zur Verwendung, welche nach entsprechender Terminologie als direkte bez. transversale Aberration im betreffenden Hauptschnitt benannt werden. Die beiden Evolutenschalen haben je eine Kante, welche in einer der Symmetrieebenen liegt. Für ihre Schnittlinien mit der anderen Symmetrieebene gibt der betreffende Wert der direkten Aberration dieselben Beziehungen wie oben der Aberrationswert für das Normalenbündel einer Umdrehungsfläche. Die Krümmung der Kantlinie ist für die erste bez. zweite Schale

$$-\frac{C''}{E^2} \quad \text{bez.} \quad -\frac{C'}{E^2}.$$

Da nun, wie ersichtlich, $C' - C'' = E$, mithin die Differenz der beiden Krümmungen gleich $1/E$ ist, so ist ein Strahlenbündel mit geraden Kantlinien der beiden Evoluten mathematisch unmöglich. Es folgt hieraus, wie schon hervorgehoben worden ist, daß das Konoid von Sturm zwar das astigmatische Strahlenbündel mit zwei Symmetrieebenen repräsentieren kann, dabei aber die beiden Brennlinien nicht gerade sein dürfen, falls überhaupt ein mathematisch mögliches Strahlenbündel dargestellt werden soll. Werden aber im Konoide die Krümmungen der Brennlinien in Übereinstimmung mit dem eben angegebenen Gesetze bestimmt, so hat dasselbe einen Sinn, indem im Modelle die Brennlinien, in der Wirklichkeit die Kantlinien der Evolute eine Strahlenvereinigung zweiter Ordnung bedeuten.

Die Werte für die lateralen Aberrationen eines Strahles sind

$$\xi = -\frac{w_,^3}{6} A' - \frac{w_, w_{,,}^2}{2} C'', \quad \eta = -\frac{w_,^2 w_{,,}}{2} C' - \frac{w_{,,}^3}{6} A'',$$

wobei wie oben erstere in der ersten, letztere in der zweiten Fokalebene gemessen wird. Da nun $C' - C'' = E$ ist, so ist ein astigmatisches Strahlenbündel ohne laterale Aberration mathematisch unmöglich, was mit dem erwähnten Verhalten der Kantlinienkrümmungen in Zusammenhang steht.

In einem Instrumente für anamorphotische Abbildung ist das Strahlenbündel nach der letzten Brechung wieder anastigmatisch, aber vom dem Normalenbündel einer Umdrehungsfläche weit verschieden. In diesem wird der Hauptstrahl in jeder Meridianebene von nächstliegenden Strahlen geschnitten, in jenem nur in zwei oder vier Ebenen je nach der relativen Größe der Aberrationswerte. Solcher gibt es nur drei, da die transversale Aberration in den beiden Symmetrieebenen die gleiche ist. Da die transversale Aberration für den Verlauf der Strahlen in den Winkeln zwischen den beiden Symmetrieebenen bestimmend ist, so bezeichne ich dieselbe im anastigmatischen Strahlenbündel auch als Diagonalaberration. Das Vorhandensein von zwei Hauptschnitten außer den Symmetrieebenen wird durch die Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{A' - 3\,C}{A'' - 3\,C}$$

für die Tangente des Winkels zwischen den betreffenden Hauptschnitten und der ersten Symmetrieebene bestimmt. Wenn die direkten Aberrationswerte beide das Dreifache der diagonalen betragen, so wird die Lage anderer Hauptschnitte nicht mehr durch diese Gleichung bestimmt. Die Wellenfläche hat dabei eine vollständige Berührung vierter Ordnung mit einer Umdrehungsfläche, und es entscheiden erst weitere Differentiationen über die Existenz und Lage anderer Hauptschnitte.

Es ist bekannt, daß eine verschiedene Einstellung eines optischen Instrumentes bei verschieden großer Blende durch die sogenannte sphärische Aberration bedingt wird. Wenn nun in einem anastigmatischen Strahlenbündel die beiden Werte der direkten Aberration nicht identisch sind, so hat dies zur Folge, daß die scharfe Einstellung für solche Linien am Objekte, welche in den Symmetrieebenen verlaufen, nur für eine bestimmte Blendengröße dieselbe sein kann. Das Instrument wirkt also, als ob es längs der Achse mit Astigmatismus behaftet wäre, dessen Grad mit der Blendengröße wechselt. Diese Eigenschaft nenne ich astigmatische Aberration, indem ich den Astigmatismus der Aberration durch die Differenz $A' - A''$ der beiden direkten Aberrationswerte messe. Auf dieselbe Weise messe ich den Diagonalastigmatismus der Aberration durch die Differenz $A' + A'' - 6\,C$. Der Effekt der diagonalastigmatischen Aberration des gebrochenen Strahlenbündels ist die Notwendigkeit einer verschiedenen Einstellung des Instrumentes für die scharfe Abbildung eines in der Objektebene belegenen Kreuzes, je nachdem dessen Linien in den Symmetrieebenen liegen oder einen diagonalen Verlauf haben. Sind die beiden direkten Aberrationswerte gleich, so daß kein Astigmatismus der Aberration vorhanden ist, wobei die Abbildung des Kreuzes in beiden Lagen von der zweiten Ordnung ist, indem die vier Hauptschnitte einen Winkel von 45^0 miteinander bilden, so tritt die eventuell vorhandene diagonalastigmatische Aberration besonders deutlich hervor, wie es die Taf. VIII zeigt, welche die Photographie eines leuchtenden Punktes unter Anwendung eines Objektives mit diagonalastigmatischer Aberration darstellt. Der leuchtende Punkt war ein Sonnenbildchen, das Objektiv eine dem photographischen Teleobjektive ähnliche Kombination aus einer bizylindrischen Lupe und einem positiven Okulare. Die bizylindrische Lupe besteht aus vier planzylindrischen Gläsern, jedes von ca. 16 cm Brennweite, deren konvexe Flächen alle nach dem Okulare gekehrt sind, und von denen die vorderste und hinterste Linse unter sich parallele Achsen haben, welche auf den Achsen der beiden mittleren senkrecht stehen. Der wegen der Dicke der Linse resultierende, sonst unmerkliche Astigmatismus der bizylindrischen Lupe, welcher sich in der empfindlichen Kombination mit dem Okulare bemerkbar macht, wurde durch eine passend eingeschaltete schwache Zylinderlinse behoben. Bei der Reproduktion auf der Tafel ist die Originalphotographie um $^1/_3$ verkleinert worden.

Der Bau der kaustischen Fläche im anastigmatischen symmetrischen Strahlenbündel ist für jeden Fall aus den Aberrationswerten berechnet. Im dargestellten Typus ist dieser relativ einfach. Dieser Typus bietet dadurch Interesse, daß die Strahlengebilde, die wir um die Sterne sehen, durch ähnliche Aberrationsvorgänge höherer Ordnung in der Kristallinse bedingt werden. Auf dem Bau des anastigmatischen Strahlenbündels näher einzugehen, dürfte hier nicht der Platz sein, ich füge nur hinzu, daß die für das astigmatische gegebenen Werte der lateralen Aberrationen eines Strahles auch hier ihre Gültigkeit beibehalten. Die Aberrationswerte des gebrochenen symmetrischen Strahlenbündels erhält man aus den entsprechenden Werten des einfallenden und den Abflachungswerten der brechenden Flächen mittels der von mir angegebenen Formeln.

Für Strahlenbündel mit einer Symmetrieebene kommen, wie auch im allgemeinen Strahlenbündel, dieselben Aberrationswerte wie im symmetrischen zur Verwendung, nur sind einerseits die Relationen der Aberrationswerte zu den Abflachungswerten der Wellenfläche, andererseits die Beziehungen dieser zu den entsprechenden Differentialquotienten der Flächengleichung nicht mehr so einfach. Beim Vorhandensein einer Symmetrieebene gibt es, wie oben gezeigt worden ist, auch nur diese vier Aberrationswerte für die eindeutige Bestimmung des Strahlenbündels, und die Beziehung $C' - C'' = E$ ist allgemeingültig, so daß von den vier Aberrationswerten auch hier nur drei unabhängig sind.

Da die Aberration bei schief einfallenden Strahlenbündeln in zentrierten optischen Systemen neuerdings[1]) Gegenstand der Untersuchung geworden sind, führe ich hier die für die lateralen Aberrationen geltenden Formeln an, um zu zeigen, wie die Abhängigkeit der beiden transversalen Aberrationswerte voneinander auch hier zutage tritt. Wenn nämlich der Ausdruck für die erste laterale Aberration

$$\xi = -\frac{w_{,}^{3}}{6}\,a_1 - \frac{w_{,}\,w_{,,}^{2}}{2}\,a_2$$

geschrieben wird, so kann dem Ausdrucke für die zweite folgende Form gegeben werden[2]):

$$\eta = -\frac{w_{,}^{2}\,w_{,,}}{2}\,(a_2 + E) - \frac{w_{,,}^{3}}{6}\,a_3.$$

Auch im allgemeinen Strahlenbündel sind die Ausdrücke für die lateralen Aberrationen[3]) äußerst einfach, wenn krummlinige Koordinaten zur Verwendung kommen und die Öffnungswinkel längs den abwickelbaren Flächen, nicht längs den Hauptschnitten gerechnet werden.

Die Berechnung der Aberrationswerte im gebrochenen Strahlenbündel mit einfacher Asymmetrie ist einfach eine

---

1) A. König u. M. v. Rohr, l. c. p. 307 ff.

2) l. c., Allgemeine Theorie etc. nach den Formeln p. 39.

3) Ebenda p. 41.

Differentiationsaufgabe und kann sofort ausgeführt werden, wenn ein Bedürfnis dafür vorliegt. Ich habe diese Differentiation nicht ausgeführt, weil ich derselben nicht nötig gehabt habe. Persönlich bin ich auch davon überzeugt, daß es für die nähere Untersuchung eines weit geöffneten asymmetrischen Strahlenbündels vorteilhafter ist, die Asymmetrienwerte nebst den Schnittweiten für ein paar Strahlen zu berechnen als die Aberrationswerte längs einem Hauptstrahle zu suchen.

Aber auch für die nähere Untersuchung weit geöffneter axialer Strahlenbündel dürfte es vorteilhafter sein, Schnittweiten und Asymmetrienwerte für einige mittlere Strahlen und den Randstrahl zu berechnen als die sogenannten Zonen durch Reihenentwickelung mittels der längs dem Hauptstrahl gültigen Aberrationswerte höherer Ordnung zu ermitteln zu suchen. In zentrierten, aus Umdrehungsflächen bestehenden Systemen braucht hierbei nur die direkte Asymmetrie berechnet zu werden, da die transversale numerisch gleich der Brennstrecke multipliziert mit der Kotangente des Winkels ist, den der gebrochene Strahl mit der Achse des Instrumentes bildet, wie aus obiger Darstellung hervorgeht.

Ist z. B. in einem Objektive mit „korrigierter sphärischer Aberration" der Aberrationswert längs der Achse positiv, wobei sogenannte positive Zonen vorhanden sind, und bezeichnet man den daraus resultierenden direkten Asymmetrienwert eines sehr wenig geneigten Strahles im axialen Bündel als positiv, so kann man sofort aus dem Vorzeichen des Asymmetrienwertes längs einem etwas mehr geneigten Strahle ersehen, ob die dem positiven Zonenfehler entsprechende Kante der kaustischen Fläche einer größeren oder geringeren Strahlenneigung als der des untersuchten Strahles entspricht. Bei zunehmender Neigung gegen die Achse bleibt die Asymmetrie erst positiv, um dann durch Null in negative Werte überzugehen. Derjenige Strahl, längs welchem die Asymmetrie behoben ist, schneidet, in die Blendenebene verfolgt, zusammen mit den entsprechenden, in anderen Meridianebenen verlaufenden Strahlen diese Ebene längs einem Kreise, den ich eine Linie $U = 0$ genannt habe. Bei kompliziertem Korrektionszustande können nun mehrere Linien $U = 0$ vorkommen, aber immer wird man, wenn diese bekannt sind, aus der Neigung des entsprechenden Strahles und der längs diesem ermittelten Schnittweite die exakte Lage der Kanten der kaustischen Fläche finden. Die auf einem Meridianschnitte der kaustischen Fläche diesen Kanten entsprechenden Spitzen der Schnittlinie genügen zusammen mit dem Aberrationswerte längs dem Hauptstrahl und der Schnittweite, eventuell auch dem Asymmetrienwerte längs dem Randstrahl zur Konstruktion der kaustischen Fläche, welche den sichersten Grund für die Beurteilung des Korrektionszustandes abgibt.

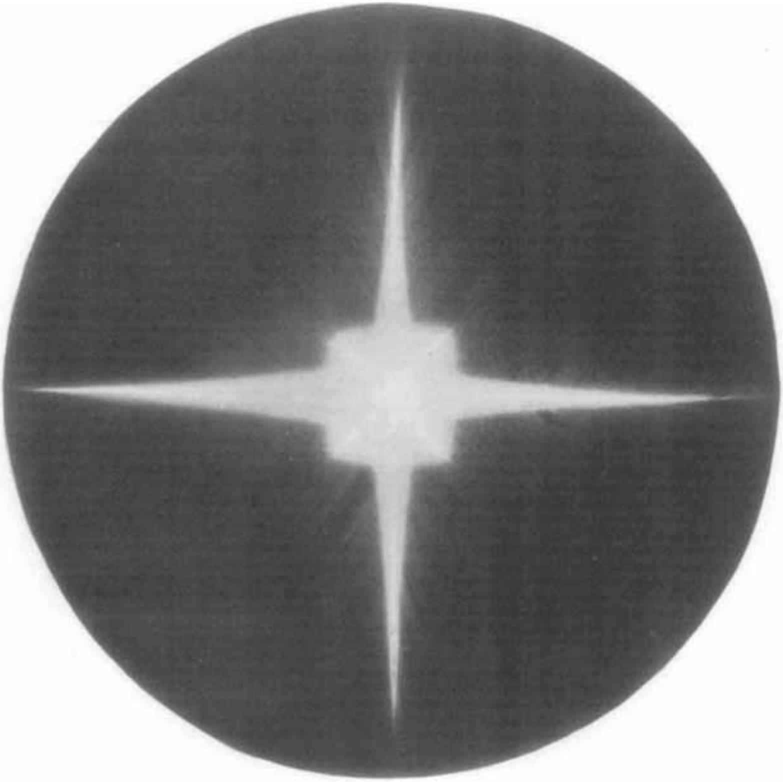
Daß die Methode der Projektion eines Zerstreuungskreises zurück in die Objektebene kein absolutes Maß für diese Beurteilung abgibt, ist ja längst bekannt, da die Abschätzung eigentlich erst dann anfängt, wenn man zu entscheiden hat, wie große Zerstreuungskreise bei dem Zwecke des Instrumentes zulässig sind. Dies hängt aber in erster Linie von der Lichtverteilung innerhalb des Zerstreuungskreises ab, welche sich am leichtesten durch die Form der kaustischen Fläche beurteilen läßt, da jeder Kante eine Lichtkonzentration längs dem dieselbe berührenden Strahle entspricht. Für die Rückprojektion in die Objektebene dürfte auch kein Bedürfnis vorliegen, da auf der Stufe, wo die Aberration untersucht wird, die Vergrößerung des Instrumentes längst bekannt ist, mithin die von der Zerstreuungsfigur gedeckten Details ebenso bequem am Bilde untersucht werden können wie am Objekte.

Es hat ja unter allen Umständen die praktische Erfahrung das letzte Wort in der Frage, wie große Fehler zulässig sind, und eine solche kann ebensogut an die Form der kaustischen Fläche anknüpfen wie an die Größe der in die Objektebene zurückprojizierten Zerstreuungskreise. Für erstere können hinreichend viele mathematisch exakte Data ermittelt werden, letztere sind durch Reihenentwickelung gewonnen.

Vor der Berechnung der Zonenfehler durch Reihenentwickelung mittels Aberrationswerten höherer Ordnung, welche längs der Achse gültig sind, dürfte die Methode der Untersuchung der kaustischen Fläche den Vorteil der mathematischen Genauigkeit haben. Gegenüber der Methode der trigonometrischen Verfolgung möglichst vieler Strahlen verhält sie sich offenbar wie die Berechnung der Schnittweiten mittels der Brechungsformeln gegenüber der Ermittelung derselben durch trigonometrische Verfolgung zweier wenig gegeneinander geneigter Strahlen.

Umgekehrt können die Kanten der kaustischen Fläche und die denselben entsprechenden Linien $U = 0$ in der Blendeebene am fertigen Instrumente experimentell untersucht werden, wodurch die Beschaffung hinreichenden Materiales für die Erfahrung erleichert wird. Auf solche Weise konnte auch der Korrektionszustand des Auges trotz der komplizierten, durch die Kristallinse verursachten Aberrationen höherer Ordnung ermittelt werden.

(Eingegangen 2. November 1905.)



A. Gullstrand.

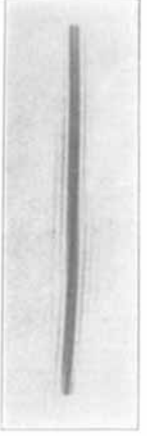


Fig. 2.

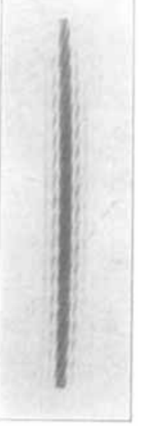


Fig. 3.

E. Gehrcke.