SUR LES CONFIGURATIONS PLANES

DONT CHAQUE POINT SUPPORTE DEUX DROITES;

par M. **Jan de Vries**, à Kampen.

(Extrait d'une Lettre adressée à Mr V. Martinetti)

Adunanza del 10 maggio 1891

. . . .

1. Les configurations aux indices 2 et $\imath$ se rangent en deux groupes : celles du type

$$[(2k+1)n_2, 2n_{2k+1}],$$

à nombre pair de droites, et celles du type

$$(kn_2, n_{2k}),$$

où le nombre des droites est arbitraire

Si, à une cf d'un de ces groupes, on ajoute les intersections de ses droites qui n'appartiennent pas à la cf originale, on obtient un $2n$-latère ou bien un n-latère complet Les droites de la cf. forment avec les points nouveaux une cf appartenant elle même à un des deux types mentionnés Je la nomme la cf. *complémentaire*

Pour la

$$[n(2n-2)_2,\ 2n_{2n-2}]$$

ce complément se réduit à l'ensemble de n points. Si l'on désigne les couples de droites séparées par 1, 2, 3, 4, . $2n-1$, $2n$, ces n points peuvent être représentés par les n symboles $(2k-1)\,2k\,(k=1$ jusqu'à $n)$.

La cf complémentaire d'une

$$[\tfrac{1}{2}n(n-3)_2,\ n_{n-3}]$$

c'est une (n_2, n_2), c'est-à-dire un n-gone ou l'ensemble de quelques polygones.

Configurations $(3n_2, 2n_3)$

2. La cf la plus simple de ce type c'est le quadrilatère complet $(6_2, 4_3)$, dont je désigne les droites par 1, 2, 3, 4, les points par 12, 13, 14, 23, 24, 34.

La cf complémentaire d'une $(9_2, 6_3)$, dont les droites sont indiquées par 1, 2, 3, 4, 5, 6, est évidemment l'ensemble de deux triangles 12, 23, 31 et 45, 56, 64, ou bien un hexagone à sommets 12, 23, 34, 45, 56, 61. On arrive donc aux cfs. représentées par les tableaux suivants, où chaque colonne contient les points d'une droite.

$(9_2, 6_3)$

A

14	24	34	14	15	16
15	25	35	24	25	26
16	26	36	34	35	36

B

13	24	13	14	15	26
14	25	35	24	25	36
15	26	36	46	35	46

La cf. *A* est *atrigone*, c'est-à-dire elle ne contient pas de triangles, dont les éléments appartiennent à la cf, M Martinetti la désigne par le symbole (Δ).

La cf B se présente dans l'étude de la cf. $(12_4, 16_3)B$. (*Voir* mon travail inséré aux *Acta Mathematica*, XII).

3 Supposons que dans une $(3n_2, 2n_3)$ le point ab (intersection des droites a et b) est *atrigone* et que a et b contiennent encore les points ac, ad et be, bf. Or, si la cf. ne comprend pas les points cd, ef, la suppression des droites a, b et des points ab, ac, ad, be, bf fournit une figure dans laquelle chacune des droites c, d, e, f supporte encore deux points En ajoutant maintenant les points cd et ef on arrive à une cf $[3(n-1)_2, 2(n-1)_3]$ où ces deux points sont séparés. Il va sans dire que cette nouvelle cf. pourra être composée de deux cfs $(3p_2, 2p_3)$ et $(3q_2, 2q_3)$, où $p+q=n-1$.

En appliquant la transformation inverse à tous les couples séparés de caractère différent que l'on peut former des points de toutes les cfs. $[3(n-1)_2, 2(n-1)_3]$, on obtiendra les $(3n_2, 2n_3)$ ayant au moins *un* point atrigone.

Considérons maintenant une $(3n_2, 2n_3)$ contenant le triangle (ac, cd, da) et les points ab, cg, dh Ôtons les droites c et d, et ajoutons les points ag et ah, alors la nouvelle figure sera une $[3(n-1)_2, 2(n-1)_3]$

C'est par la transformation inverse qu'on peut se procurer toutes les $(3n_2, 2n_3)$ ayant au moins *un* triangle de cf.

Si les côtés c et d du triangle acd passent par les points de la cf. cg et dg, et que la droite g contient encore le point gi, on aura une $[3(n-2)_2, 2(n-2)_3]$ en supprimant les quatre droites a, c, d, g et en ajoutant le point bi.

Si le point bi se trouve déjà dans la cf. $(3n_2, 2n_3)$ et que les droites b, i supportent encore les points bp et iq, on pourra effectuer la première transformation à l'égard du point bi, c'est-à-dire on supprimera les droites b et i en ajoutant les points ap et gq.

Enfin, il peut arriver que les droites b et i se confondent. Soit alors bf le troisième point de b, tandis que f supporte encore les points fk et fl Or, il nous faut distinguer trois cas, savoir. 1) les droites k et l sont séparées, 2) leur intersection kl appartient à la cf., 3) elles contiennent les points kl, km, lm Il est facile de voir que, dans ces trois cas, on pourra se servir successivement de la 1e, 2e et 3e transformation.

4. Des considérations précédentes il s'en suit, qu'à l'aide des trois transformations suivantes on peut déduire toutes les $(3n_2, 2n_3)$ si les $[3(n-1)_2, 2(n-1)_3]$ et $[3(n-2)_2, 2(n-2)_3]$ sont connues.

a. Transformation atrigone En ajoutant les droites a et b, on remplace les points séparés cd et ef d'une $[3(n-1)_2, 2(n-1)_3]$ par les 5 points ab, ac, ad, be, bf

b. Transformation trigone La droite a contenant les points ab, ag, ah, on enlève ag et ah, et ajoute les droites c, d et les points ac, ad, cd, cg, dh.

c. Transformation ditrigone A une $[3(n-2)_2, 2(n-2)_3]$ on dérobe un point bi en y ajoutant les droites a, c, d, g et les points ac, ad, cd, cg, dg, ab et gi. Dans la nouvelle cf. le point cd est ditrigone.

Évidemment il nous faut effectuer ces transformations encore aux figures composées de deux cfs. $(3k_2, 2k_3)$.

5. En appliquant ces transformations aux cfs $(9_2, 6_3)$ et $(6_2, 4_3)$ on arrive à *cinq* $(12_2, 8_3)$ différentes, représentées par les tableaux suivants :

	14	24	35	14	15	26	17	48
A	15	25	36	24	25	36	37	68
	17	26	37	48	35	68	78	78

	14	24	35	14	15	26	17	38
B	15	25	36	24	25	36	67	48
	17	26	38	48	35	67	78	78

	12	12	13	14	56	56	37	48
C	13	23	23	24	57	67	57	58
	14	24	37	48	58	68	67	68

$(12_2, 8_3)$.

	14	24	35	14	15	26	17	28
D	15	26	36	24	35	36	37	58
	17	28	37	46	58	46	78	78

	13	24	13	14	15	26	27	38
E	14	26	35	24	35	46	57	68
	15	27	38	46	57	68	78	78

.

La $(12_2, 8_3)$ *A* est régulière, elle se compose de deux quadrilatères principaux C'est la figure résiduelle de chaque droite de la cf. 15_3 atrigone de M Martinetti (*Annali di Matematica*, XIV) Encore elle se présente dans l'étude de la $(12_4, 16_3)A$ (la celèbre cf de Hesse).

La $(12_2, 8_3)B$ vient d'être remarquée par M Martinetti dans la $(12_4, 16_3)B$ (*Atti dell'Accademia Gioenia di Catania*, III); elle se compose, de deux manières, de deux quadrangles, de telle sorte que les couples de côtés opposés de l'un d'eux s'appuyent sur deux côtés conjoints de l'autre

6. En effectuant les trois transformations sur les *cinq* $(12_2, 8_3)$, les *deux* $(9_2, 6_3)$ et sur le système de deux $(6_2, 4_3)$, on trouve *dix-neuf* $(15_2, 10_3)$ de caractère différent. Les tableaux de ces cfs. sont publiés dans les *Comptes Rendus de l'Académie hollandaise des Sciences*, VI, p. 382, par une inadvertence j'y ai oublié la dix-neuvième cf que l'on obtient des deux quadrilatères 1234 et 5678 en y ajoutant les droites 9 et 0, tandis qu'on remplace les points 34, 78 par les points nouveaux 39, 49, 70, 80, 90.

La seule $(15_2, 10_3)$ régulière résulte de la 15_3 atrigone, ci-dessus mentionnée, par la suppression d'un de ses six 5-latères principaux.

Configurations $(2n_2, n_4)$.

7. La cf. la plus simple de ce groupe c'est le 5-latère complet $(10_2, 5_4)$, engendré par 5 droites arbitraires.

En ôtant au 6-latère complet $(15_2, 6_5)$, formé par les droites 1, 2, 3, 4 5, 6, les points séparés 12, 34, 56, on trouve *l'unique* cf. $(12_2, 6_4)$

Le 7-latère complet $(21_2, 7_6)$ donne lieu à *deux* $(14_2, 7_4)$ de type différent, elles en résultent par la suppression, ou bien des 7 points 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71, ou bien des 7 points 12, 23, 34, 41, 56, 67, 75.

La cf. complémentaire d'une $(16_2, 8_4)$ c'est une des cinq $(12_2, 8_3)$ ou l'ensemble de deux $(6_2, 4_3)$.

Il y a donc *six* $(16_2, 8_4)$ de caractère différent, on trouve leurs tableaux dans mon travail qui vient d'être cité

La cf complémentaire d'une $(18_2, 9_4)$ étant de nouveau une $(18_2, 9_4)$, il faut imaginer une transformation par laquelle ces cfs se déduisent des $(16_2, 8_4)$

8 Supposé que la droite a d'une $(2n_2, n_4)$ comprend les points b, ac, ad, ae et que les points bc et de n'appartiennent pas à la cf, alors on parvient à une $[2(n-1)_2, (n-1)_4]$ en remplaçant la droite a par les points bc et de.

Si, au contraire, la droite b est séparée des droites c et d, et que b contient les points ab, be, bf, bg, alors b est située de la même manière que la droite a du premier cas.

Enfin il peut arriver que la cf comprend toutes les intersections des droites a, b, c, d, e, excepté le point de, alors, les droites d, e supportant encore les points dh, ei, on aura une $[2(n-5)_2, (n-5)_4]$ en supprimant a, b, c, d, e et en ajoutant le point hi Évidemment ce cas ne se présente que pour $n \geqq 10$

Par les transformations inverses on peut donc parvenir aux $(2n_2, n_4)$, pourvu qu'on connaît toutes les cfs. $[2(n-1)_2, (n-1)_4]$ et $[2(n-5)_2, (n-5)_4]$

Kampen, 18 avril 1891

JAN DE VRIES.