

# Zur Geometrie der Speere im Euklidischen Raume.

Von Wilhelm Blaschke in Bonn.

## Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	201
§ 1. Die komplexen Euklidischen Bewegungen mit den Minimalebene- n als Raumelement . . . . .	203
§ 2. Abbildung der Minimalebene auf die Speere . . . . .	206
§ 3. Endliche Gruppen von Speertransformationen . . . . .	214
§ 4. Speergarben und Speerketten . . . . .	226
§ 5. Speerkugeln und Speerquirle . . . . .	238
§ 6. Die involutorischen Transformationen der Gruppe $(G_{14}, H_{14})$ . . . . .	248
§ 7. Abgeschlossene Speerkontinuen . . . . .	253
§ 8. Komplexe Speere und ihre reelle Darstellung . . . . .	268
§ 9. Isotrope Speerkongruenzen. Die unendliche Gruppe der isotropen Speer- transformationen . . . . .	281
§ 10. Synektische Speerkongruenzen. Die unendliche Gruppe der synektischen Speertransformationen . . . . .	294
§ 11. Zusammenhang der Speergeometrie des Raumes mit der Speergeometrie der Ebene . . . . .	302
Alphabetisches Verzeichnis . . . . .	308

Bildet man jede Minimalebene des Euklidischen Raumes ab auf die in ihr liegende reelle Gerade und macht man die Abbildung dadurch umkehrbar eindeutig, daß man diese Gerade mit einem bestimmten Durchlaufungssinn versieht oder, wie wir uns ausdrücken wollen, sie zu einem „Speere“ orientiert, so geht hierbei die Gruppe der komplexen Bewegungen, welche die Minimalebene untereinander vertauschen, in eine zwölfgliedrige Gruppe  $G_{12}$  von „Speertransformationen“ über, deren Geometrie hier untersucht werden soll.<sup>1)</sup>

Der erste, der hiehergehörige Fragen behandelt hat, ist anscheinend A. Ribaucour, der in seiner Preisschrift über Minimalflächen<sup>2)</sup> auch schon spezielle, besonders elegante Transformationen aus  $G_{12}$  angegeben hat. Allerdings fehlt bei Ribaucour noch völlig die Orientierung der geraden Linien, die eine wesentliche Rolle spielt.

Die Gruppe  $G_{12}$ , auf die Herr E. Study in seiner Geometrie der Dynamen hingewiesen hat,<sup>3)</sup> wurde mittels der angedeuteten Abbildung auf die Bewegungsgruppe durch Herrn E. v. Weber studiert.<sup>4)</sup>

<sup>1)</sup> Die vorliegende Arbeit ist unabhängig von der in den „Monatsh. f. Math. u. Phys.“, Jahrg. 1910, S. 3—60, unter dem Titel „Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene“ vom selben Verfasser veröffentlichten Abhandlung.

<sup>2)</sup> Étude des élassoïdes, Bruxelles Mém. cour. 44 (1880).

<sup>3)</sup> Geom. der Dynamen, Leipzig 1903, S. 230.

<sup>4)</sup> „Die komplexen Bewegungen“, Leipziger Berichte 1903, S. 384—408.

Man kann jedoch auch in einfacher Weise mit Hilfe des Übertragungsprinzips aus der Geometrie der Dynamen<sup>1)</sup> zu unserer Gruppe  $G_{12}$  gelangen. Bildet man die (reellen, eigentlichen) Speere auf die (reell-) „dualen“ Punkte der Einheitskugel ab, so geht hierbei die  $G_{12}$  in die kontinuierliche Gruppe der (reell-) dualen automorphen Kollineationen der Kugel über. Diesen Weg hat im Anschlusse an Study Herr J. Grünwald<sup>2)</sup> bei der Untersuchung von  $G_{12}$  eingeschlagen. In seiner Arbeit ist eine (im allgemeinen) ein-eindeutige Abbildung zwischen den komplex-dualen Zahlen und den (reellen, eigentlichen) Speeren angegeben, von der auch hier Gebrauch gemacht werden soll. Man kommt zu dieser Abbildung einfach dadurch, daß man die Einheitskugel in bekannter Weise als Riemannsche Zahlenkugel auffaßt und dann ins „duale Gebiet“ hinein erweitert.

Hier sollen nun zunächst die Untersuchungen der Herren Weber und Grünwald in einigen Punkten weitergeführt werden, indem die einfachsten in der Geometrie der  $G_{12}$  auftretenden Gebilde eingehend untersucht und gegenüber Bewegungen klassifiziert werden. Dabei ist, wie dies auch bei den genannten Autoren der Fall ist, die Beschränkung auf reelle, eigentliche Speere festgehalten.

Erst später wird ein abgeschlossenes Kontinuum von Speeren angegeben, das nach der Terminologie des Herrn Study als ein gegenüber  $G_{12}$  natürliches Speerkontinuum<sup>3)</sup> zu bezeichnen ist. In diesem Kontinuum werden dann auch komplexe Speere in Betracht gezogen und die komplexen, eigentlichen Speere werden in einfacher Weise dargestellt durch geordnete Paare reeller, eigentlicher Speere. Diese Darstellung steht in einer gewissen Analogie zu einer von E. Laguerre angegebenen Abbildung der komplexen (eigentlichen) Punkte einer (reellen, eigentlichen) Ebene auf die geordneten Paare reeller (eigentlicher) Punkte dieser Ebene, eine Abbildung, die neuerdings durch Herrn Study ausführlich dargelegt worden ist.<sup>4)</sup>

In den letzten Abschnitten der vorliegenden Abhandlung werden einige, im Sinne von S. Lie „unendliche“ Gruppen von Speertransformationen behandelt, die die Gruppe  $G_{12}$  umfassen. So wird z. B. die Gruppe aller Transformationen untersucht, welche die isotropen Kongruenzen von Ribaucour und die Gruppe der Transformationen, welche die synektischen Kongruenzen des Herrn Study untereinander vertauschen. Es ergibt sich hierbei u. a. eine geometrische Deutung in unserem gewöhnlichen Raume

1) G. d. D., § 23, S. 195 u. f.

2) „Duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie“, Monatsh XVII. 1906, S. 81—136. Die genannten Arbeiten von Ribaucour, Weber und Grünwald werden später nur mit den Namen der Autoren zitiert.

3) Vgl. G. d. D. § 27.

4) Siehe den ersten Band der Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Geometrie. Leipzig 1911.

für einige von C. Segre und Study angegebene Sätze aus der Geometrie des vierdimensionalen Raumes.<sup>1)</sup>

Dann deuten wir noch eine Abbildung der (komplexen, eigentlichen) Speere des Raumes auf die geordneten Paare von (komplexen, eigentlichen) Speeren einer Euklidischen Ebene an, bei der die synektischen Kongruenzen in die sogenannten äquivalenten Berührungstransformationen<sup>2)</sup> übergeführt werden.

Zum Schlusse geben wir der leichteren Lesbarkeit halber ein Verzeichnis der angewendeten Kunstausdrücke mit Hinweisungen auf die Stellen, an denen sie erklärt sind.

**§ 1. Die komplexen Euklidischen Bewegungen mit den Minimal-ebenen als Raumelement.**

Jede eigentliche Ebene des Euklidischen Raumes, welche den absoluten Kegelschnitt berührt, wird eine Minimalebene genannt. Die uneigentliche Ebene rechnen wir nicht zu den Minimalebenen. Benützen wir sogenannte Hessesche Koordinaten, d. h.

homogen geschriebene rechtwinklige Punktkoordinaten  $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$  und schreiben die Gleichung einer Ebene in der Form  $u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ , so sind die Minimalebenen durch die Bedingung

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

gekennzeichnet, wenn man die Voraussetzung hinzufügt, daß  $u_1, u_2$  und  $u_3$  nicht gleichzeitig verschwinden.

Damit ist also die Mannigfaltigkeit der Minimalebenen durch vier komplexe Verhältnissgrößen mit einer quadratischen Bedingungs-gleichung dargestellt. Wir können aber auch eine Darstellung durch unabhängige Koordinaten erreichen, wenn wir setzen

$$(1) \quad u_0 : u_1 - i u_2 : u_1 + i u_2 : u_3 = i t_{00} : -t_1^2 : t_2^2 : t_1 t_2, \quad \{i = \sqrt{-1}\}$$

$$(1^*) \quad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = -2i t_{00} : t_1^2 - t_2^2 : i(t_1^2 + t_2^2) : -2t_1 t_2.$$

Jetzt entspricht jedem Tripel von komplexen Zahlen  $t_{00}, t_1, t_2$  (nur die Tripel  $t_{00}, 0, 0$  müssen wir ausschließen) eine einzige Minimalebene. Erklären wir ferner die Koordinaten  $t$  als „homogen“ in dem Sinne, daß wir die beiden Tripel  $t_{00}, t_1, t_2$  und  $\rho^2 t_{00}, \rho t_1, \rho t_2$ , wobei  $\rho$  einen komplexen, von Null verschiedenen Proportionalitätsfaktor bedeutet, als äquivalent ansehen, so entspricht auch umgekehrt jeder Minimalebene im wesentlichen ein einziges System von Koordinaten  $t_{00}, t_1, t_2$ . Wir werden später auch nicht-homogene Koordinaten verwenden, nämlich

<sup>1)</sup> Segre: Le rappresentazioni reali delle forme complesse..., Math. Annalen, XL. (1892) und Study: Sugli enti analitici. Rend. di Palermo 1906.

<sup>2)</sup> Vgl. Enzyklopädie d. m. W., III A B 4 b. G. Fano: Nr. 24, S. 347.

$$(2) \quad t = \frac{t_2}{t_1}, \quad T = \frac{t_{00}}{t_1^2}.$$

Dieser Darstellung entziehen sich allerdings die Minimalebene des Büschels

$$t_1 = 0 \text{ oder } u_1 - i u_2 = 0, u_3 = 0.$$

Die beiden obigen Gleichungen lauten unhomogen geschrieben

$$(3) \quad u_0 : u_1 - i u_2 : u_1 + i u_2 : u_3 = i T : -1 : t^2 : t$$

$$(3^*) \quad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = -2 i T : (1 - t^2) : i(1 + t^2) : -2 t.$$

Für das Folgende ist es zweckmäßig, die Mannigfaltigkeit einer reellen Veränderlichen als „einfach unendlich“ ( $\infty^1$ ) und daher die einer komplexen Veränderlichen als „doppelt unendlich“ ( $\infty^2$ ) zu bezeichnen.

Die Gruppe der komplexen Ähnlichkeitstransformationen des Raumes enthält 7 komplexe Parameter, wir werden sie daher eine 14-gliedrige Gruppe  $\Gamma_{14}$  nennen. Da die Ähnlichkeitstransformationen die Minimalebene unter sich vertauschen, so können wir die  $\Gamma_{14}$  durch unsere Koordinaten  $t_{00}, t_1, t_2$  darstellen. Um zu erkennen, wie sich diese beiden Transformationen von  $\Gamma_{14}$  substituieren, beachten wir zunächst, daß die Tangenten des absoluten Kegelschnittes

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

auf das binäre Gebiet der Veränderlichen  $t_1 : t_2$  bezogen sind. Da nun bei einer äquiformen Transformation die Tangenten des absoluten Kegelschnittes projektiv untereinander vertauscht werden, so müssen sich die Veränderlichen  $t_1$  und  $t_2$  linear homogen substituieren. Da andererseits die Ebenenkoordinaten  $u_i$  sich linear durch die Größen  $t_{00}, t_1^2, t_1 t_2, t_2^2$  ausdrücken und umgekehrt, und da ferner eine Ähnlichkeit durch eine lineare, homogene Substitution der  $u_i$  dargestellt wird, so müssen sich die Koordinaten  $t_{00}, t_1, t_2$  hierbei folgendermaßen untereinander vertauschen

$$(4) \quad \begin{cases} t_{00}^* = x \cdot \delta t_{00} + c_{11} t_1^2 + 2c_{12} t_1 t_2 + c_{22} t_2^2, \\ t_1^* = a_{11} t_1 + a_{12} t_2, \\ t_2^* = a_{21} t_1 + a_{22} t_2. \end{cases} \quad \{\delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}\}$$

Damit dadurch eine wirkliche Transformation gegeben ist, müssen wir jedenfalls

$$(4) \quad x \neq 0 \text{ und } \delta \neq 0$$

voraussetzen.

Bis jetzt ist gezeigt, daß sich jede äquiforme Abbildung in den Koordinaten  $t_{00}, t_1, t_2$  in die Form (4) bringen läßt. Man kann aber auch umgekehrt zeigen, daß die Formeln (4) bei einer im übrigen beliebigen Wahl der Koeffizienten  $\alpha, \delta, c, a$  stets eine Ähnlichkeitstransformation darstellen (was ja durch eine Abzählung der Konstanten schon anschaulich gemacht wird), indem man nämlich auf die Koordinaten  $u$  zurückgeht. Man erhält so lineare Transformationen der  $u$ , die das absolute Gebilde als Ganzes in Ruhe lassen, also tatsächlich Ähnlichkeitstransformationen.

Führt man nach der Transformation mit den Koeffizienten  $\alpha^{(1)}, \delta^{(1)}, a_{ik}^{(1)}, c_{ik}^{(1)}$  eine weitere mit den Koeffizienten  $\alpha^{(2)}, \delta^{(2)}, a_{ik}^{(2)}, c_{ik}^{(2)}$  aus, so erhält man eine neue Transformation von  $\Gamma_{14}$ , deren Koeffizienten wir  $\alpha, \delta, a_{ik}, c_{ik}$  nennen wollen. Es ist dann  $\alpha = \alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)}$  und  $\delta = \delta^{(1)} \cdot \delta^{(2)}$ . Berücksichtigt man noch, daß die Koeffizientensysteme  $\alpha, \delta, a_{ik}, c_{ik}$  und  $\alpha, \delta \rho^2, a_{ik} \rho, c_{ik} \rho^2$   $\{\rho \neq 0\}$  äquivalent sind, so erkennt man, daß durch die Bedingung  $\alpha = 1$  eine invariante Untergruppe  $\Gamma_{12}$  von  $\Gamma_{14}$  charakterisiert ist, nämlich die Gruppe der Bewegungen.  $\alpha = -1$  gibt die „Nebengruppe“ der Umlegungen.

Schreiben wir die Formeln (4) noch in unhomogener Form

$$(5) \quad \begin{cases} t^* = \frac{a_{21} + a_{22} t}{a_{11} + a_{12} t}, \quad \{\alpha \neq 0, \delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0\} \\ T^* = \frac{\alpha \delta}{(a_{11} + a_{12} t)^2} T + \frac{c_{11} + 2 c_{12} t + c_{22} t^2}{(a_{11} + a_{12} t)^2}. \end{cases}$$

Für die Bewegungen ( $\alpha = 1$ ) ist es zweckmäßig, die von Herrn Study so benannten dualen Größen<sup>1)</sup> zu verwenden. Es sei  $A_{rs} = a_{rs} + \varepsilon b_{rs}$ , wo  $a_{rs}$  und  $b_{rs}$  gewöhnliche komplexe Zahlen sind und die neue Einheit  $\varepsilon$  der Rechenregel  $\varepsilon^2 = 0$  genügt. Setzen wir nun

$$(6) \quad S = t + \varepsilon T,$$

so lassen sich die Formeln (5) für den Fall der Bewegungen zusammenfassen

$$(7) \quad S^* = \frac{A_{21} + A_{22} S}{A_{11} + A_{12} S}.$$

Dabei sind die komplex-dualen Größen  $A_{rs}$  nur der Bedingung unterworfen, daß der „skalare“, d. h. von  $\varepsilon$  freie Teil der Determinante  $A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}$  von Null verschieden sei. Die skalaren Bestandteile  $a_{rs}$  der  $A_{rs}$  stimmen mit den in (5) so bezeichneten Größen überein, während zwischen den „vektoriellen“ Teilen  $b_{rs}$  der  $A_{rs}$  und den  $c_{ik}$  der zweiten Formel (5) die Beziehungen bestehen

<sup>1)</sup> Geom. d. Dyn. S. 195 u. f.

$$(8) \quad \begin{cases} a_{11} b_{21} - a_{21} b_{11} & = c_{11}, \\ a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11} + a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12} & = 2c_{12}, \\ a_{12} b_{22} - a_{22} b_{12} & = c_{12}, \end{cases}$$

woraus die  $b_r$ , bei gegebenen  $a_{ik}$  und  $c_{ik}$  bis auf additive Vielfache der  $a_r$ , bestimmt sind.<sup>1)</sup>

## § 2. Abbildung der Minimalebenen auf die Speere.

In jeder Minimalebene  $u$  liegt eine reelle eigentliche Gerade Linie, nämlich die Schnittlinie mit der konjugiert-imaginären Minimalebene  $\bar{u}$ .<sup>2)</sup> Nun erfolgt die „Orientierung“ einer eigentlichen Geraden zu einem „Speere“ durch die Entscheidung über das Vorzeichen einer Quadratwurzel und dieselbe Quadratwurzel tritt auch auf bei der Bestimmung der beiden durch die Gerade hindurchgehenden Minimalebenen. Daraus erhellt, daß man zwischen den Minimalebenen und den *reellen, eigentlichen, mit einem Durchlaufungssinn versehenen Geraden*, oder *Speeren* eine umkehrbar eindeutige Beziehung herstellen kann.<sup>3)</sup>

Dies folgt auch unmittelbar aus der v. Staudtschen reellen Abbildung imaginärer Ebenen. Eine Minimalebene wird nach Staudt auf eine Rechtwinkelinvolution um ihre reelle Gerade und einen Drehungssinn um diese Gerade dargestellt; nun kann man doch den Drehungssinn um eine (reelle, eigentliche) Gerade mit ihrem Durchlaufungssinn in eine umkehrbar eindeutige Beziehung bringen. Damit ist dann wieder die gewünschte Zuordnung zwischen den Minimalebenen und Speeren hergestellt.

Wir wollen den Drehungssinn um einen Speer positiv nennen, der einem Beobachter nach links zu weisen scheint, wenn er so auf dem Speere liegt, daß die Richtung des Speeres mit der Richtung von den Füßen zum Kopfe übereinstimmt. Wir setzen ferner, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, im folgenden unser (reelles) rechtwinkliges Achsenkreuz  $x_1, x_2, x_3$  als ein „englisches“ voraus, d. h. die kleinste Drehung, welche die positive Achse der  $x_k$

<sup>1)</sup> Zwischen den  $A_{rs}$  und den dualen Bewegungsparametern  $\alpha_k = \alpha_k + \varepsilon \beta_k$  des Herrn Study (vgl. G. d. D., S. 174 u. f. u. S. 557) bestehen die Beziehungen

$$(9) \quad \begin{aligned} A_{11} &= \alpha_0 + i\alpha_3, & A_{12} &= \alpha_2 + i\alpha_1, \\ A_{21} &= -\alpha_2 + i\alpha_1, & A_{22} &= \alpha_0 - i\alpha_3. \end{aligned}$$

Somit sind wir auf einfache Weise zu diesen Parametern gekommen. Die Formeln (7) und (9) finden sich bei J. Grünwald a. a. O. S. 107. (41), und bei Study „Zur Differentialgeom. d. analytischen Kurven“ Transactions of the Am. math. soc. S. 41, (56) (1909); sie gehen durch das Übertragungsprinzip der G. d. Dyn. hervor aus analogen Formeln der sphärischen Geometrie, die von Gauß und Cayley herrühren.

<sup>2)</sup> Durch den Querstrich deuten wir den Übergang zu konjugiert-komplexen Figuren oder zu konjugiert-komplexen Werten an.

<sup>3)</sup> Wir beschränken also vorläufig den Begriff des Speeres auf reelle, eigentliche, orientierte Gerade.

mit der positiven Achse der  $x_{k+1}$  zur Deckung bringt, soll um die Achse der positiven  $x_{k+2}$  (der Index ist natürlich nach dem Modul 3 zu nehmen) im positiven Sinne erfolgen (vgl. Fig. 1, S. 210).

Wir wenden uns jetzt dazu, die Zuordnung zwischen den Speeren und den Minimalebene analytisch zu formulieren. Für die Koordinaten zweier konjugiert-imaginärer Minimalebene haben wir [vgl. Formel (3\*) in § 1] die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} u_0 : u_1 : u_2 : u_3 &= -2iT : (1-t^2) : i(1+t^2) : -2t \\ \bar{u}_0 : \bar{u}_1 : \bar{u}_2 : \bar{u}_3 &= 2i\bar{T} : (1-\bar{t}^2) : -i(1+\bar{t}^2) : -2\bar{t}. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt z. B.  $\left| \begin{matrix} u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 \end{matrix} \right| = \rho \mathfrak{X}_{01}$ , so erhalten wir bei geeigneter Wahl des Proportionalitätsfaktors  $\rho$

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} &= \frac{t+\bar{t}}{1+t\bar{t}}, & \mathfrak{X}_{02} &= -i \frac{t-\bar{t}}{1+t\bar{t}}, & \mathfrak{X}_{03} &= \frac{1-t\bar{t}}{1+t\bar{t}}; & (\mathfrak{X}) \\ \mathfrak{X}_{23} &= \frac{T+\bar{T}-(t^2\bar{T}+\bar{t}^2T)}{(1+t\bar{t})^2}, & \mathfrak{X}_{31} &= -i \frac{T-\bar{T}-(t^2\bar{T}-\bar{t}^2T)}{(1+t\bar{t})^2}, \\ & & \mathfrak{X}_{12} &= -2 \frac{t\bar{T}+\bar{t}T}{(1+t\bar{t})^2}. & & (\mathfrak{X}) \end{aligned} \right.$$

Die Verhältnisse der  $\mathfrak{X}_{rs}$  sind die Plücker'schen Linienkoordinaten der Schnittlinie von  $u$  mit  $\bar{u}$ . Wir haben  $\rho$  so bestimmt, daß  $\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 1$  wird; wir können daher die  $\mathfrak{X}_{0k}$  als die Richtungskosinus des Speeres, welcher der Minimalebene  $u$  zugeordnet wird, definieren.

Lösen wir die Gleichungen (1) noch nach  $t$  und  $T$  auf

$$(2) \left\{ \begin{aligned} t &= \frac{\mathfrak{X}_{01} + i\mathfrak{X}_{02}}{1 + \mathfrak{X}_{03}} = \frac{1 - \mathfrak{X}_{03}}{\mathfrak{X}_{01} - i\mathfrak{X}_{02}}, \\ T &= \frac{(1 + \mathfrak{X}_{03})(\mathfrak{X}_{23} + i\mathfrak{X}_{31}) - (\mathfrak{X}_{01} + i\mathfrak{X}_{02})\mathfrak{X}_{12}}{(1 + \mathfrak{X}_{03})^2} \\ &= -\frac{(1 - \mathfrak{X}_{03})(\mathfrak{X}_{23} - i\mathfrak{X}_{31}) + (\mathfrak{X}_{01} - i\mathfrak{X}_{02})\mathfrak{X}_{12}}{(\mathfrak{X}_{01} - i\mathfrak{X}_{02})^2}, \end{aligned} \right.$$

so haben wir die gewünschte Zuordnung erreicht.

Wegen der unhomogenen Parameter entziehen sich, wie schon oben bemerkt wurde, die Minimalebene des Büschels  $u_1 - iu_2 =$

$= 0$ ,  $u_3 = 0$  und daher die Speere, welche zur Achse der positiven  $x_3$  gegenseitig parallel oder „antitaktisch“, also zur Achse der negativen  $x_3$  „syntaktisch“ sind, unserer Darstellung.<sup>1)</sup>

Auch hier ist es zweckmäßig, duale Verbindungen einzuführen. Wir setzen

$$(3) \quad S = t + \varepsilon T, \\ X_1 = x_{01} + \varepsilon x_{23}, \quad X_2 = x_{02} + \varepsilon x_{31}, \quad X_3 = x_{03} + \varepsilon x_{12}$$

(die Verhältnisse der  $X_k$  sind dann die dualen Strahlenkoordinaten von Study) und finden an Stelle der Formeln (1) und (2)

$$(4) \quad X_1 = \frac{S + \bar{S}}{1 + S\bar{S}}, \quad X_2 = -i \frac{S - \bar{S}}{1 + S\bar{S}}, \quad X_3 = \frac{1 - S\bar{S}}{1 + S\bar{S}}, \quad (X)$$

$$(5) \quad S = \frac{X_1 + iX_2}{1 + X_3} = \frac{1 - X_3}{X_1 - iX_2}.$$

Wir geben schließlich noch an, wie sich die Koordinaten  $x_{11}, x_{22}, x_{33}$  des Fußpunktes vom Anfangspunkte  $o$  auf unseren Speer  $S$  durch die Parameter  $t, T$  ausdrücken. Beachtet man nämlich, daß die  $x_{kk}$  gleich den zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{23} & x_{31} & x_{12} \end{vmatrix}$$

sind, so erhält man:

$$(6) \quad x_{11} = i \frac{T - \bar{T} + t^2 \bar{T} - \bar{t}^2 T}{(1 + t\bar{t})^2}, \quad x_{22} = \frac{T + \bar{T} + t^2 \bar{T} + \bar{t}^2 T}{(1 + t\bar{t})^2}, \\ x_{33} = 2i \frac{t\bar{T} - \bar{t}T}{(1 + t\bar{t})^2}; \quad (\underline{X})$$

$$(7) \quad T = \frac{(1 - x_{03})(x_{23} + ix_{11}) + i(x_{01} - ix_{02})x_{33}}{(x_{01} - ix_{02})^2} = \\ = \frac{(1 + x_{03})(x_{22} - ix_{11}) + i(x_{01} + ix_{02})x_{33}}{(1 + x_{03})^2},$$

<sup>1)</sup> Die Ausdrücke „syntaktisch“ und „antitaktisch“ sind von Herrn Study eingeführt worden.

Man kann die angeführten Ausnahmen dadurch beseitigen, daß man mit Herrn Grünwald „unendlich-große“ duale Größen einführt. Doch läuft dies natürlich nur darauf hinaus, für einen Grenzübergang eine abkürzende Bezeichnung einzuführen.

<sup>2)</sup> Der Querstrich deutet auch hier den Zeichenwechsel von  $i$  (und nicht etwa von  $\varepsilon$ ) an.

$$(8) \quad T = \frac{(\mathfrak{X}_{23} + i\mathfrak{X}_{31}) - i(\mathfrak{X}_{11} + i\mathfrak{X}_{22})}{(1 + \mathfrak{X}_{03})^2} = \frac{(\mathfrak{X}_{23} - i\mathfrak{X}_{31}) - i(\mathfrak{X}_{11} - i\mathfrak{X}_{22})}{(\mathfrak{X}_{01} - i\mathfrak{X}_{02})^2};$$

$$(9) \quad \mathfrak{X}_{23}^2 + \mathfrak{X}_{31}^2 + \mathfrak{X}_{12}^2 = \mathfrak{X}_{11}^2 + \mathfrak{X}_{22}^2 + \mathfrak{X}_{33}^2 = 4 \frac{T\bar{T}}{(1 + t\bar{t})^2} = T\bar{T}(1 + \mathfrak{X}_{03})^2.$$

Wir wollen nun dazu übergehen, unsere Formeln zu deuten und insbesondere zu ermitteln, welche geometrische Bedeutung die komplexen Zahlen  $t$  und  $T$  für den zugehörigen Speer  $S$  haben. Wir führen, um uns leichter ausdrücken zu können, noch einige Bezeichnungen ein.

Wir nennen, wie dies schon in den Formeln angedeutet ist; die Vektoren mit den Koordinaten  $\mathfrak{X}_{01}, \mathfrak{X}_{02}, \mathfrak{X}_{03}; \mathfrak{X}_{23}, \mathfrak{X}_{31}, \mathfrak{X}_{12}, \mathfrak{X}_{11}, \mathfrak{X}_{22}, \mathfrak{X}_{33}$  entsprechend  $\underline{\mathfrak{X}}, \underline{\mathfrak{X}}, \underline{\mathfrak{X}}$ . Ferner sei  $\underline{\mathfrak{X}}$  der „duale Vektor“ mit den Koordinaten  $X_1, X_2, X_3$ . Die geometrische Deutung der reellen Vektoren ist die folgende: Der Einheitsvektor  $\underline{\mathfrak{X}}$  ist zu dem Speere  $S$  syntaktisch. Heftet man seinen Anfangspunkt am Koordinatenursprung  $o$  an, so beschreibt sein Endpunkt „das sphärische Bild“ des Speerraumes. Der Vektor  $\underline{\mathfrak{X}}$  ist normal zur Verbindungsebene von  $o$  mit dem Speere  $S$  und so gerichtet, daß  $S$  im positiven Sinne um den in  $o$  angehefteten Vektor  $\underline{\mathfrak{X}}$  dreht. Seine Länge ist gleich der Entfernung von  $o$  und  $S$ .  $\underline{\mathfrak{X}}$  ist der Vektor, dessen Anfangspunkt in  $o$  und dessen Endpunkt  $\bar{\underline{\mathfrak{X}}}$  der Fußpunkt des Lotes von  $o$  auf  $S$  ist. Bezeichnet man das „äußere Produkt“ zweier Vektoren  $\underline{\mathfrak{X}}$  und  $\underline{\mathfrak{X}}$  mit  $\hat{\underline{\mathfrak{X}}}\underline{\mathfrak{X}}$ ,<sup>1)</sup> so bestehen die Beziehungen

$$(10) \quad \underline{\mathfrak{X}} = \hat{\underline{\mathfrak{X}}}\underline{\mathfrak{X}}, \quad \underline{\mathfrak{X}} = -\hat{\underline{\mathfrak{X}}}\underline{\mathfrak{X}}, \quad \underline{\mathfrak{X}} = \frac{\hat{\underline{\mathfrak{X}}}\underline{\mathfrak{X}}}{(\underline{\mathfrak{X}}|\underline{\mathfrak{X}})} = \frac{\underline{\mathfrak{X}}\hat{\underline{\mathfrak{X}}}}{(\underline{\mathfrak{X}}|\underline{\mathfrak{X}})},$$

wobei z. B.  $(\underline{\mathfrak{X}}|\underline{\mathfrak{X}})$  das „innere Quadrat“ (9) des Vektors  $\underline{\mathfrak{X}}$  bedeutet.

Aus den ersten drei der Formeln (1) entnimmt man, daß durch die Angabe von  $t$  das sphärische Bild eines Speeres bestimmt ist, und umgekehrt [vgl. die erste Formel (2)]. Benützt man die Ebene  $x_1, x_2$  als Gaußsche Ebene für die komplexe Zahl  $t$ , so daß die positive reelle und die positive imaginäre Achse mit der Achse der positiven  $x_1$  und  $x_2$  zusammenfallen, so erhält man das sphärische Bild aus der Gaußschen Ebene der  $t$  durch stereographische Projektion aus dem „Südpol“  $s$  ( $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -1$ ) der Einheitskugel.

Durch die Angabe von  $T$  wird jetzt noch die Lage des Speeres  $S$  in dem Bündel der zu ihm syntaktischen Speere festgelegt, und zwar in folgender Weise. Wir überdecken die Ebene  $x_1, x_2$  noch mit einer Gaußschen Ebene für  $T$ , die ihren Anfangspunkt ( $T=0$ )

<sup>1)</sup> d. h.  $\hat{\underline{\mathfrak{X}}}\underline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{12} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{31}$  u. s. w.

im Punkte  $t \left( x_1 = \frac{t + \bar{t}}{2}, x_2 = \frac{t - \bar{t}}{2i}, x_3 = 0 \right)$  hat und deren positive reelle und imaginäre Achse zu den Achsen der positiven  $x_1$  und  $x_2$  syntaktisch sind. Der Punkt  $t$  bildet sich stereographisch auf den Punkt  $t_x \xrightarrow{o} t_x = \mathfrak{X}$  der Einheitskugel ab, der das sphärische Bild des Speeres ist; die Tangentialebene  $\tau$  in  $t_x$  beziehen wir nun ähnlich auf die Gaußsche Ebene der  $T$ , und zwar so, daß diese Ähnlichkeit die Umgebung des Punktes  $t_x$  auf die Umgebung von  $t$

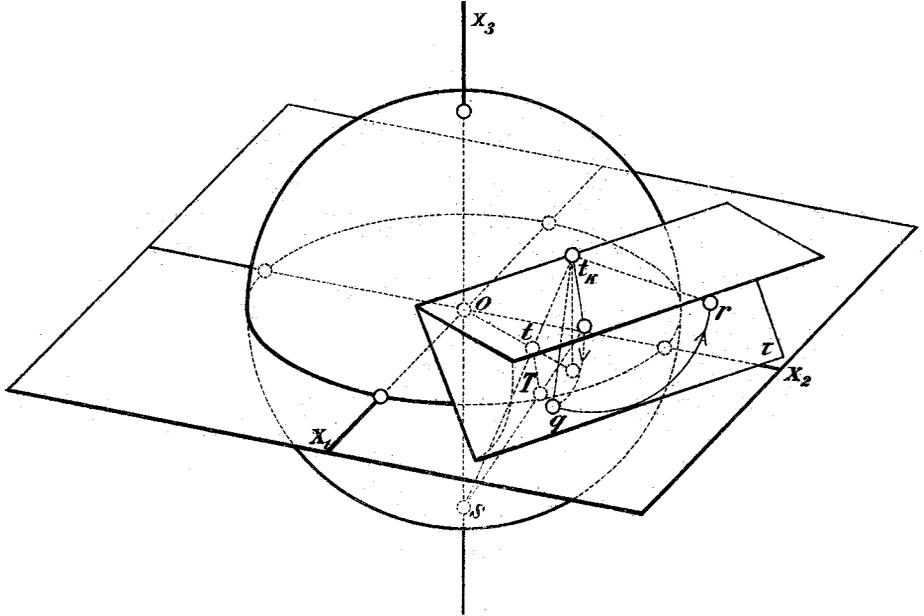


Fig. 1.

in erster Annäherung ebenso abbildet, wie die stereographische Projektion. In dieser Ähnlichkeit entspricht jedem Punkte  $T \left( x_1 = \frac{t + \bar{t}}{2} + \frac{T + \bar{T}}{2}, x_2 = \frac{t - \bar{t}}{2i} + \frac{T - \bar{T}}{2i}, x_3 = 0 \right)$  ein Punkt  $q$  ( $oq = \mathfrak{X} + \underline{\mathfrak{X}}$ ) von  $\tau$ . Dreht man diesen im positiven Sinne um den Speer  $o \xrightarrow{t_x}$  durch einen rechten Winkel, so erhält man den Durchstoßpunkt  $p$  ( $op = \mathfrak{X} + \underline{\mathfrak{X}}$ ) der Tangentialebene  $\tau$  in  $t_x$  mit dem gesuchten Speere  $S$ .

Die Ähnlichkeit zwischen der Gaußschen Ebene der  $T$  und der Tangentialebene  $\tau$  kann man dadurch herstellen, daß man zu-

nächst die Ebene der  $T$  zentral aus dem Südpol der Einheitskugel auf eine parallele und, wie wir uns denken wollen, horizontale Ebene durch  $t_n$  projiziert und diese dann in bestimmter Weise um die horizontale Kugeltangente in  $t_n$  in die Ebene  $\tau$  hineinklappt. Die Ähnlichkeit ist eine „eigentliche“ (d. h. gleichsinnige), wenn wir die Richtung der positiven  $x_3$  der Richtung  $\rightarrow t_n$  zuordnen. Als wichtigstes Ergebnis merken wir an:

Hält man den Wert von  $t$  fest und läßt man  $T$  variieren, d. h. betrachtet man ein Bündel syntaktischer Speere, so ist jede Normalebene des Bündels auf die Gaußsche Ebene der  $T$  ähnlich, und zwar in dem erklärten Sinne *eigentlich* ähnlich bezogen.

Die Entwicklungen dieses und des vorigen Abschnittes sind zum Teile in der angegebenen Arbeit von J. Grünwald enthalten, insbesondere die Zuordnung zwischen Speeren und dualen Zahlen.

Wir haben jetzt die zwei Abbildungen gefunden, die für das Folgende grundlegend sind: Zuerst die Abbildung der Speere auf die Minimalebene (wir nennen diese im Folgenden kurz „die erste Abbildung“) und damit auf die dualen Größen und an zweiter Stelle die Abbildung der Speere auf die „dualen Punkte“  $X$  mit den Koordinaten  $X_1, X_2, X_3$  auf der Einheitskugel („die zweite Abbildung“). Die zweite Abbildung gibt uns Gelegenheit, einen ausgedehnten Gebrauch von dem Übertragungsprinzip aus der Geometrie der Dynamen zu machen.

Es sei hier daran erinnert, welche Bedeutung der ins duale Gebiet erweiterte Winkelbegriff oder der duale sphärische Abstand zweier dualer Punkte  $X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$  der Einheitskugel für die zugehörigen Speere  $S^{(1)}$  und  $S^{(2)}$  hat: Es entspricht ihm der (abgesehen vom Vorzeichen mod.  $2\pi$  bestimmte) „duale Winkel“ der Speere  $S^{(1)}$  und  $S^{(2)}$ , nämlich die duale Größe

$$(11) \quad \text{Winkel } (S^{(1)}, S^{(2)}) + \varepsilon \text{ Abstand } (S^{(1)}, S^{(2)}) = \alpha + \varepsilon p.$$

Hierbei sind noch die Vorzeichen der beiden Bestandteile an einander gebunden, welchem Umstande die geometrische Tatsache entspricht, daß, sobald die gemeinsame Normale der beiden Speere zu einem Speere orientiert ist, sowohl dem Winkel wie dem Abstände ein bestimmtes Vorzeichen zuzuschreiben ist. Bezeichnen wir das „innere Produkt“ der dualen Vektoren  $X^{(1)}$  und  $X^{(2)}$ , d. h. die duale Größe  $X_1^{(1)} X_1^{(2)} + X_2^{(1)} X_2^{(2)} + X_3^{(1)} X_3^{(2)}$  mit  $(X^{(1)} | X^{(2)})$ , so ist z. B.

$$(12) \quad (X^{(1)} | X^{(2)}) = \cos \alpha - \varepsilon p \sin \alpha,^1)$$

wie man durch Sonderung der skalaren und vektoriiellen Teile leicht bestätigen kann.

<sup>1)</sup> Vgl. Geom. der Dynamen, S. 205.

Im folgenden werden wir an einigen Stellen eine „Bewegung“ vom ersten Freiheitsgrade zu betrachten haben, die man dadurch herstellen kann, daß man eine (reelle, eigentliche) Gerade des bewegten starren Raumes als Ganzes festhält, während man einen (reellen, eigentlichen) Punkt dieses Raumes auf einer (reellen, eigentlichen) festen Ebene führt, die zu der festen Geraden nicht parallel ist.<sup>1)</sup>

Nebenbei bemerkt, kann man zu dieser Bewegung auch mit Hilfe unserer zweiten Abbildung kommen, und zwar durch folgende Betrachtung. Man stelle zunächst die zweigliedrige Gruppe der dualen Drehungen um einen dualen Durchmesser der Einheitskugel so dar, daß man die Tangente des halben dualen Drehungswinkels als Parameter einführt. Läßt man dann diesen Parameter eine Staudtsche „Kette“ von Werten durchlaufen, d. h. ein eindimensionales kontinuierliches System von (reell-) dualen Größen, deren beliebige vier ein reelles Doppelverhältnis bestimmen, so wird aus der zweigliedrigen Gruppe eine eingliedrige Schar von dualen Drehungen herausgehoben. Dieser entspricht vermöge der zweiten Abbildung die eben definierte eingliedrige Schar von Schraubungen. In rechtwinkligen Punktkoordinaten kann diese so dargestellt werden:

$$(13) \quad \begin{cases} x_1^* = x_1 \cos \omega - x_2 \sin \omega, \\ x_2^* = x_1 \sin \omega + x_2 \cos \omega, \\ x_3^* = a \sin \omega + x_3. \end{cases}$$

Führt man  $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$  als neuen Parameter ein, so erkennt man, daß jeder (eigentliche) Punkt des bewegten Körpers, der nicht auf der festen Geraden  $x_1 = x_2 = 0$  gelegen ist, einen Kegelschnitt durchläuft. Durch Auflösung der Gleichungen nach den  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) erkennt man, daß die inverse Bewegung eine Bewegung derselben Art ist. Da nun die Punkte sich in festen Ebenen bewegen, so müssen bei der umgekehrten Bewegung die Ebenen durch feste Punkte hindurchgehen. Daraus folgt, daß bei unserer Bewegung die (reellen, eigentlichen) Ebenen, die nicht zu der festen Geraden parallel laufen und nicht auf ihr senkrecht stehen, Drehkegel umhüllen.<sup>2)</sup> Für  $a = 0$  reduziert sich die Bewegung auf die Gruppe der Drehungen um die feste Gerade.

Es sei hier noch kurz auf einige Formeln aus der Differentialgeometrie der Regelflächen hingewiesen, deren wir uns später bedienen werden.

<sup>1)</sup> Diese Bewegung bildet einen Sonderfall der allgemeinsten Bewegung des Raumes, bei der jeder Punkt allgemeiner Lage einen Kegelschnitt durchläuft. Vgl. die Note III von Darboux in der Cinématique von Koenigs. Paris 1897, bes. Nr. 2, S. 353 u. f.

<sup>2)</sup> In Studys Kinematik wird diese Bewegung als eindimensionale Kette von Somen bezeichnet. Vgl. Geom. d. Dynamen, Anhang.

Wir wollen einen reellen Zug einer analytischen Speermannigfaltigkeit von einer komplexen Dimension ein Speerband nennen und ein solches Band soll insbesondere zylindrisch heißen, wenn sein sphärisches Bild sich auf einen Punkt reduziert.<sup>1)</sup> Wir beschränken unsere Betrachtungen auf nicht-zylindrische Bänder.

Ist  $d\alpha + \varepsilon dp$  der duale Winkel zweier benachbarter Speere eines Bandes, so nennt man die einwertig definierte Größe

$$(14) \quad L = \frac{dp}{d\alpha}$$

den Verteilungsparameter an dieser Stelle. Benützt man zur Parameterdarstellung des Bandes die Bogenlänge  $\alpha$  ihres sphärischen Bildes:  $\underline{x} = \underline{x}(\alpha)$ ,  $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}(\alpha)$ ,  $\underline{\underline{\underline{x}}} = \underline{\underline{\underline{x}}}(\alpha)$ , so ergibt sich

$$(15) \quad L = (\underline{x}' | \underline{\underline{x}}') = (\underline{x} \underline{\underline{x}} \underline{\underline{\underline{x}}}),$$

wenn wir durch die Striche die Differentiationen nach  $\alpha$  andeuten und durch den zweiten Klammerausdruck die Determinante  $|\underline{x}'_{01} \underline{\underline{x}}'_{02} \underline{\underline{\underline{x}}}'_{33}|$ .

Den Fußpunkt der gemeinsamen Normalen eines Speeres mit dem benachbarten, nennt man den Zentralpunkt  $z$ . Es ist

$$(16) \quad z = (\underline{x} \underline{\underline{x}} \underline{\underline{\underline{x}}}) \underline{\underline{\underline{x}}} + \underline{\underline{\underline{x}}} \hat{\underline{\underline{x}}} = -(\underline{x}' | \underline{\underline{x}}') \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{x}}.$$

Bezeichnen wir für den Augenblick den Fußpunkt des Lotes vom Koordinatenursprung  $o$  auf den betrachteten Speer  $S$  des Bandes mit  $f$   $\{o\vec{f} = \underline{\underline{x}}\}$ . Aus (16) ersehen wir, daß die (auch ihrem Vorzeichen nach definierte) Strecke  $\Lambda = f\vec{z}$  die Länge

$$(17) \quad \Lambda = (\underline{x} \underline{\underline{x}} \underline{\underline{\underline{x}}}) = -(\underline{x}' | \underline{\underline{x}}')$$

hat.

Den Ort der Zentralpunkte eines (nicht-zylindrischen) Bandes nennt man die Striktionslinie. Diese kann sich auch auf einen Punkt reduzieren.

Die dem Speere  $S$  vermöge unserer ersten Abbildung des Speerraumes (§ 2) zugeordnete Minimalebene berührt ihre Einhüllende längs einer Minimalgeraden, deren Schnittpunkt mit  $S$   $b$  genannt werden soll. Wir werden  $b$  als *den Brennpunkt* des Speerbandes in  $S$  bezeichnen. Es findet sich die Beziehung

$$(18) \quad \overline{zb} = -iL. \text{ } ^2)$$

<sup>1)</sup> Die Terminologie ist der des Herrn Study nachgebildet.

<sup>2)</sup> Faßt man  $\underline{\underline{x}}$ ,  $\underline{\underline{\underline{x}}}$  wieder zu einer dualen Verbindung  $\underline{\underline{x}}(\alpha) + \varepsilon \underline{\underline{\underline{x}}}(\alpha) = X(\alpha)$  zusammen, so ergeben sich außer  $L$  noch sofort zwei weitere Bewegungsinvarianten der Speerbänder

$$(19) \quad M + \varepsilon N = (X X' X'')$$

oder

$$(19^*) \quad M = (\underline{x} \underline{\underline{x}} \underline{\underline{\underline{x}}}), \quad N = (\underline{\underline{x}} \underline{\underline{\underline{x}}}'') + (\underline{\underline{x}} \underline{\underline{\underline{x}}}') + (\underline{\underline{x}} \underline{\underline{\underline{x}}}).$$

### § 3. Endliche Gruppen von Speertransformationen.

Wir bringen nun die Überlegungen des ersten Paragraphen in Verbindung mit den im zweiten angegebenen Abbildungen. Die Gruppe  $G_{12}$  der komplexen Bewegungen mit den Minimal-ebenen als Raumelement bildet sich auf eine zwölfgliedrige kontinuierliche Gruppe von (reellen) Speertransformationen ab, die wir mit  $G_{12}$  bezeichnen wollen und die die Grundlage unserer Untersuchungen bilden wird. Heben wir also hervor:

Die kontinuierliche Gruppe  $G_{12}$ , welche die Speere ausnahmslos transitiv unter einander vertauscht, geht vermöge der ersten Abbildung aus der Gruppe der komplexen Bewegungen des Euklidischen Raumes hervor, wenn man als deren Element die Minimal-ebene ansieht. Die Gruppe  $G_{12}$  enthält die Gruppe der reellen Euklidischen Bewegungen des Speerraumes als (nicht-invariante) Untergruppe, die in  $G_{12}$  dadurch charakterisiert ist, daß ihre Transformationen mit der Umkehrung<sup>2)</sup> vertauschbar sind.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, Gebilde, die gegenüber  $G_{12}$  äquivalent sind, noch einer weitergehenden Klassifikation gegenüber der Bewegungsgruppe zu unterziehen.

Die Formeln (5) [für  $z=1$ ] und (7) des § 1 geben uns eine analytische Darstellung von  $G_{12}$ . Aus der Formel (7) folgt andererseits:

Die Gruppe  $G_{12}$  geht durch unsere zweite Abbildung (das Übertragungsprinzip der Geometrie der Dynamen) hervor aus der kontinuierlichen Gruppe der (eigentlichen) Möbiusschen Kreisverwandtschaften, die man auf der Einheitskugel ins (reell-) duale Gebiet hinein fortgesetzt hat.

Ähnliche Formeln finden sich zu Anfang des zweiten Bandes der Liniengeometrie (Leipzig 1906) des Herrn K. Zindler, wo die Größen  $L, M, N$  der Reihe nach mit  $\frac{\beta}{\omega}, \frac{\omega_1}{\omega}, \frac{\beta_1}{\omega}$  bezeichnet werden, doch sind einige der dortigen Formeln nicht genügend vereinfacht.

Ist  $y$  ein beliebiger (eigentlicher) Punkt und führt man für die inneren Produkte des Vektors  $y-z$  mit den Einheitsvektoren  $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}_v = \hat{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}'$  die Abkürzungen  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  ein, so daß

$$(20) \quad y = z + \eta_1 \mathfrak{x} + \eta_2 \mathfrak{x}' + \eta_3 \mathfrak{x}_v$$

wird, so erhält man durch Differentiation die für die Differentialgeometrie der Regelflächen grundlegende Formel

$$(21) \quad \frac{dy}{d\alpha} = \left\{ \frac{d\eta_1}{d\alpha} - \eta_2 + N \right\} \mathfrak{x} + \left\{ \frac{d\eta_2}{d\alpha} + \eta_1 - M\eta_3 \right\} \mathfrak{x}' + \left\{ \frac{d\eta_3}{d\alpha} + M\eta_2 + L \right\} \mathfrak{x}_v,$$

die sich in der (dem Verfasser nicht zugänglichen) Thèse von Antomar (Paris 1894) finden dürfte.

Wir bemerken nebenbei, daß sich die Differentialgeometrie der Regelflächen mittels des Übertragungsprinzips der Geometrie der Dynamen mit größter Leichtigkeit entwickeln und auch weiterführen läßt.

<sup>2)</sup> Als „Umkehrung“ bezeichnet man die Transformation

$$\mathfrak{x}^* = -\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x}'^* = -\mathfrak{x}', \quad \mathfrak{x}_v^* = \mathfrak{x}_v,$$

welche jedem Speere den mit ihm antitaktisch zusammenfallenden zuordnet.

Insbesondere geht die Untergruppe der Euklidischen Bewegungen des Speerraumes hervor aus der Gruppe der (reell-)dualen automorphen Bewegungen der Einheitskugel. Aus der ersten Formel (5) des § 1 entnehmen wir: Die Gruppe  $G_{12}$  vertauscht die Bündel syntaktischer Speere unter sich. Das (reelle) sphärische Bild von  $G_{12}$  ist die Gruppe der *eigentlichen* Möbiusschen Kreisverwandtschaften.

Berücksichtigt man jetzt die Bedeutung, welche die komplexe Koordinate  $T$  eines Speeres für seine Lage im Bündel der zu ihm syntaktischen Speere hat, wie wir dies am Schlusse des § 2 erörtert haben, so schließen wir aus der zweiten Formel (5) des § 1, in der  $x = 1$  zu setzen ist:

Zwei durch eine Transformation von  $G_{12}$  aufeinander bezogene Bündel syntaktischer Speere sind stets so aufeinander abgebildet, daß Normalebenebenen der Bündel aufeinander ähnlich bezogen sind, und zwar eigentlich ähnlich, wenn man die Normalebenebenen einander so zuordnet, daß sich die Richtungen der Speere der beiden Bündel entsprechen.

Dies ist infolge der unhomogenen Annahme unserer Koordinaten für die Bündel  $t = \infty$  noch nicht bewiesen, doch können diese natürlich keine Ausnahmestellung einnehmen, wovon man sich etwa durch Ausübung einer reellen Bewegung auf das Koordinatensystem überzeugen kann.

Die nächst der Mannigfaltigkeit der Speere einfachste Mannigfaltigkeit, deren Elemente ebenfalls nur von vier Konstanten abhängen und durch  $G_{12}$  (transitiv) vertauscht werden, ist demnach die Mannigfaltigkeit der Büschel syntaktischer Speere.

Betrachten wir das sphärische Bild einer Transformation von  $G_{12}$ . Da dieses eine konforme Abbildung ist, so gehört zu jedem Paar entsprechender Punkte  $t_n, t_n^*$  ein infinitesimales Vergrößerungsverhältnis. Das zugehörige Vergrößerungsverhältnis in der durch stereographische Projektion abgeleiteten Ebene hat, wie man aus der ersten Formel (5) des § 1 entnimmt, den Wert

$$\sqrt{\frac{dt^* \cdot d\bar{t}^*}{dt \cdot d\bar{t}}} = \frac{\sqrt{\delta \bar{\delta}}}{(a_{11} + a_{12} t)(\overline{a_{11} + a_{12} t})},$$

wobei die Wurzeln alle positiv auszuziehen sind. Das Verhältnis für die Verwandtschaft auf der Kugel ist daher:

$$\frac{st_n^* \cdot st}{st_n^* \cdot st_n} \cdot \frac{\sqrt{\delta \bar{\delta}}}{(a_{11} + a_{12} t)(\overline{a_{11} + a_{12} t})},$$

worin die Strecken zwischen dem Südpol  $s$  und den verschiedenen mit  $t$  bezeichneten Punkten positiv zu nehmen sind. Denselben Ausdruck findet man aber auch aus der zweiten Formel (5) des § 1 und nach der am Schlusse des § 2 gegebenen geometrischen Deutung der komplexen veränderlichen  $T$  für das Vergrößerungs-

verhältnis der Ähnlichkeit zwischen den Normalebenebenen auf die zu  $\rightarrow o t_n$  und  $\rightarrow o t_n^*$  syntaktischen Speere. Berücksichtigt man außer dem absoluten Betrage von  $\frac{dt^*}{dt}$  auch noch das Argument dieser komplexen Zahl, so findet sich schließlich:

Es sei  $S \rightarrow S^*$  eine Transformation von  $G_{12}$  und  $t_n \rightarrow t_n^*$  ihr sphärisches Bild. Wir beziehen die Tangentialebenen  $\tau$  und  $\tau^*$  in  $t_n$  und  $t_n^*$  an die Einheitskugel, derartig eigentlich ähnlich auf einander, daß diese Ähnlichkeiten in der infinitesimalen Umgebung der Punkte  $t_n$  und  $t_n^*$  mit der Kreisverwandtschaft  $t_n \rightarrow t_n^*$  übereinstimmen. Andererseits ist die Ebene  $\tau$  auf  $\tau^*$  ebenfalls eigentlich ähnlich bezogen durch die Transformation  $S \rightarrow S^*$ , wenn wir die beiden Ebenen als Normalebenebenen der zu  $\rightarrow o t_n$  und  $\rightarrow o t_n^*$  syntaktischen Speerbündel ansehen und die Fußpunkte entsprechender Speere einander zuordnen. Nehmen wir jetzt einen beliebigen (reellen, eigentlichen) Punkt  $p$  von  $\tau^*$ , ihm entspricht in der ersten Ähnlichkeit ein Punkt  $p_1$  von  $\tau$ , diesem entspricht weiter in der zweiten Ähnlichkeit ein Punkt  $p_2$  von  $\tau^*$ , so daß also in  $\tau^*$  eine eigentliche Ähnlichkeit  $p \rightarrow p_2$  entsteht. Diese Ähnlichkeit ist nun eine bloße *Schiebung* in der Ebene  $\tau^*$ .

Darunter, daß die erste Ähnlichkeit zwischen den Ebenen  $\tau$  und  $\tau^*$  im Infinitesimalen mit der Kreisverwandtschaft übereinstimmt, man könnte vielleicht auch sagen: diese Kreisverwandtschaft in den Punkten  $t_n$  und  $t_n^*$  „berührt“, wollen wir verstehen, daß das Vergrößerungsverhältnis der Ähnlichkeit mit dem infinitesimalen Vergrößerungsverhältnis der konformen Transformation  $t_n \rightarrow t_n^*$  übereinstimmt und daß die Ähnlichkeit die orientierten (mit einem Durchlaufungssinn versehenen) Linienelemente oder Fortschreitungsrichtungen von  $t_n$  und  $t_n^*$  in der gleichen Weise aufeinander bezieht, wie die Abbildung  $t_n \rightarrow t_n^*$ . Der geometrische Sinn dieser etwas langatmigen Erklärungen ist ja sehr einfach. Wir bemerken gleich hier, daß die drei letzten Eigenschaften nicht bloß der Gruppe  $G_{12}$  sondern auch einer im Sinne von Lie „unendlichen“ Gruppe von Speertransformationen zukommt, die vermöge unserer zweiten Abbildung des Speerraumes aus der ins (reell-)duale Gebiet hinein fortgesetzten eigentlich-konformen Transformationen der Einheitskugel hervorgeht.<sup>1)</sup>

Wir erweitern jetzt die kontinuierliche Gruppe  $G_{12}$  durch Adjunktion einer diskreten Gruppe von vier involutorischen und daher vertauschbaren Transformationen zu einer aus vier kontinuierlichen Scharen bestehenden gemischten Gruppe. Die Trans-

<sup>1)</sup> Näheres hierüber in § 10, wo sich auch ein anderer Beweis für unseren Lehrsatz findet.

formationen der beizufügenden diskreten Gruppe sind außer der Identität

$$(1) \quad S^* = S; \quad t^* = t, \quad T^* = T \quad (\mathfrak{I})$$

die folgenden

$$(1_1) \quad \left. \begin{aligned} S^* &= \tilde{S}; & t^* &= t, & T^* &= -T; \\ \mathfrak{X}_{01}^* &= \mathfrak{X}_{01}, & \mathfrak{X}_{02}^* &= \mathfrak{X}_{02}, & \mathfrak{X}_{03}^* &= \mathfrak{X}_{03}; \\ \mathfrak{X}_{23}^* &= -\mathfrak{X}_{23}, & \mathfrak{X}_{31}^* &= -\mathfrak{X}_{31}, & \mathfrak{X}_{12}^* &= -\mathfrak{X}_{12}; \\ \mathfrak{X}_{11}^* &= -\mathfrak{X}_{11}, & \mathfrak{X}_{22}^* &= -\mathfrak{X}_{22}, & \mathfrak{X}_{33}^* &= -\mathfrak{X}_{33}. \end{aligned} \right\} (\mathfrak{I}_1)$$

$$(1_2) \quad \left. \begin{aligned} S^* &= \bar{S}; & t^* &= \bar{t}, & T^* &= \bar{T}. \\ \mathfrak{X}_{01}^* &= \mathfrak{X}_{01}, & \mathfrak{X}_{02}^* &= -\mathfrak{X}_{02}, & \mathfrak{X}_{03}^* &= \mathfrak{X}_{03}; \\ \mathfrak{X}_{23}^* &= \mathfrak{X}_{23}, & \mathfrak{X}_{31}^* &= -\mathfrak{X}_{31}, & \mathfrak{X}_{12}^* &= \mathfrak{X}_{12}; \\ \mathfrak{X}_{11}^* &= -\mathfrak{X}_{11}, & \mathfrak{X}_{22}^* &= \mathfrak{X}_{22}, & \mathfrak{X}_{33}^* &= -\mathfrak{X}_{33}; \end{aligned} \right\} (\mathfrak{I}_2)$$

$$(1_3) \quad \left. \begin{aligned} S^* &= \overline{\tilde{S}}; & t^* &= \bar{t}, & T^* &= -\bar{T}; \\ \mathfrak{X}_{01}^* &= \mathfrak{X}_{01}, & \mathfrak{X}_{02}^* &= -\mathfrak{X}_{02}, & \mathfrak{X}_{03}^* &= \mathfrak{X}_{03}; \\ \mathfrak{X}_{23}^* &= -\mathfrak{X}_{23}, & \mathfrak{X}_{31}^* &= \mathfrak{X}_{31}, & \mathfrak{X}_{12}^* &= -\mathfrak{X}_{12}; \\ \mathfrak{X}_{11}^* &= \mathfrak{X}_{11}, & \mathfrak{X}_{22}^* &= -\mathfrak{X}_{22}, & \mathfrak{X}_{33}^* &= \mathfrak{X}_{33}. \end{aligned} \right\} (\mathfrak{I}_3)$$

Dabei deuten wir durch den Querstrich den Zeichenwechsel von  $i$  und durch den Circumflex den von  $\epsilon$  an. Die Transformation  $\mathfrak{I}_1$  kann man zusammensetzen aus der Spiegelung am Ursprunge  $\{\mathfrak{X}^* = -\mathfrak{X}, \underline{\mathfrak{X}}^* = \underline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{X}}^* = -\overline{\mathfrak{X}}\}$  und der Umkehrung  $\{\mathfrak{X}^* = -\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}^* = -\overline{\mathfrak{X}}, \underline{\mathfrak{X}}^* = \underline{\mathfrak{X}}\}$ , ebenso  $\mathfrak{I}_2$  aus der Umwendung an der Axe der  $x_2$  mit der Umkehrung.  $\mathfrak{I}_3$  ist die Spiegelung an der Ebene  $x_2 = 0$ . Übt man nun vor oder nach allen Transformationen von  $G_{12}$  die Transformation  $\mathfrak{I}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) aus, so erhält man die Transformationen einer Schar, die wir  $H_{12}^{(k)}$  nennen werden. Wir können dies durch die Formeln ausdrücken:

$$(2) \quad \begin{aligned} G_{12} \mathfrak{I} &= \mathfrak{I} G_{12} = G_{12}, \\ G_{12} \mathfrak{I}_1 &= \mathfrak{I}_1 G_{12} = H_{12}^{(1)}, \\ G_{12} \mathfrak{I}_2 &= \mathfrak{I}_2 G_{12} = H_{12}^{(2)}, \\ G_{12} \mathfrak{I}_3 &= \mathfrak{I}_3 G_{12} = H_{12}^{(3)}. \end{aligned} \quad .^1)$$

<sup>1)</sup> Dadurch soll ausgedrückt sein, daß  $\mathfrak{I}_k$  mit der ganzen Gruppe  $G_{12}$  (nicht etwa mit jeder einzelnen Transformation von  $G_{12}$ ) vertauschbar ist.

Man nennt nach C. Segre die Transformation, welche jedem Element sein konjugiert-komplexes zuordnet, das „Konjugium“ und die Transformation, welche durch Zusammensetzung des Konjugiums mit einer komplexen Bewegung oder Umlegung entsteht, eine „Antibewegung“ oder „Antiumlegung“<sup>1)</sup>. Es ergibt sich nun, wenn man beachtet, daß sich das auf die Minimalebene angewandte Konjugium auf die Umkehrung im Speerraume abbildet:

Durch unsere erste Abbildung des Speerraumes gehen über

die komplexen Bewegungen in  $G_{12}$ ,

die komplexen Umlegungen in  $H_{12}^{(1)}$ ,

die komplexen Antibewegungen in  $H_{12}^{(2)}$ ,

die komplexen Antiumlegungen in  $H_{12}^{(3)}$ .

Die analytische Darstellung der Scharen  $G_{12}$ ,  $H_{12}^{(1)}$ ,  $H_{12}^{(2)}$ ,  $H_{12}^{(3)}$  in den komplex-dualen Koordinaten  $S$  ist:

$$S^* = \frac{A_{21} + A_{22} S}{A_{11} + A_{22} \bar{S}}, \quad (G_{12})$$

$$S^* = \frac{A_{21} + A_{22} \tilde{S}}{A_{11} + A_{12} \tilde{S}}, \quad (H_{12}^{(1)})$$

$$(4) \quad S^* = \frac{A_{21} + A_{22} \bar{S}}{A_{11} + A_{12} \bar{S}}, \quad (H_{12}^{(2)})$$

$$S^* = \frac{A_{11} + A_{22} \tilde{S}}{A_{11} + A_{12} \tilde{S}}, \quad (H_{12}^{(3)})$$

wobei stets der skalare Teil von  $(A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})$  von Null verschieden anzunehmen ist.

Wir bemerken, daß jede der Scharen  $H_{12}^{(k)}$  zusammen mit  $G_{12}$  eine Gruppe bildet und daß die vier Gruppen  $G_{12}$ ,  $(G_{12}, H_{12}^{(k)})$  invariante Untergruppen der umfassenden Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  sind.

(A) Das sphärische Bild der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)})$  ist die Gruppe der (reellen) *eigentlichen* Kreisverwandtschaften, das der Scharen  $H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)}$  die Schar der *uneigentlichen* Kreisverwandtschaften und bei der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)})$  werden die Normalebene ( $\tau$  und  $\tau^*$ ) auf entsprechende Bündel syntaktischer Speere *eigentlich*-ähnlich, bei der

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnungen sind denen des Herrn Segre nachgebildet. Man könnte vielleicht besser „Gegenbewegung“ und „Gegenumlegung“ sagen, doch wollen wir hier die obige Terminologie anwenden, um die Analogie mit späteren Überlegungen (§ 9, § 10) besser hervortreten zu lassen.

Schar  $(H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  *uneigentlich-ähnlich* aufeinander bezogen. In den Tangentialebenen  $\tau^*$  finden bei der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(3)})$  *Schiebungen*  $p \rightarrow p_2$ .<sup>1)</sup> bei den Scharen  $H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}$  *Spiegelungen an Punkten* statt.

Die Kreisverwandtschaften auf der Kugel sind bekanntlich konforme Abbildungen. Überträgt man dies zunächst auf die dualen Kreisverwandtschaften der Kugel und dann mittels der zweiten Abbildung auf den Speerraum, so erhält man folgendes.

Es sei  $S \rightarrow S^*$  eine Transformation der Gruppe  $G_{12}$  und  $S, S^*$  ein Paar zugeordneter Speere, ferner  $S_1, S_2$  zwei zu  $S$  „benachbarte“ (zu  $S$  nicht-syntaktische) Speere und  $S_1^*, S_2^*$  die entsprechenden, zu  $S^*$  benachbarten Speere.  $N_i$  sei die gemeinsame Normale von  $S, S_i$ , die wir so zu einem Speere orientieren, daß die Entfernung ihrer Schnittpunkte mit  $S, S_i$  in dieser Reihenfolge positiv ausfällt. Analog orientieren wir die gemeinsame Normale  $N_i^*$  von  $S^*, S_i^*$ .<sup>2)</sup> Dann ist der auch seinem Vorzeichen nach (mod  $2\pi$ ) bestimmte duale Winkel  $(N_1, N_2)$  (bis auf Vielfache von  $2\pi$ ) gleich dem ebenso bestimmten dualen Winkel  $(N_1^*, N_2^*)$ .

Wir wollen dieser Beziehung noch einen etwas anderen Ausdruck geben. Zu dem Zwecke legen wir um den Speer  $S$  als Drehachse einen Drehzylinder  $\Phi$  mit dem Halbmesser  $\pm 1$  und nennen  $n$  den „Austrittspunkt“ des Speeres  $N_1$  aus  $\Phi$ . Analog konstruieren wir den Austrittspunkt  $n^*$  von  $N_1^*$  aus dem Drehzylinder  $\Phi_1^*$ , der  $S^*$  als Achse hat. Variiert man nun  $S_1$  und entsprechen  $S_1^*$ , so durchlaufen die Punkte  $n, n^*$  die Zylinder  $\Phi, \Phi^*$  so, daß sie ein-eindeutig aufeinander bezogen sind:

(B) Die Beziehung  $n \rightarrow n^*$  der Drehzylinder  $\Phi, \Phi^*$  um Speere  $S, S^*$ , die einander in einer Transformation von  $G_{12}$  zugeordnet sind, wird durch eine *Bewegung* vermittelt, die die Achsen  $S, S^*$  *gleichsinnig* zur Deckung bringt.

Durch Ausübung der Transformationen  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$  folgt hieraus weiter:

(B<sub>1</sub>) Für eine Transformation  $S \rightarrow S^*$  von  $H_{12}^{(1)}$  werden die Abbildungen  $n \rightarrow n^*$  durch *Umlegungen* vermittelt, welche die orientierten Zylinderachsen  $S, S^*$  *gegensinnig* zur Deckung bringen.

(B<sub>2</sub>) In  $H_{12}^{(2)}$  sind die Beziehungen  $n \rightarrow n^*$  *Bewegungen*, die die Drehachsen *gegensinnig* zuordnen und schließlich

(B<sub>3</sub>) in  $H_{12}^{(3)}$  *Umlegungen*, welche die Achsen *gleichsinnig* aufeinander beziehen.

<sup>1)</sup> Vgl. oben S. 216.

<sup>2)</sup> Die Speere  $N_i, N_i^*$  sind natürlich im allgemeinen einander in  $S \rightarrow S^*$  nicht zugeordnet.

Gehen wir wieder auf die Betrachtung einer Transformation  $S \rightarrow S^*$  der Gruppe  $G_{1,2}$  zurück und nennen den infinitesimalen dualen Winkel von  $S$  mit  $S_1$  ( $d\alpha + \varepsilon dp$ ) und analog ( $d\alpha^* + \varepsilon dp^*$ ) den von  $S^*$  mit  $S_1^*$ . Aus bekannten Eigenschaften der konformen Abbildungen ergibt sich, wenn man sie ins duale Gebiet überträgt, daß

$$(d\alpha^* + \varepsilon dp^*) = (a_s + \varepsilon b_s)(d\alpha + \varepsilon dp)$$

ist, wo der (abgesehen vom Vorzeichen bestimmte) (reell-) duale Faktor ( $a_s + \varepsilon b_s$ ) nur von der Wahl des Speeres  $S$ , nicht aber von der Wahl des zu diesem benachbarten Speeres  $S_1$  abhängt. Aus dieser Gleichung folgt weiter

$$(5) \quad \begin{cases} d\alpha^* = a_s \cdot d\alpha, \\ dp^* = b_s \cdot d\alpha + a_s \cdot dp \end{cases}$$

und, wenn wir die Beziehungen

$$\frac{dp}{d\alpha} = L, \quad \frac{dp^*}{d\alpha^*} = L^*$$

einführen

$$L^* = L + c_s,$$

worin die Größe  $c_s = b_s : a_s$  eindeutig definiert ist.

Wir können dieses auch so ausdrücken und verallgemeinern:

(C) Für eine Transformation  $S \rightarrow S^*$  aus ( $G_{12}, H_{12}^{(2)}$ ) besteht zwischen den Verteilungsparametern  $L, L^*$  an entsprechenden Stellen  $S, S^*$  entsprechender Speerbänder eine Beziehung

$$(6) \quad L^* = +L + c_s,$$

wo die Größe  $c_s$  nur von der Wahl des Speeres  $S$ , nicht aber von der Wahl des hindurchgehenden Bandes abhängt.

Die analoge Beziehung für die Scharen  $H_{12}^{(1)}$  und  $H_{12}^{(3)}$  hat die Form

$$(6^*) \quad L^* = -L + c_s.$$

Aus unseren Formeln für die Speertransformationen ergibt sich anderseits:

Sind zu drei Speeren  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) die entsprechenden  $S_k^*$  gegeben, so ist dadurch, falls in keinem der beiden Tripel zwei Speere syntaktisch sind, je eine Transformation aus  $G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}$  und  $H_{12}^{(3)}$  bestimmt.

Fragen wir jetzt nach allen Transformationen von  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$ , deren sphärisches Bild die Identität  $\{\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}\}$  ist. Da erhalten wir zunächst in  $G_{12}$  eine invariante Untergruppe  $G_6$  von vertauschbaren Transformationen, die durch die erste Abbildung mit der Gruppe der komplexen Schiebungen zusammenhängt:

$$(7) \quad \begin{aligned} t^* &= t, \\ T^* &= T + c_{11} + 2c_{12}t + c_{22}t^2. \end{aligned}$$

Analog gibt es in der Schar  $H_{12}^{(1)}$  die Schar  $H_6^{(1)}$ , welche durch die Formeln (7) dargestellt wird, wenn man rechts für  $T - T$  schreibt. Die Gruppen  $G_6, (G_6, H_6^{(1)})$  sind beide invariante Untergruppen der umfassenden Gruppe. Schneidet man zwei entsprechende Bündel syntaktischer Speere durch ein und dieselbe Normalebene  $\tau$ , so entsteht in dieser Ebene eine Transformation  $p \rightarrow p^*$  zwischen den Fußpunkten entsprechender Speere  $S, S^*$ , und zwar ist diese eine Schiebung.

Vermöge der ersten Abbildung des Speerraumes entspricht der Gruppe  $G_6$  die Gruppe der komplexen Schiebungen. Man kann jede komplexe Schiebung  $(x_0 = x_0^* = 1_0)$

$$x_k^* = x_k + a_k + ib_k \{k = 1, 2, 3; a_k = \bar{a}_k, b_k = \bar{b}_k\}$$

zerlegen in die Aufeinanderfolge einer reellen Schiebung

$$x_k^* = x_k + a_k$$

und einer rein imaginären

$$(8) \quad x_k^* = x_k + ib_k.$$

Bie reellen Schiebungen bilden sich natürlich auf dieselben Schiebungen des Speerraumes ab. Wir wenden uns daher gleich zur Betrachtung der dreigliedrigen Gruppe der rein-imaginären Schiebungen. Man erhält zunächst in Ebenenkoordinaten

$$(9) \quad \begin{aligned} u_0^* &= u_0 - ib_1u_1 - ib_2u_2 - ib_3u_3, \\ u_k^* &= u_k, \{k = 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

und hieraus in Speerkoordinaten, wenn wir den Vektor mit den Koordinaten  $b_i$  mit  $\mathfrak{B}$  bezeichnen

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{\underline{x}}^* &= \underline{\underline{x}}, \\ \underline{\underline{x}}^* &= \underline{\underline{x}} - (\mathfrak{B} | \underline{\underline{x}}) \underline{\underline{x}} + \mathfrak{B}, \\ \underline{\underline{x}}^* &= \underline{\underline{x}} - \mathfrak{B} \hat{\underline{\underline{x}}}. \end{aligned} \right.$$

Am einfachsten folgert man aus der ersten und letzten dieser Formeln folgende Konstruktion des Speeres  $S^*$  aus dem Speere  $S$ :

Man unterwirft  $S$  einer Schiebung durch den Vektor  $\mathfrak{B}$ , dreht dann den so erhaltenen Speer um den ursprünglichen  $S$  durch einen positiven rechten Winkel; der auf diese Art gefundene Speer ist  $S^*$ .

Diese kontinuierliche dreigliedrige Gruppe von vertauschbaren Speertransformationen hat schon A. Ribaucour betrachtet und Herr J. Grünwald hat ihre Transformationen „Querschiebungen“ genannt („Querschiebung gegen den Vektor  $\mathfrak{B}$ “).<sup>1)</sup>

Betrachten wir zwei beliebige (nicht-zylindrische) Speerbänder, die einander in der Querschiebung zugeordnet sind. Die zu diesen Bändern gehörigen Größen  $L, \Lambda, L^*, \Lambda^*$  [vgl. die Formeln (15) und (17) von § 2] stehen, wie man durch Differentiation von (10) nach der Bogenlänge des gemeinsamen sphärischen Bildes der Bänder findet, in der Beziehung:

$$(11) \quad \begin{cases} L^* = L - (\mathfrak{B} | \mathfrak{X}), \\ \Lambda^* = \Lambda. \end{cases}$$

Der Gruppe  $(\Gamma_{14}, X_{14})$  der komplexen Ähnlichkeiten und Antiähnlichkeiten entspricht vermöge der ersten Abbildung eine Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  von Speertransformationen. Diese besteht aus zwei kontinuierlichen Scharen<sup>2)</sup>, deren eine  $G_{14}$  die Scharen  $G_{12}, H_{12}^{(1)}$  und deren zweite  $H_{14}$  die Scharen  $H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)}$  enthält.  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  ist eine invariante Untergruppe von  $(G_{14}, H_{14})$ .<sup>3)</sup>

Eine umfassendere, ebenfalls invariante Untergruppe  $(G_{13}, H_{13})$  von  $(G_{14}, H_{14})$  entspricht den komplexen Ähnlichkeiten, welche die Strecken in einem Verhältnis vom absoluten Betrage Eins verändern.

Die analytische Darstellung der Gruppe  $G_{14}$  wird uns durch die Formeln (5) des § 1 geliefert, wenn wir die komplexe Größe  $x$  beliebig, von Null verschieden wählen. Schreiben wir links an Stelle von  $t, T, \bar{t}$  und  $\bar{T}$ , so ergibt sich eine Darstellung für  $H_{14}$ . Beschränken wir  $x$  auf Zahlen vom absoluten Betrage Eins, so erhalten wir entsprechend die Formeln für  $G_{13}$  und  $H_{13}$ .

Um von der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(2)})$  zur Gruppe  $(G_{13}, H_{13})$  aufzusteigen, genügt es, die eingliedrige Gruppe zu adjungieren, welche der Gruppe von komplexen, perspektiven Ähnlichkeiten entspricht, die den Anfangspunkt in Ruhe lassen und die Strecken in Verhältnissen vom absoluten Betrage Eins verändern. Diese können wir in Ebenenkoordinaten so darstellen:

<sup>1)</sup> Vgl. Ribaucour a. a. O. S. 44, J. Grünwald a. a. O. S. 129.

<sup>2)</sup> Es sei daran erinnert, daß die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen im reellen Gebiete gemischt, im komplexen hingegen kontinuierlich ist.

<sup>3)</sup> Auch  $G_{12}, (G_{12}, H_{12}^{(1)})$  sind in  $(G_{14}, H_{14})$  invariant enthalten, nicht aber  $(G_{12}, H_{12}^{(2)})$ , und  $(G_{12}, H_{12}^{(3)})$ .

$$(12) \quad \begin{cases} u_0^* = e^{i\beta} u_0, \{ \beta = \bar{\beta} \} \\ u_k^* = u_k, \{ k = 1, 2, 3 \}. \end{cases}$$

Um dann weiter zur Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  aufzusteigen, braucht man nur mehr die reellen, perspektiven Ähnlichkeiten hinzuzufügen, die den Anfangspunkt in Ruhe lassen.

Unsere Formeln (12) in Ebenenkoordinaten ergeben für die Speerkoordinaten  $t, T$

$$(13) \quad \begin{cases} t^* = t, \\ T^* = e^{i\beta} T. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich nach unserer Deutung der Zahlen  $t$  und  $T$  sofort folgende Konstruktion: Um zu einem Speere  $S$  den entsprechenden  $S^*$  zu finden, drehe man  $S$  um den durch den Ursprung synktaktisch gelegten Speer durch den Winkel  $\beta$ .

Auch diese Transformation, die man auch in der Form:

$$(14) \quad \begin{cases} \underline{x}^* = \underline{x}, \\ \underline{x}^* = \underline{x} \cos \beta + \hat{\underline{x}} \underline{x} \sin \beta = \underline{x} \cos \beta + \underline{x} \sin \beta, \\ \underline{x}^* = \underline{x} \cos \beta + \hat{\underline{x}} \underline{x} \sin \beta = \underline{x} \cos \beta - \underline{x} \sin \beta \end{cases}$$

anschreiben kann, findet sich schon bei Ribaucour und Herr J. Grünwald nennt sie Schwenkung durch den Winkel  $\beta$  bezüglich des Ursprunges.<sup>1)</sup> Von besonderer Bedeutung ist die Transformation von der Periode Vier, die man für  $\beta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$  erhält und die wir kurz die (positive) Schwenkung (bezüglich des Ursprunges) nennen wollen. Die inverse Operation oder auch die dritte Potenz des Schwenkungsprozesses ist die negative Schwenkung. Die positive Schwenkung wird durch die Formeln

$$(15) \quad \begin{cases} t^* = t, & T^* = iT; \\ \underline{x}^* = \underline{x}, & \hat{\underline{x}}^* = \hat{\underline{x}} \underline{x} = \underline{x}, & \underline{x}^* = \hat{\underline{x}} \underline{x} = -\underline{x}. \end{cases}$$

Die Substitution der zu zwei (nicht-zylindrischen) Speerbändern, die in der Schwenkung durch den Winkel  $\beta$  zugeordnet sind, gehörigen Größen  $L, \Lambda$  hat hier die Form

$$(16) \quad \begin{cases} L^* = L \cos \beta - \Lambda \sin \beta, \\ \Lambda^* = L \sin \beta + \Lambda \cos \beta. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Ribaucour a. a. O., S. 94, J. Grünwald a. a. O., S. 131, 132.

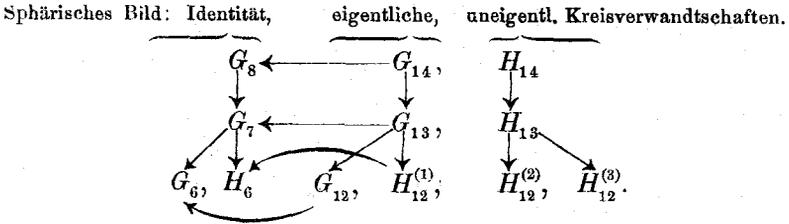
Insbesondere ist für  $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$(17) \quad L^* = -\Lambda, \Lambda^* = L.$$

Diese bemerkenswerte Formel (17) wird uns später gute Dienste leisten.

Fügt man in der zweiten Formel (7) rechts noch den komplexen Faktor  $\alpha$  hinzu, so hat man eine analytische Darstellung der invarianten Untergruppe  $G_8$  von  $(G_{14}, H_{14})$  deren sphärisches Bild die Identität ist ( $t^* = t$ ). Beschränkt man  $\alpha$  auf Werte vom absoluten Betrage Eins, so erhält man die weitere invariante Untergruppe  $G_7$  von  $(G_{13}, H_{13})$ .

Deuten wir invariantes Enthaltensein durch Pfeile an, so können wir folgendes Schema aufstellen:



Es seien  $S_k \{k = 1, 2, 3, 4\}$  vier Speere, von denen keine zwei syntaktisch sind. Das Doppelverhältnis

$$\vartheta = \frac{S_3 - S_1}{S_3 - S_2} : \frac{S_4 - S_1}{S_4 - S_2} = \delta_1 + i\delta_2 + \varepsilon(\delta_3 + i\delta_4), \{\delta_k = \bar{\delta}_k = \tilde{\delta}_k\}$$

der zugehörigen komplex-dualen Zahlen

$$S_k = t_k + \varepsilon T_k$$

hat dann einen bestimmten Wert, dessen skalarer Teil nicht verschwindet, wenn keiner der Speere  $S_k$  dem Bündel  $t = \infty$  angehört, was man durch geeignete Wahl des Koordinatensystems stets vermeiden kann. Die reellen Zahlen  $\delta_k$  sind absolute Invarianten gegenüber der Gruppe  $G_{12}$  der linearen, komplex-dualen Substitutionen von  $S$ . Bei einer Transformation von  $H_{12}^{(1)}$  ändern hingegen  $\delta_3$  und  $\delta_4$ , bei einer von  $H_{12}^{(2)}$   $\delta_2$  und  $\delta_4$  und schließlich bei einer Transformation von  $H_{12}^{(3)}$  ändern  $\delta_2$  und  $\delta_3$  ihre Vorzeichen. Bei einer Transformation von  $G_{14}$  (vgl. die Formel (5) des § 1) bleibt  $\delta_1 + i\delta_2$  ungeändert, während  $\delta_3 + i\delta_4$  mit der komplexen

Zahl  $\kappa$  multipliziert wird. Bei  $H_{14}$  endlich ist  $\delta_1^* = \delta_1, \delta_2^* = -\delta_2, \delta_3^* + i\delta_4^* = \kappa(\delta_3 - i\delta_4)$ .<sup>1)</sup>

Wir werden einen reellen Zug einer analytischen Speermannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen eine Speermembran nennen. Wir wollen nun im Folgenden zunächst diejenigen algebraischen, irreduziblen Speermembranen betrachten, welche die Eigenschaft haben, daß das Doppelverhältnis von vier beliebigen Speeren der Membran, die überhaupt ein bestimmtes Doppelverhältnis definieren, einem der drei Gleichungssysteme genügt:

$$(18) \quad \begin{aligned} 1) \quad & \delta_3 = \delta_4 = 0, \\ 2) \quad & \delta_2 = \delta_4 = 0, \\ 3) \quad & \delta_2 = \delta_3 = 0, \end{aligned}$$

ferner die Speerbänder, für welche

$$(19) \quad \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$$

ist. Dabei schließen wir noch den Fall von vorne herein aus, daß alle Speere einer der zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten einerlei Richtung haben, d. h. einem Bündel syntaktischer Speere angehören, wobei alle Doppelverhältnisse zunächst unbestimmt werden. Wir nennen die Membranen 1. (Speer-)Garben, 2. (Speer-)Kugeln, 3. (Speer-)Quirle und die Bänder (Speer-)Ketten.<sup>2)</sup>

Aus dieser Definition schließt man, daß Garben, Kugeln, Quirle und Ketten, von deren Existenz man sich an Beispielen leicht überzeugen kann, durch die Transformationen von  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  wieder in gleichartige Mannigfaltigkeiten übergeführt werden. Die Garben und ebenso die Ketten werden auch noch durch die Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  unter einander vertauscht, nicht mehr aber im Allgemeinen die Kugeln und Quirl. Diese ordnen sich dem allgemeineren Begriffe der „(Speer-)Wirbel“ unter, der durch die Beziehungen  $\delta_2 = 0, \delta_3 : \delta_4 = \text{const.}$  charakterisiert ist. Durch den Schwenkungsprozeß werden die Kugeln in Quirle übergeführt und umgekehrt.

Zu einer vorläufigen Orientierung bemerken wir, daß die Ketten von neun, die Garben, Kugeln und Quirle von sechs und die Wirbel von sieben (reellen) Konstanten abhängen, ferner, daß alle Membranen und Bänder jeder einzelnen dieser verschiedenen

<sup>1)</sup> Herr E. v. Weber hat eine geometrische Deutung der Invarianten  $\delta_i$  angegeben a. a. O., S. 402 u. f. Wir bemerken nebenbei, daß diese aus der Deutung, die Möbius für das komplexe Doppelverhältnis von vier Punkten einer Kugel angegeben hat, mittels des Übertragungsprinzips der Geometrie der Dynamen unmittelbar entnommen werden kann.

<sup>2)</sup> Vgl. bei J. Grünwald § 19, S. 132 u. f. Ich habe mir hier erlaubt, die Terminologie des Herrn Grünwald, von der a. a. O. ja fast gar kein Gebrauch gemacht ist, völlig umzustoßen.

Familien mit Ausnahme der Wirbel schon durch  $G_{12}$  ausnahmslos transitiv vertauscht werden, während die Wirbel gegenüber  $G_{12}$  eine absolute Invariante ( $\delta_3 : \delta_4$ ) enthalten und erst durch  $G_{13}$  transitiv vertauscht werden.

#### § 4. Speergarben und Speerketten.

Wir können sofort eine Mannigfaltigkeit von Speeren angeben, die unserer Definition der Speergarben genügt: die Gesamtheit der Speere durch den Ursprung. Für diese ist  $T=0$ , also sind alle Doppelverhältnisse von vier Speeren durch den Anfangspunkt, da  $S_k = t_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) wird, skalar, d. h. gewöhnliche komplexe Zahlen. Die vermöge der ersten Abbildung zu diesen Speeren gehörigen Minimalebenen gehen auch alle durch den Koordinatenanfangspunkt hindurch. Üben wir auf diesen Minimalkegel irgend eine komplexe Bewegung aus, so geht der reelle Anfangspunkt in irgend einen eigentlichen komplexen Punkt über.

Wir wollen daher unsere Definition der Speergarben dahin präzisieren, daß wir jede Speermembran, die durch unsere erste Abbildung auf einen Minimalkegel (d. h. die Gesamtheit der Minimalebenen durch einen *eigentlichen* Punkt) bezogen wird, eine Garbe nennen.

Man bestätigt leicht, daß durch diese neue Definition, durch welche die Speergarben unkehrbar eindeutig auf die eigentlichen komplexen Punkte des Raumes bezogen sind, sämtliche irreduziblen Membranen geliefert werden, die der ersten Definition genügen und umgekehrt, ferner, daß die Garben sechs reelle (drei komplexe) Konstante enthalten und durch  $G_{12}$  untereinander transitiv vertauscht werden. Da schon durch die reellen Ähnlichkeitstransformationen die eigentlichen imaginären Punkte transitiv vertauscht werden, so können wir gegenüber dieser „Hauptgruppe“ nur zwei verschiedene Arten von Garben unterscheiden: Die „allgemeinen“ Garben, welche den imaginären (eigentlichen) und die „Nullgarben“, welche den reellen (eigentlichen) Punkten entsprechen. Diese letzteren bestehen, wie wir im besonderen Falle schon bemerkt haben, aus allen durch einen solchen Punkt hindurchlaufenden Speeren.

Wir wenden uns daher den elementargeometrischen Eigenschaften der allgemeinen Garben zu, die sämtlich untereinander ähnlich sind, und gegenüber Bewegungen eine reelle, absolute Invariante haben, als die man etwa den absoluten Betrag der rein-imaginären Entfernung  $\pm 2ia$  des zugehörigen imaginären Punktes  $x(x_1, x_2, x_3)$  von seinem konjugiert-imaginären  $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  wählen kann. Ein imaginärer, eigentlicher Punkt  $x$  gestattet und bestimmt eine eingliedrige, kontinuierliche Gruppe von reellen Bewegungen, nämlich die Drehungen um die reelle Verbindungslinie von  $x$  mit  $\bar{x}$ .

Bei dieser Gruppe muß daher auch unsere Garbe als Ganzes in Ruhe bleiben, d. h. ihre Speere müssen sich zu einschaligen Umdrehungshyperboloiden anordnen lassen mit  $x\bar{x}$  als Drehachse. Da ferner alle Speere der Garbe in Minimalebene durch  $x$  und  $\bar{x}$  gelegen sind, also die Minimalkegel durch diese Punkte berühren, so berühren auch die Hyperboloide diese Kegel, d. h. sie sind konfokal und haben das Punktepaar  $x, \bar{x}$  als doppelt zählenden, entarteten Fokalkegelschnitt. Der dritte Fokalkegelschnitt ist ein reeller, und zwar einteiliger Kreis  $A$ , der in der reellen Symmetrieebene  $\alpha$  zwischen den Punkten  $x\bar{x}$  liegende Durchschnitt der Minimalkegel durch diese Punkte. Legt man also durch die „Mittelgerade“  $x\bar{x}$  der Garbe eine Ebene, die den Fokalkreis  $A$  in zwei Punkten trifft, und denkt man sich in dieser Ebene alle Hyperbeln verzeichnet, die diese beiden Punkte zu Brennpunkten haben, so entsteht durch Umdrehung dieser Kegelschnitte um die Mittelgerade die Schar unserer Hyperboloide, deren (reelle) Erzeugende sich zu Speeren der Garbe orientieren lassen.

Wir wollen gleich angeben — den Beweis dazu kann man aus der späteren analytischen Ableitung entnehmen — wie diese Orientierung erfolgt. Zunächst besitzt der „Äquatorkreis“  $A$  der Garbe einen bestimmten Durchlaufungssinn und alle diesen Kreis syntaktisch berührenden Speere der Äquatorebene gehören der Garbe an (vgl. Fig. 2 auf der nächsten Seite, wo der Äquatorkreis stark ausgezogen ist). Die übrigen Erzeugenden werden so orientiert, daß ihre orthogonale Projektion auf die Äquatorebene  $\alpha$  um den Mittelpunkt  $m$  des Äquators im selben Sinne dreht wie der Äquator. Die Mittelgerade selbst gehört in beliebiger Weise orientiert der Garbe an.

Eine Garbe gestattet im allgemeinen nur eine eingliedrige gemischte Gruppe aus der Gruppe der reellen Bewegungen und Umlegungen und nur im besonderen Falle der Nullgarbe, für die jede durch den „Mittelpunkt“ hindurchgehende Gerade als „Mittelgerade“ anzusehen ist, erweitert sich die eingliedrige Gruppe zu der zweigliedrigen gemischten Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen, die den Mittelpunkt  $m$  in Ruhe lassen.

In innigem Zusammenhang mit der Abbildung der imaginären Raumpunkte  $x$  auf die Speergarben steht eine Abbildung dieser Punkte auf geordnete Paare reeller Punkte, die anscheinend von Tarry herrührt: Man ordnet jedem imaginären Punkte  $x$  ein Paar reeller Punkte  $\underline{x}, \bar{x}$  zu, das mit dem Paare  $\bar{x}, x$  Verbindungslinie, Mittelpunkt und absoluten Betrag der Entfernung gemein hat, in unhomogenen Koordinaten  $\{x_0 = 1\}$  durch die Formeln

$$(1) \quad \begin{cases} \underline{x}_k = \frac{\bar{x}_k + x_k}{2} + i \frac{\bar{x}_k - x_k}{2} = \frac{x_k + i \bar{x}_k}{1 + i}, \\ \bar{x}_k = \frac{\bar{x}_k + x_k}{2} - i \frac{\bar{x}_k - x_k}{2} = \frac{\bar{x}_k - i x_k}{1 - i}. \end{cases} \quad \{k = 1, 2, 3\}$$



in Ebenenkoordinaten  $u_k$  und daher durch die Gleichung

$$(2) \quad -2i \cdot T + (x_1 + ix_2) - 2x_3 t - (x_1 - ix_2) t^2 = 0$$

in den Koordinaten  $t, T$  dargestellt. Jede Gleichung von der Form

$$(2^*) \quad T + A + 2Bt + Ct^2 = 0$$

stellt also eine Speergarbe dar. Der zugehörige imaginäre Punkt  $x$  hat die Koordinaten

$$(3) \quad x_1 = -i(A - C), \quad x_2 = -(A + C), \quad x_3 = 2iB$$

Setzen wir  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = ia, \{a = \bar{a}\}$ , was man immer durch eine reelle Bewegung erreichen kann, so vereinfacht sich die Gleichung der Garbe:

$$(4) \quad T + at = 0.$$

Die Punkte  $\underline{x}$  und  $\underline{\bar{x}}$  haben dann die Koordinaten

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_2 = 0, \quad \underline{x}_3 = a; \quad \underline{\bar{x}}_1 = \underline{\bar{x}}_2 = 0, \quad \underline{\bar{x}}_3 = -a.$$

Führt man die Koordinaten  $\underline{x}_{ik}$  ein, so wird

$$\begin{aligned} \underline{x}_{23} &= -a \underline{x}_{01} \underline{x}_{03}, & \underline{x}_{11} &= a \underline{x}_{02}, \\ \underline{x}_{31} &= -a \underline{x}_{02} \underline{x}_{03}, & \underline{x}_{22} &= -a \underline{x}_{01}, \\ \underline{x}_{12} &= a - a \underline{x}_{03} \underline{x}_{03}, & \underline{x}_{33} &= 0, \end{aligned}$$

oder wenn man den Vektor  $V_m^x$  mit den Koordinaten  $0, 0, a$  mit  $\mathfrak{B}$  bezeichnet

$$(5) \quad \underline{x} = -(\mathfrak{B} | \underline{x}) \underline{x} + \mathfrak{B}, \quad \underline{\bar{x}} = -\mathfrak{B} \underline{\bar{x}}.$$

Unmittelbar kommen wir zu diesen Formeln, wenn wir beachten, daß unsere Garbe aus der Garbe  $T=0, \underline{x}=\underline{\bar{x}}=0$  durch „Querschiebung“ gegen den Vektor  $\mathfrak{B}$  [vgl. § 3, (10)] hervorgeht.

Daraus folgt auch folgende Konstruktion:

Um zu einer vorgeschriebenen Richtung den (einzigen) syntaktischen Speer  $S$  unserer Garbe aufzufinden, ziehen wir zuerst durch  $\underline{x}$  und den „Mittelpunkt“  $m$  der Garbe

die syntaktischen Speere  $S_{\underline{x}}, S_m$  und drehen den ersten  $S_{\underline{x}}$  um den zweiten  $S_m$  durch einen positiven rechten Winkel; der so erhaltene Speer ist der gesuchte  $S$ .

Man kann diese Konstruktion auch etwas anders ausdrücken, wenn man voraussetzt, daß die Richtung von  $S$  nicht zur Äquator-ebene  $\alpha$  parallel ist: Man bringe  $S_m$  zum Schnitte mit der

um die Strecke  $\underline{x}$  als Durchmesser geschlagenen Kugel im Punkte  $s$  und drehe die orthogonale Projektion  $s'$  von  $s$  auf die Äquatorebene  $\alpha$  durch einen rechten Winkel entgegen dem Umlaufsinne des Äquators nach  $s_a$ .  $s_a$  ist dann der Durchstoßpunkt von  $S$  mit  $\alpha$ .<sup>1)</sup> (Vgl. die Figur 3.)

Wir heben noch einige Eigenschaften der Garben hervor, die man mittels der ersten Abbildung leicht bestätigen wird:

Durch drei Speere, von denen keine zwei syntaktisch sind, geht eine einzige Garbe hindurch.

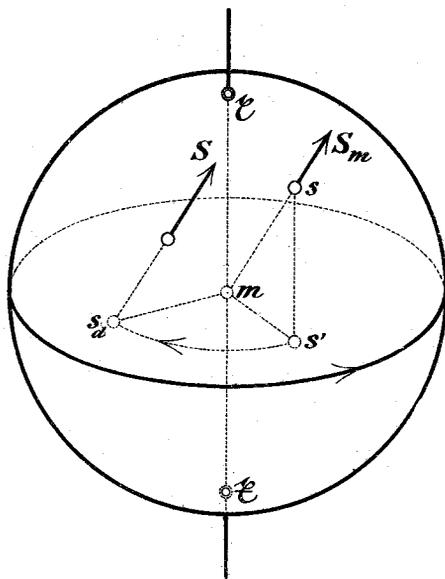


Fig. 3.

Zwei verschiedene Garben haben stets zwei (reelle) Speere gemeinsam, die auch zusammenfallen können.

Beachtet man ferner, daß das Quadrat der Entfernung zweier (eigentlicher) komplexer Punkte  $x$  und  $x^*$  mit den reellen Bildern  $\underline{x}$ ,  $\underline{x}$  und  $\underline{x}^*$ ,  $\underline{x}^*$  sich so ausdrücken läßt:

$$(6) \quad (V_x^{x^*} | V_x^{x^*}) = (V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*} | V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*}) - \frac{i}{2} \left\{ (V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*} | V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*}) - (V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*} | V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*}) \right\},$$

<sup>1)</sup> Diese Konstruktion findet sich bei E. v. Weber a. a. O. S. 338, Nr. 4. Im Wesentlichen aber auch schon bei Ribaucour a. a. O. § 92, S. 118.

wenn man z. B. mit  $V_x^{x^*}$  den von  $x$  nach  $x^*$  laufenden (komplexen) Vektor bezeichnet und wie auch sonst durch die vertikalen Striche die inneren Produkte andeutet,<sup>1)</sup> so folgt:

Werden zwei Garben, zu denen die Punktepaare  $\underline{x} \underline{x}$  und  $\underline{x}^* \underline{x}^*$  gehören, denselben Transformationen von  $(G_{12}, H_{12}^{(1)})$  unterworfen, so bleiben folgende zwei Größen ungeändert: Das innere Produkt der Vektoren  $V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*}$  und  $V_{\underline{x}^*}^{\underline{x}}$  und die Differenz der Quadrate der Strecken  $\underline{x} \underline{x}^*$  und  $\underline{x} \underline{x}$ . Bei den Transformationen von  $H_{12}^{(2)}$  und  $H_{12}^{(3)}$  bleibt nur die erste dieser Größen ungeändert, während die zweite ihr Vorzeichen ändert.

Bei den Transformationen von  $G_6$  bleiben die Vektoren  $V_{\underline{x}}^{\underline{x}^*}$  und  $V_{\underline{x}^*}^{\underline{x}}$  ungeändert.

Für die Speerbänder der Nullgarbe mit dem Mittelpunkt  $m$  ist stets  $L = \Lambda = 0$ , wenn wir den Koordinatenanfang in den Punkt  $m$  verlegen. Unterwerfen wir nun die Garbe der Querschiebung gegen den Vektor  $V_m^{\underline{x}} = \mathfrak{B}$ , so ist für die Bänder der entstehenden allgemeinen Garbe nach (11) § 3

$$(7) \quad L = -(\mathfrak{B} | \mathfrak{X}), \quad \Lambda = 0.$$

Die zweite dieser Formeln besagt:

Die Striktionslinie eines beliebigen Bandes in einer allgemeinen Garbe liegt stets in der Äquatorebene der Garbe.

Aus der ersten ergibt sich:

Alle Speerbänder in einer Garbe, die durch einen festen Speer  $S$  der Garbe hindurchgehen, haben in  $S$  denselben Verteilungsparameter  $L$ , und zwar ist  $-L$  gleich der orthogonalen Projektion des Vektors  $\mathfrak{B}$  auf  $S$ .

Trägt man auf den Speeren eines Bandes der Garbe von den Zentralpunkten aus Strecken auf, die gleich den zugehörigen Verteilungsparametern sind, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf der Kugel mit  $\underline{x} \underline{x}$  als Durchmesser.<sup>2)</sup>

Wir wollen nun noch eine andere geometrische Deutung der zwei simultanen Invarianten von zwei Garben ableiten. Dazu gehen wir von folgender Bemerkung aus, die man leicht bestätigen wird.

<sup>1)</sup> Diese Formel ist (für die Ebene) angegeben bei E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, 1. Bd.

<sup>2)</sup> Trägt man allgemeiner Strecken ab, die zu den Verteilungsparametern in konstantem Verhältnis stehen, so liegen die Endpunkte auf einer Kugel durch den Äquatorkreis der Garbe.

Es seien  $x, x^*$  zwei komplexe eigentliche Punkte, deren Entfernung von Null verschieden sei, ferner sei  $\mu$  eine der beiden (voneinander verschiedenen) Minimalebene, die gleichzeitig durch  $x$  und  $x^*$  hindurchgehen. Schließlich seien  $M, M^*$  die beiden Minimalgeraden von  $\mu$ , die bezüglich durch  $x$  und  $x^*$  laufen. Das Entfernungsguadrat der Punkte  $x, x^*$  ist gleich dem Entfernungsguadrat zweier beliebiger (eigentlicher) Punkte  $b, b^*$  von  $M$  und  $M^*$ .

Die beiden Garben, welche vermöge der ersten Abbildung den Punkten  $x, x^*$  entsprechen, haben den Speer  $S$  gemein, der der Minimalebene  $\mu$  in derselben Abbildung zugeordnet ist. Wir wählen um die Punkte  $b, b^*$  insbesondere auf  $S$ , so daß also  $b$  der Schnittpunkt von  $S$  mit  $M$  und  $S$  der von  $M^*$  mit  $S$  wird.  $z$  und  $z^*$  seien die Schnittpunkte von  $S$  mit den Äquatorebenen der beiden Garben.<sup>1)</sup>

Nehmen wir nun ein im übrigen beliebiges Speerband in unserer ersten Garbe an, das durch  $S$  hindurchläuft. Dann sind  $z$  und  $b$  sein Zentralpunkt und Brennpunkt in  $S$ . Analog nehmen wir in der zweiten Garbe ein Band durch  $S$  an, dessen Zentral- und Brennpunkt hier nach  $z^*$  und  $b^*$  fallen. Haben nun  $L, \Lambda; L^*, \Lambda^*$  für unsere beiden Bänder in  $S$  die am Schlusse von § 2 angegebene Bedeutung, so ist nach Formel (18) von § 2

$$\{\overline{xx^*}\}^2 = \{\overline{bb^*}\}^2 = \{(\Lambda^* - iL^*) - (\Lambda - iL)\}^2,$$

oder

$$(8) \quad \{\overline{xx^*}\}^2 = \{(\Lambda^* - \Lambda) - i(L^* - L)\}^2.$$

Wären wir von dem zweiten Speere  $S$  ausgegangen, den die beiden Garben gemeinsam haben, so hätten wir ein analoges Resultat erhalten, da (in leicht verständlicher Bezeichnungsweise) die Beziehungen stattfinden

$$(9) \quad \begin{cases} (\Lambda^* - \Lambda) + (\underline{\Lambda^*} - \underline{\Lambda}) = 0, \\ (L^* - L) + (\underline{L^*} - \underline{L}) = 0. \end{cases}$$

An der Relation (8) erkennen wir die neue geometrische Deutung der Entfernung von  $x, x^*$  und aus ihr folgt die Invarianz von  $(\Lambda^* - \Lambda)$  und  $(L^* - L)$  gegenüber  $G_{12}$ , die wir schon auf andere Weise bewiesen und in den Theoremen (B) und (C) des § 3 ausgesprochen hatten. Diese Sätze, die wir mittels der zweiten Abbildung gewonnen hatten, sind somit jetzt zum Teile mittels der ersten Abbildung neuerdings bewiesen.

Für manche Fragen kann es zweckmäßig sein, auch den un-eigentlichen Punkten  $x$  Speergarben zuzuordnen, diese wären

<sup>1)</sup> Sollte  $S$  in einer dieser Ebenen liegen, so tritt an Stelle des Schnittpunktes der Berührungspunkt mit dem Äquatorkreis.

dann als „uneigentliche“ oder reduzible Garben den „eigentlichen“ oder irreduziblen gegenüber zu stellen. Sie bestehen aus Paaren von Bündeln syntaktischer Speere, insbesondere gehören zu den Punkten  $x$  des absoluten Kegelschnittes syntaktisch zusammenfallende Paare solcher Bündel. Wir wollen hier der Einfachheit zuliebe auf die Einführung uneigentlicher Garben verzichten.

Wir geben nebenbei noch einige elementar geometrische Eigenschaften der allgemeinen Garben an:

Legt man durch  $\xi$  und  $\bar{\xi}$  parallele Gerade zu einem beliebigen Speere  $S$  der Garbe, so geht die erste in die zweite durch eine Drehung um  $S$ , und zwar durch die Drehung um einen negativen rechten Winkel über.

Die Fußpunktfläche der Garbe in bezug auf einen (reellen) Punkt  $p$  der Mittelgeraden, der aber nicht mit dem Mittelpunkt  $m$  der Garbe zusammenfällt, ist eine Kugel, die durch den Punkt  $p$  und den Äquator  $A$  hindurchgeht.

Trägt man auf den Speeren einer allgemeinen Garbe gleichlange Strecken im positiven und negativen Sinne ab, deren Anfangspunkte in der Äquatorebene liegen, so gehören die Endpunkte einem Umdrehungsellipsoid an, das den Äquator als Fokalkegelschnitt hat.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der automorphen Transformationen einer Garbe. Zunächst bemerken wir:

Es gibt in der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  außer der Identität eine einzige Transformation, und zwar eine involutorische Transformation der Schar  $H_{12}^{(1)}$ , die sämtliche Speere einer Garbe einzeln in Ruhe läßt. Wir wollen diese Transformation die Spiegelung an der Garbe nennen. Man findet zu irgend einem Speere  $S$  sein Spiegelbild  $S^*$ , wenn man  $S$  um den syntaktischen Speer der Garbe umwendet (durch den Winkel  $\pm \pi$  dreht).

Dies folgt unmittelbar aus unseren Betrachtungen über die Schar  $H_6^{(1)}$  (vgl. § 3); doch können wir die Konstruktion auch leicht rechnerisch bestätigen. Die Spiegelung an der Garbe, die zum Punkte  $x \{x_1 = x_2 = 0, x_3 = ia\}$  gehört, geht nämlich durch unsere erste Abbildung aus der komplexen Umlegung hervor, die man als die Spiegelung an dem Punkte  $x$  bezeichnet. Diese kann man in den verschiedenen Koordinaten so ausdrücken

$$(10) \quad \begin{aligned} t^* &= t, & T^* &= -T - 2at; \\ S^* &= (1 - \varepsilon a)^2 \bar{S}, \end{aligned}$$

oder in den Vektorbezeichnungen

$$(11) \quad \underline{x}^* = \underline{x}, \quad \underline{x}^* = -\underline{x} - 2\underline{x}(\mathfrak{B} | \underline{x}) + 2\mathfrak{B}, \quad \underline{x}^* = -\underline{x} - 2\mathfrak{B}\hat{\underline{x}}.$$

Ist insbesondere die betrachtete Garbe eine Nullgarbe ( $a = 0$ ), so reduziert sich die Spiegelung an ihr auf eine Transformation, die man durch Zusammensetzung aus der Spiegelung an ihrem Mittelpunkt mit der Umkehrung herstellen kann. Ist allgemein die Gleichung einer Garbe in der Form

$$T + A + 2Bt + Ct^2 = 0$$

gegeben, so wird die Spiegelung an ihr durch die Formel geliefert

$$(12) \quad t^* = t, \quad T^* = -T - 2\{A + 2Bt + Ct^2\}.$$

Es gibt in der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  eine gemischte sechsgliedrige Untergruppe, nennen wir sie für den Augenblick  $(g_6, h_6^{(1)}, h_6^{(2)}, h_6^{(3)})$ , deren Transformationen eine Garbe in sich transformieren. Bei dieser Gruppe werden die der Garbe nicht angehörenden und ebenso die der Garbe angehörenden Speere transitiv vertauscht. Da wir wissen, daß es in der Schar  $h_6^{(1)}$ , die in  $H_6^{(1)}$  enthalten ist, eine Transformation gibt, die sämtliche Speere der Garbe in Ruhe läßt, nämlich die Spiegelung an der Garbe, so erkennen wir, daß die kontinuierlichen Scharen  $g_6$  und  $h_6^{(1)}$  und ebenso die Scharen  $h_6^{(2)}$  und  $h_6^{(3)}$ , die in  $H_6^{(2)}$  und  $H_6^{(3)}$  enthalten sind, die Speere der Garbe in gleicher Weise vertauschen. Betrachten wir also bloß diese als Objekte der Gruppe, so spaltet sich die automorphe Gruppe nur in zwei kontinuierliche Scharen  $\gamma_6, \chi_6$ , von denen die erste zu  $(g_6, h_6^{(1)})$ , die zweite zu  $(h_6^{(1)}, h_6^{(2)})$  meromorph ist. Die kontinuierliche Gruppe  $\gamma_6$  ist isomorph zur Gruppe der (reellen) eigentlichen Möbiusschen Kreisverwandtschaften und ebenso entspricht die Schar  $\chi_6$  der Neben-  
gruppe der uneigentlichen Kreisverwandtschaften. Ist nämlich die Garbe eine Nullgarbe, so erhält man die zugehörigen Vertauschungen der Speere einfach dadurch, daß man die Kreisverwandtschaften auf einer Kugel um den Mittelpunkt der Garbe aus diesem Mittelpunkt projiziert.

Bei einer allgemeinen Garbe konstruiert man eine beliebige automorphe Transformation  $S \rightarrow S^*$  unter den Speeren der Garbe auf folgende Weise. Zunächst nimmt man das sphärische Bild der Transformation, das wir uns auf der Kugel mit  $\underline{x}, \underline{y}$  als Durchmesser konstruiert denken, als eine beliebige Kreisverwandtschaft  $s \rightarrow s^*$  an. Dann projiziert man die Paare zugeordneter Punkte  $s, s^*$  orthogonal auf die Äquatorebene und dreht sie noch durch einen positiven rechten Winkel um den Speer  $\underline{x}, \underline{y}$ , wodurch man in dieser Äquatorebene

eine Punkttransformation  $s_a \rightarrow s_a^*$  herstellt. Die Speere  $S$  und  $S^*$  durch  $s_a$  und  $s_a^*$  syntaktisch zu  $\overrightarrow{ms}$  und  $\overrightarrow{ms^*}$  entsprechen sich dann in der zugehörigen Transformation. Es folgt dies aus der zuvor angegebenen zweiten Konstruktion des Speeres einer Garbe, dessen Richtung gegeben ist (vgl. die Figur 3).

Beachtet man, daß sich ein Kugelkreis auf die Äquatorebene im allgemeinen als ein Kegelschnitt projiziert, der den Äquator doppelt berührt, so erkennt man: Die Gruppe der Vertauschungen der Schnittpunkte der Speere einer allgemeinen Garbe mit der Äquatorebene ist die Gruppe der (reellen) Kreisverwandtschaften der Nicht-Euklidischen (hyperbolischen) Maßbestimmung, die den Äquator als absoluten Kegelschnitt hat.

Man kann die Zuordnung zwischen den (reellen) Punkten  $s_a$  der Äquatorebene innerhalb des Äquators und den Speeren der Garbe durch eine gewisse „Orientierung“ dieser Punkte zu einer umkehrbar eindeutigen machen.

Innerhalb der Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  gestattet und bestimmt eine Garbe eine achtgliedrige aus zwei kontinuierlichen Scharen bestehende Untergruppe. Diese vertauscht jedoch die Speere der Garbe nicht anders als die Gruppe  $(\gamma_6, \chi_6)$ , da in  $G_{14}$  eine zweigliedrige kontinuierliche Gruppe enthalten ist, deren Transformationen alle Speere der Garbe einzeln in Ruhe lassen. Diese Gruppe, die insbesondere die Spiegelung an der Garbe umfaßt, entspricht vermöge unserer ersten Abbildung der Gruppe aller komplexen, perspektiven Ähnlichkeiten, die den zugehörigen komplexen Punkt  $x$  in Ruhe lassen. Man erhält eine beliebige Transformation dieser Gruppe, wenn man jeden Speer um den syntaktischen Speer der Garbe durch einen konstanten (reellen) Winkel dreht und gleichzeitig den Abstand von diesem Speere um einen konstanten (reellen) Faktor ändert.

Betrachten wir jetzt ein Speerband einer Garbe, deren sphärisches Bild ein (einteiliger) Kreis ist. Jedes Doppelverhältnis von vier dualen Speerzahlen  $S_k \{k = 1, 2, 3, 4\}$ , die zu vier Speeren dieses Speerbandes gehören, ist zunächst, da die vier Speere einer Garbe angehören, gleich dem Doppelverhältnis der zu den entsprechenden vier Punkten des sphärischen Bildes gehörigen komplexen Zahlen  $t_k$  und dieses ist, weil die vier Punkte auf einem Kugelkreise liegen, reell. Die betrachteten Bänder sind also Speerketten [siehe § 3 (19)] Umgekehrt bekommen wir auf diese Art alle Speerketten, wie man aus folgenden Sätzen schließt, die sich leicht bestätigen lassen:

Das sphärische Bild einer Kette ist der reelle Zug eines Kreises (der sich nicht auf einen Punkt reduziert).

Durch drei Speere, von denen keine zwei syntaktisch sind, geht eine einzige Kette.

Daraus folgt weiter:

Durch jede Kette geht eine einzige Garbe hindurch.

Nehmen wir an, es liege eine Kette vor, die in einer allgemeinen Garbe enthalten ist und deren sphärisches Bild, das wir wieder über der Strecke  $\underline{r\bar{r}}$  als Durchmesser konstruiert denken, ein Kreis  $\alpha$  ist, dessen Ebene nicht auf der Äquatorebene  $\alpha$  senkrecht steht. Projizieren wir  $\alpha$  orthogonal auf die Äquatorebene und drehen wir dann die Projektion um  $\underline{r\bar{r}}$  durch einen positiven rechten Winkel, so erhalten wir einen irreduziblen Kegelschnitt  $C$  (genauer: den reellen Zug eines solchen Kegelschnittes) und dieser liegt nach dem früheren wieder auf der Speerkette und ist die Striktionslinie der Kette. Wir sehen also:

Die Striktionslinie einer Kette ist in der Regel ein irreduzibler Kegelschnitt, der in der Äquatorebene der Garbe liegt, welche durch die Kette hindurchgeht und der den Äquatorkreis dieser Garbe doppelt berührt.

Legen wir durch den Mittelpunkt der Striktionslinie  $C$  eine Gerade  $G$  (die „Mittelgerade“ der Kette), die auf der Ebene des sphärischen Bildes  $\alpha$  der Kette senkrecht steht, so ist diese Achse eines Umdrehungszyinders, der durch  $C$  hindurchgeht. Bemerkte man ferner, daß die Gerade  $G$  mit den Speeren der Kette einen konstanten Winkel einschließt, so erkennt man:

Wird ein Speer  $S$  kontinuierlich so bewegt, daß sein Winkel  $\left\{ \equiv 0, \frac{\pi}{2} \right\}$  und seine Entfernung ( $\neq 0$ ) von einer festen (reellen, eigentlichen) Geraden unverändert bleibt, während der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes von  $G$  und  $S$  auf  $S$  in einer (reellen, eigentlichen) Ebene geführt wird, die nicht zu  $G$  parallel ist, so durchläuft der Speer eine („allgemeine“) Kette.

Daß die Bestimmungsstücke wirklich voneinander unabhängig sind, weisen wir dadurch nach, daß wir eine Konstruktion angeben, welche uns die Garbe liefert, die durch die so erzeugte Kette hindurchläuft. Die Ebene, in welcher der Fußpunkt des Lotes geführt wird, ist die Äquatorebene und der Fußpunkt beschreibt die Striktionslinie  $C$ . Bezeichnet man den Öffnungswinkel des Drehkegels, dessen orientierte Erzeugende syntaktisch zu den Speeren der Garbe gezogen sind, mit  $2\varphi$  und die große Achse von  $C$  mit  $2a$ , so ist  $\frac{a}{\sin \varphi} = a$  der Halbmesser des gesuchten

Äquatorkreises. Seinen Mittelpunkt  $m$ , der auf der kleinen Achse von  $C$  gelegen ist, findet man auf folgende Art: Man trägt auf den zwei Speeren der Kette, die durch die Endpunkte der kleinen Achse von  $C$  hindurchgehen, von diesen Punkten aus auch dem Vorzeichen nach gleiche Strecken ab und projiziert ihre Endpunkte orthogonal auf die Äquatorebene; die Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte geht ebenfalls durch  $m$ . Damit ist aber der Äquatorkreis und dadurch auch die Garbe bestimmt. [Vgl. die Formeln (5).]

Als Grenzfälle unserer „allgemeinen“ Speerkette, die sich jedoch der angegebenen mechanischen Erzeugungsweise nicht entziehen, treten folgende Figuren auf: Die orientierten (reellen) Erzeugenden einer Regelschar eines einschaligen Umdrehungshyperboloids, oder eines (einteiligen) Drehkegels, die orientierten Tangenten eines orientierten (einteiligen) Kreises, die Speere eines Büschels mit eigentlichem Scheitel. Damit sind aber noch nicht alle (gegenüber der Gruppe der reellen Ähnlichkeiten) verschiedenen Arten von Speerketten erschöpft. Wir kommen zu einer mechanischen Erzeugungsweise, welche uns alle Ketten liefert durch folgenden Satz:

Bei jeder reellen kontinuierlichen Bewegung des starren Raumes, bei der eine (reelle, eigentliche) Gerade festgehalten wird, während ein (reeller, eigentlicher) Punkt des Raumes an eine feste, zu der Geraden nicht parallele Ebene gebunden ist, beschreibt jeder (reelle, eigentliche) Punkt des bewegten Raumes, der nicht in der festen Geraden liegt, eine (irreduzible) Ellipse und jeder Speer des Raumes, der nicht zu der festen Geraden parallel ist, eine Kette.<sup>1)</sup>

Zunächst beachte man nämlich, daß die Punkte Ellipsen beschreiben, wie wir am Schlusse des § 2 nachgewiesen haben. Dann bleibt nur nachzuweisen, daß die Speere, welche die feste Achse schneiden, auch Ketten durchlaufen, was man wieder durch die Erzeugung der allgemeinen Speergarben bestätigen kann.

Wir finden jetzt auch die zuvor angegebene Behauptung bestätigt, daß die Ketten durch  $G_{12}$  transitiv vertauscht werden, ferner bemerken wir:

Eine Kette gestattet und bestimmt eine dreigliedrige, gemischte und aus acht kontinuierlichen Scharen bestehende automorphe Transformationsgruppe aus der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$ . Hierbei werden die Speere der Kette auch noch dreigliedrig vertauscht, doch besteht die Gruppe, wenn man als ihr Objekt nur die Speere der Kette ansieht, nur mehr aus zwei getrennten kontinuierlichen Scharen. Innerhalb  $(G_{14}, H_{14})$  erweitert sich die automorphe Gruppe zu einer fünfgliedrigen, aus vier kontinuierlichen Scharen bestehen-

<sup>1)</sup> Diese Erzeugung der Ketten hat J. Grünwald angegeben a. a. O. S. 134.

den Gruppe, die jedoch die Speere der Kette ebenso vertauscht, wie die frühere dreigliedrige Gruppe.

Unter den elementargeometrischen Eigenschaften der allgemeinen Ketten heben wir noch die folgenden hervor:

Die gemeinsamen Normalen benachbarter Speere einer allgemeinen Kette erfüllen eine Regelfläche (oder besser den reellen Zug einer Regelfläche), die (auf zwei Arten) wieder zu einer (allgemeinen) Kette orientiert werden kann. Diese beiden Ketten haben ihre Striktionslinien gemein und stehen in wechselseitiger Beziehung.

Sieht man bei einer allgemeinen Kette von der Orientierung ihrer Speere ab, so erhält man den reellen Zug einer Regelfläche. Setzt man diesen analytisch ins komplexe Gebiet hinein fort, so erhält man eine algebraische, und zwar rationale Fläche vierter Ordnung, die die uneigentliche Ebene in einem Kegelschnitt der den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt, und in zwei Erzeugenden trifft.

Auf jeder Kette liegen  $\infty^1$  Ellipsen, die auf den Speeren der Kette (gleichsinnig) kongruente Punktreihen ausschneiden und auf den konfokalen Ellipsoiden liegen, die den Äquator der durch die Kette gehenden Garbe als Fokalkegelschnitt haben.

Ist die durch die Kette gehende Garbe eine Nullgarbe, so treten an Stelle der Ellipsoide natürlich Kugeln, die mit der Garbe den Mittelpunkt gemein haben.

### § 5. Speerkugeln, Speerquirl.

Die Transformation von  $(G_{12}, H_{12}^{(2)})$  lassen sich in den reell-dualen Koordinaten  $X_1, X_2, X_3$  durch die lineargebrochenen, reell-dualen Substitutionen ausdrücken, welche die Einheitskugel  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$  in sich transformieren. Durch eine lineare Gleichung

$$E_0 + E_1 X_1 + E_2 X_2 + E_3 X_3 = 0,$$

deren reell-duale Koeffizienten  $E$  die Bedingung erfüllen, daß der skalare Teil von  $E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$  kleiner als Eins ist, wird auf der Kugel ein „dualer Kreis“ ausgeschnitten, d. h. die Mannigfaltigkeit aller dualen Punkte auf der Kugel, welche von jedem der beiden diametral gegenüberliegenden Punkte mit den Koordinaten

$\frac{E_k}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}}$   $\{k = 1, 2, 3\}$  einen konstanten sphärischen Abstand haben, dessen dualer Kosinus gleich  $-\frac{E_0}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}}$  ist. Durch

eine lineare Substitution der genannten Art wird ein dualer Kreis der Kugel wieder in einen solchen übergeführt. Deuten wir nun die Koordinaten  $X_k$  als Speerkoordinaten im Raume, so können wir feststellen:

Die Gesamtheit aller  $\infty^2$  Speere, die mit einem festen Speere (und daher auch mit dem durch Umkehrung aus diesem hervorgehenden) einen konstanten (reell-) dualen Winkel einschließen, dessen skalarer Teil von Null verschieden ist, nennen wir eine Speerkugel.

Daß diese neue Definition mit der zuver auf Grund der Doppelverhältnisse gegebenen übereinstimmt, erkennt man dadurch, daß man die bekannte Tatsache, daß das komplexe Doppelverhältnis von vier reellen Punkten einer Kugel dann reell ist, wenn die vier Punkte auf einem Kreise liegen, auf das (reell-) duale Gebiet überträgt. Eine Speerkugel wird von einem Speere beschrieben, den man um eine reelle eigentliche, zu ihm nicht parallele Gerade, die „Mittelgerade“ der Kugel, in beliebiger Weise schraubt.

Die Transformationen von  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  vertauschen die Speerkugeln transitiv unter sich.

Nach unserer neuen Definition der Speerkugeln folgt dies für die Scharen  $G_{12}, H_{12}^{(2)}$  unmittelbar aus der eben angestellten Überlegung; daß es auch für die Scharen  $H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(3)}$  richtig ist, erkennt man etwa durch Anwendung der involutorischen Transformation, die wir in § 3 mit  $\mathfrak{X}_1$  bezeichnet haben.

Eine Speerkugel hängt von sechs (reellen) Konstanten ab und enthält zwei absolute Bewegungsinvarianten. Sie gestattet und bestimmt aus der Gruppe der (reellen) Bewegungen und Umlegungen die zweigliedrige kontinuierliche Gruppe aller Schraubungen um ihre Mittelgerade, vorausgesetzt, daß sie nicht aus allen Speeren besteht, welche diese Mittelgerade senkrecht schneiden. In diesem Falle erweitert sich die automorphe Bewegungsgruppe zu einer gemischten, aus vier getrennten kontinuierlichen Scharen zusammengesetzten Gruppe. Vermöge unserer zweiten Abbildung entsprechen diesen speziellen Speerkugeln, die wir kurz Normalennetze von Speeren nennen können, die dualen größten Kugelkreise.

An weiteren elementargeometrischen Eigenschaften der Speerkugeln erwähnen wir:

Jede Speerkugel kann von einem Büschel syntaktischer Speere beschrieben werden, dessen Ebene auf einem Kreiszyylinder rollt oder sich um eine Gerade dreht. Umgekehrt wird hierbei immer eine Speerkugel beschrieben, wenn die Speere des beschreibenden Büschels nicht zu den Zylindererzeugenden oder zur Drehachse parallel sind.

Sieht man von der Orientierung der Speere einer Kugel ab, so erhält man den reellen Zug einer Linienkongruenz, und zwar einer Normalenkongruenz, die unendlich viele, untereinander parallel abwickelbare Flächen, im allgemeinen Schraubflächen, im besonderen Drehkegel oder Drehzylinder orthogonal durchsetzt. Die eine Brenn-„Fläche“ der Kongruenz ist ein Drehzylinder, der auch in eine Gerade ausarten kann, die zweite reduziert sich auf einen Kegelschnitt der uneigentlichen Ebene, der den absoluten Kegelschnitt doppelt berührt oder auch in eine doppelt überdeckte Gerade ausartet.

Die gemeinsamen Normalen zwischen einem Speere einer Speerkugel und den benachbarten nicht parallelen Speeren der Kugel fallen sämtlich in eine Gerade zusammen. Betrachten wir den Fall, in welchem der Abstand der Speere von der Mittelgeraden nicht verschwindet. Dann berühren die Speere alle einen Kreiszyylinder und die gemeinsame Normale zwischen einem Speere  $S$  und irgend einem benachbarten Speere der Kugel fällt mit der Tangente an den Zylinder zusammen, welche in demselben Punkte wie  $S$  berührt und auf  $S$  senkrecht steht.

Kehren wir jetzt wieder zu Eigenschaften der Speerkugeln zurück, die gegenüber den umfassenderen Gruppen invariant sind:

Durch drei Speere  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), von denen keine zwei syntaktisch sind, geht eine einzige Speerkugel.

Ihre Mittelgerade kann man folgendermaßen finden. Man konstruiere zunächst zu je zwei Speeren  $S_k, S_l$  diejenige Gerade  $M_{kl}$ , die den kürzesten Abstand der beiden Speere halbiert und überdies auf ihrer Winkelhalbierenden senkrecht steht, so daß man also  $S_k$  mittels einer Umwendung um  $M_{kl}$  mit  $S_l$  antitaktisch zur Deckung bringen kann. Die drei Geraden  $M_{12}, M_{23}, M_{31}$  gehören dann einem Normalennetze an und ihre gemeinsame orthogonale Transversale ist die gesuchte Mittelgerade der Kugel.

Eine Speerkugel enthält  $\infty^3$  Speerketten  
oder:

Es gibt  $\infty^3$  Speergarben, die eine Speerkugel in einer Kette durchsetzen.

Berücksichtigen wir wieder den allgemeinen Fall, daß der Kreiszyylinder, welcher als die eine Brennfläche der Speerkugel auftritt, nicht in eine Gerade ausartet. Ordnen wir hier jedem (eigentlichen) Punkte des Zylinders denjenigen Speer der Kugel zu, der in diesem Punkte den Zylinder berührt, so entspricht jedem irreduziblen Kegelschnitte des Zylinders eine Kette, und umgekehrt jeder Kette der Kugel ein irreduzibler Kegelschnitt des Zylinders, der auch gleichzeitig Striktionslinie der Kette ist.

Durch jede Speerkette geht eine einzige Speerkugel.

Zwei verschiedene Speerkugeln haben entweder zwei verschiedene oder zwei zusammenfallende oder keinen (reellen) Speer gemein, es kann aber auch der Fall eintreten, daß sie ein oder zwei Büschel syntaktischer Speere gemeinsam haben.

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung der automorphen Transformationen einer Speerkugel. Zunächst findet man:

Es gibt in der Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  außer der Identität eine einzige Transformation, die alle Speere einer Kugel einzeln in Ruhe läßt. Wir nennen diese involutorische Transformation die Spiegelung an der Speerkugel. Sie gehört der Schar  $H_{12}^{(2)}$  an und hängt vermöge unserer zweiten Abbildung zusammen mit der Inversion an dem entsprechenden dualen Kugelkreis. Bei dieser Inversion werden alle dualen größten Kreise, die durch die sphärischen Mittelpunkte des gegebenen hindurchgehen in sich transformiert. Daraus folgt: Bei der Spiegelung an einer Kugel werden alle Normalennetze, die die Mittelgerade der Kugel enthalten, in sich transformiert. Nennen wir  $\varphi$  und  $\varphi^*$  die dualen sphärischen Abstände zweier inverser Kugelpunkte von einem der sphärischen Mittelpunkte, so ist

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi^*}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2},$$

wenn  $\omega$  der sphärische Abstand der Punkte des gegebenen Kreises von demselben Mittelpunkte ist. Macht man in den einzelnen Gliedern die skalaren und vektoriellen Teile sichtbar, so erhält man, wenn  $\varphi = \chi + \varepsilon p$ ,  $\varphi^* = \chi^* + \varepsilon p^*$  und  $\omega = \alpha + \varepsilon a$  gesetzt wird

$$\left\{ \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} + \varepsilon \frac{p}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} \right) \right\} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\chi^*}{2} + \varepsilon \frac{p^*}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\chi^*}{2} \right) \right\} = \\ = \left\{ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \frac{a}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right\}^2$$

$$\text{oder} \quad (2) \quad \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\chi^*}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$(3) \quad \frac{p}{\sin \chi} + \frac{p^*}{\sin \chi^*} = 2 \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus, daß das (reelle) sphärische Bild unserer Transformation die Inversion an dem Kreise ist, der das sphärische Bild unserer Speerkugel ist. Die zweite Gleichung gibt an, wie die Normalennetze, welche die Mittelgerade der Kugel enthalten in sich transformiert werden. Sie ist so zu

deuten: Man denkt sich zuerst die Mittelgerade  $M$  der Kugel und die Axe  $A$  des betrachteten Normalennetzes in beliebiger Weise orientiert. Von den beiden Speeren der Kugel, welche in diesem Netz enthalten sind, wählen wir einen beliebig aus und bezeichnen seinen jetzt einschließlich des Vorzeichens bestimmten kürzesten Abstand von der Mittelgeraden  $M$  mit  $a$  und seinen Winkel mit der orientierten Mittelgeraden, der ebenfalls einschließlich des Vorzeichens modulo  $2\pi$  bestimmt ist, mit  $\alpha$ . Dann bestehen zwischen den analog definierten kürzesten Abständen  $p, p^*$  und Winkeln  $\varphi, \varphi^*$  entsprechender Speere des Netzes mit der Mittelgeraden die eben angegebenen Beziehungen.

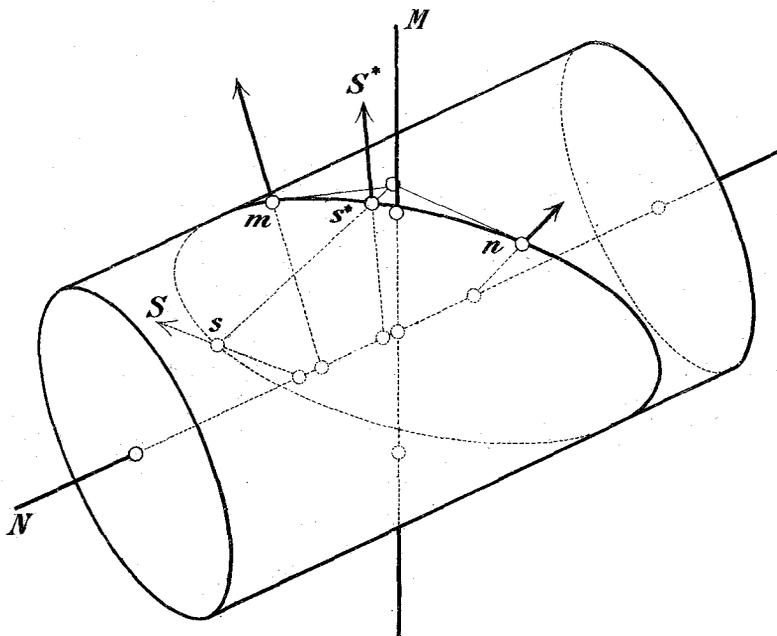


Fig. 4.

Geometrisch kann man die zweite Formel durch folgende Konstruktion ersetzen. Ist zunächst der Speer  $S$ , zu dem man den entsprechenden  $S^*$  auffinden soll, zu einem Bündel von Speeren der Kugel syntaktisch, so geht  $S^*$  aus  $S$  durch Umwendung an dem zu  $S$  syntaktischen Speere der Kugel hervor, der mit  $S$  und der Mittelgeraden  $M$  in einem Normalennetz liegt. Nehmen wir an zweiter Stelle an, daß  $S$  zu keinem Speere der Kugel syntaktisch liege. Dann beschreiben wir (vgl. Fig. 4) um die gemeinsame Normale  $N$  von  $S$  und  $M$  (oder, wenn  $S$  und  $M$  parallel laufen, um eine beliebige (eigentliche) gemeinsame Normale) einen Drehzylinder, etwa mit dem Radius Eins. Ferner ordnen

wir jedem Speere des Normalennetzes von  $N$  einen seiner Schnittpunkte mit dem Zylinder, etwa seinen „Austrittspunkt“ zu. So seien den beiden Speeren der Kugel, die in diesem Normalennetz enthalten sind, die Punkte  $m$  und  $n$  des Zylinders zugeordnet und dem Speere  $S$  der Punkt  $s$ . Die Ebene durch  $m$ ,  $n$  und  $s$  trifft den Zylinder nach einem irreduziblen Kegelschnitt. Der Punkt  $s^*$  dieses Kegelschnittes, der durch das Paar  $m$ ,  $n$  von  $s$  harmonisch getrennt wird, ist der Austrittspunkt  $s^*$  des gesuchten Speeres  $S^*$ . Die Verbindungslinien entsprechender Austrittspunkte  $s$ ,  $s^*$  gehören dem Liniennetze an, das die Verbindungslinie von  $m$  und  $n$  und die Schnittlinie der Tangentialebenen an den Zylinder in diesen Punkten zu Brennlilien hat.

Ist die Speerkugel, an der gespiegelt wird, ein Normalennetz ( $\alpha = 0$ ,  $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ), so entsteht die Spiegelung durch Zusammensetzung der Umwendung an der Achse des Netzes mit der Umkehrung.

Um die Gesamtheit der automorphen Transformationen einer Speerkugel mit den Bestimmungsstücken  $a$  und  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) zu untersuchen, verwenden wir wieder die Abbildung der Speerkugel auf die Punkte eines Drehzylinders, und zwar ordnen wir, wenn  $\alpha \neq 0$  ist, jedem Speere der Kugel seinen Berührungspunkt mit dem Zylinder, der als Brennfäche auftritt, zu, während wir, falls  $\alpha = 0$  ist, um die Mittelgerade als Drehachse einen Zylinder mit dem Radius Eins beschreiben und jedem Speere der Kugel seinen Austrittspunkt das dem Zylinder zuweisen. Jeder der  $\infty^3$  Ketten der Kugel entspricht auf dem Zylinder ein irreduzibler Kegelschnitt (der reelle Zug eines einteiligen Kegelschnittes). Die automorphen Transformationen der Kugel aus ( $G_{12}$ ,  $H_{12}^{(1)}$ ,  $H_{12}^{(2)}$ ,  $H_{12}^{(3)}$ ) müssen daher automorphe Kollineationen des Zylinders nach sich ziehen.

Die Transformationen von ( $G_{12}$ ,  $H_{12}^{(1)}$ ,  $H_{12}^{(2)}$ ,  $H_{12}^{(3)}$ ), welche eine bestimmte Speerkugel in sich transformieren, bilden eine gemischte sechsgliedrige Gruppe.

Nennen wir diese für den Augenblick ( $\mathfrak{G}_6$ ,  $\mathfrak{H}_6^{(1)}$ ,  $\mathfrak{H}_6^{(2)}$ ,  $\mathfrak{H}_6^{(3)}$ ), indem wir voraussetzen, daß  $\mathfrak{G}_6$  in  $G_{12}$  und  $\mathfrak{H}_6^{(k)}$  in  $H_{12}^{(k)}$  enthalten sei. Betrachten wir nur die Speere der Kugel als Objekte der Gruppe, so ist offenbar  $\mathfrak{G}_6$  mit  $\mathfrak{H}_6^{(2)}$  und ebenso  $\mathfrak{H}_6^{(1)}$  mit  $\mathfrak{H}_6^{(3)}$  identisch. Doch sind diese beiden so entstehenden Scharen von Vertauschungen der Speere unserer Kugel noch nicht kontinuierlich, sondern jede von ihnen besteht aus zwei getrennten Scharen, weshalb wir für sie die Bezeichnungen  $\mathfrak{g}_6$ ,  $\mathfrak{h}_6^I$  und  $\mathfrak{h}_6^{II}$ ,  $\mathfrak{h}_6^{III}$  einführen wollen, so daß also  $(\mathfrak{g}_6, \mathfrak{h}_6^I)$  meromorph zu  $(\mathfrak{G}_6, \mathfrak{H}_6^{(2)})$  und  $(\mathfrak{g}_6, \mathfrak{h}_6^I, \mathfrak{h}_6^{II}, \mathfrak{h}_6^{III})$  meromorph zu  $(\mathfrak{G}_6, \mathfrak{H}_6^{(1)}, \mathfrak{H}_6^{(2)}, \mathfrak{H}_6^{(3)})$  ist.

Ein irreduzibler Zylinder gestattet bekanntlich eine sieben-gliedrige automorphe Kollineationsgruppe mit einer sechsgliedrigen invarianten Untergruppe. Auf diese Untergruppe, die bei den hier vorliegenden Realitätsverhältnissen im reellen Gebiete aus vier getrennten kontinuierlichen Scharen besteht, bildet sich die Gruppe  $(g_6, h_6^I, h_6^{II}, h_6^{III})$  ab. Bei der kontinuierlichen Gruppe  $g_6$  bleibt sowohl der Umlaufungs-sinn des Zylinders als auch der Durchlaufungssinn seiner Erzeugenden erhalten, während die Transformationen von  $h_6^I$  beide Sinne umkehren. Die Transformationen von  $h_6^{II}$  kehren den Umlaufungs-sinn des Zylinders um und lassen den Durchlaufungssinn seiner Erzeugenden unverändert, während umgekehrt die Transformationen von  $h_6^{III}$  den Umlaufsinns nicht ändern und die Durchlaufungssinne der Erzeugenden vertauschen.

Innerhalb  $(G_{14}, H_{14})$  gestattet eine Speerkugel eine sieben-gliedrige, ebenfalls aus vier kontinuierlichen Scharen zusammengesetzte gemischte Gruppe, die sich auf die Gruppe aller auto-morphen Kollineationen des zugehörigen Zylinders abbildet.

Übt man auf alle Speerkugeln die Schwenkung durch den Winkel  $\beta$  bezüglich des Ursprunges aus (vgl. § 3), so erhält man  $\infty^6$  Speerwirbel, die wieder untereinander bezüglich  $G_{12}$  äquivalent sind, weil  $G_{12}$  in  $G_{14}$  invariant enthalten ist. Um die Gestalt dieser Speerkongruenzen zu untersuchen, benützen wir unsere Koordinaten  $X, \underline{X}, \underline{\underline{X}}$ . Es sei

$$(4) \quad (A | X) = \cos(\alpha + \varepsilon a), \quad \{a = \bar{a} = \tilde{a} \equiv 0 \pmod{\pi}, \quad a = \bar{a} = \tilde{a}\}$$

die Gleichung irgend einer Speerkugel. Trennen wir skalare und vektorielle Teile, so wird

$$(5) \quad (\mathcal{A} | \underline{X}) = \cos \alpha, \quad (\mathcal{A} | \underline{\underline{X}}) + (\mathcal{A} | \underline{X}) = -a \sin \alpha.$$

Nun üben wir die Schwenkung durch den Winkel  $\beta$  aus:

$$(6) \quad \underline{\underline{X}} = \underline{X}^*, \quad \underline{X} = \underline{\underline{X}} \cos \beta - \hat{\underline{\underline{X}}} \underline{X}^* \sin \beta, \quad \{\beta \equiv 0 \pmod{\pi}\}.$$

Das gibt, wenn wir die Sternchen nachträglich wieder weg-lassen, für die Gleichungen des Wirbels

$$(7) \quad (\mathcal{A} | \underline{X}) = \cos \alpha, \\ (\mathcal{A} | \underline{\underline{X}}) \cos \beta - (\mathcal{A} | \underline{\underline{X}} \underline{X}) \sin \beta + (\mathcal{A} | \underline{X}) = -a \sin \alpha.$$

Führen wir jetzt eine (reelle) Schiebung aus

$$(8) \quad \underline{\underline{X}} = \underline{X}^*, \quad \underline{X} = \underline{\underline{X}} - \hat{\underline{\underline{X}}} \underline{X}^*,$$

deren Vektor

$$\mathfrak{B} = -\frac{a}{\sin \alpha \sin \beta} \mathfrak{A} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta} \mathfrak{A} - \frac{\cos \beta}{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta} \hat{\mathfrak{A}} \mathfrak{A}$$

ist, so vereinfachen sich die Gleichungen des Wirbels, wenn wir wieder die Sternchen weglassen, zu den folgenden:

$$(\mathfrak{A} | \mathfrak{X}) = \cos \alpha, (\mathfrak{A} | \underline{\mathfrak{X}}) \cos \beta - (\mathfrak{A} \mathfrak{X} \underline{\mathfrak{X}}) \sin \beta = 0.$$

Dabei müssen wir zunächst den Fall ausschließen, daß  $\cos \alpha$  und  $\cos \beta$  gleichzeitig verschwinden, weil dann und nur dann der angegebene Ausdruck für  $\mathfrak{B}$  unbestimmt wird. Um nun diese Formeln geometrisch zu deuten, bemerken wir, daß wir auf dieselben Formeln kommen, wenn wir auf die Speerkugel

$$(\mathfrak{A} | \mathfrak{X}) = \cos \alpha, (\mathfrak{A} | \underline{\mathfrak{X}}) = 0 \quad \{\underline{\mathfrak{A}} = 0, a = 0\}$$

die Schwenkung durch den Winkel  $\beta$  ausüben. Diese Kugel, deren Mittelgerade durch den Koordinatenanfangspunkt geht, besteht aber aus allen Speeren, welche die zu einem Speere orientierte Mittelgerade unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden. Drehen wir ein in dieser Kugel enthaltenes Bündel syntaktische Speere um den Speer des Bündels, welcher durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht, durch den Winkel  $\beta$  und lassen dann das so erhaltene Parallelenbündel um die Mittelgerade rotieren, so beschreibt es unseren Speerwirbel. Wir haben also gefunden:

Dreht man ein Bündel syntaktischer Speere um eine (reelle, eigentliche) Gerade — die „Mittelgerade“ des Wirbels — so beschreibt das Bündel einen Wirbel, wenn seine Speere zu der Drehachse nicht parallel laufen.<sup>1)</sup> Doch kann man auf diese Art nicht alle Wirbel erzeugen, wie wir gleich sehen werden.<sup>2)</sup>

Besteht der Wirbel aus allen Speeren einer Ebene, so kann jede (reelle, eigentliche) Gerade, die auf dieser Ebene senkrecht steht als seine Mittelgerade angesehen werden.

Legt man durch einen beliebigen Speer  $S$  eines Wirbels eine Ebene parallel zur Mittelgeraden, so schließt diese mit der Ebene des Bündels der zu  $S$  syntaktischen Speere des Wirbels den Winkel  $\beta$  ein, der — auch seinem Vorzeichen nach — modulo  $\pi$  bestimmt ist. Dieser Winkel ist gegenüber den Transformationen von  $G_{12}$  invariant und seine (eindeutig bestimmte) Cotangente ist gleich dem Verhältnis  $\delta_3 : \delta_4$  (vgl. das Ende des § 3). Die Wirbel, für welche die Invariante  $\delta_3 : \delta_4$  denselben Wert hat, werden durch  $G_{12}$  transitiv vertauscht. Für  $\beta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  erhält man die Speerquirle:

<sup>1)</sup> Vgl. J. Grünwald a. a. O. S. 135.

<sup>2)</sup> Dies wurde von Herrn J. Grünwald anscheinend übersehen.

Dreht man ein Büschel syntaktischer Speere um eine (reelle, eigentliche) Gerade, die in einer Ebene liegt, welche die Ebene des Büschels längs eines seiner Speere senkrecht schneidet, so beschreibt das Büschel einen Quirl, wenn die Drehachse nicht zu den Speeren des Büschels parallel läuft.

Man kann die Quirle auch als Gesamtheit aller Speerkongruenzen definieren, welche bezüglich  $G_{12}$  äquivalent sind zu der Kongruenz, welche durch alle Speere einer (reellen, eigentlichen) Ebene gebildet wird.

Unter die Quirle gehört nun auch der oben ausgeschlossene Sonderfall  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ , in welchem, wenn wir es nicht mit allen Speeren einer Ebene zu tun haben, die angegebene Erzeugung durch Rotation eines Parallelenbüschels versagt. Die Formeln (7) nehmen hier die einfachere Form an

$$(11) \quad (\mathcal{A} | \mathcal{X}) = 0, \quad (\mathcal{A} \mathcal{X} \mathcal{X}) - (\mathcal{A} | \mathcal{X}) = a.$$

Ein derartiger Quirl wird dadurch hergeleitet, daß man die Speere einer Ebene einer Querschiebung (vgl. § 3) gegen einen Vektor unterwirft, den man zu dieser Ebene parallel annehmen kann.

Eine mechanische Erzeugung für diese Quirle liefert uns wieder die am Ende des § 2 betrachtete Bewegung. Bei dieser beschreibt nämlich jedes Büschel syntaktischer Speere, das mit dem bewegten Raume verbunden ist und nicht zu der festen Geraden parallel läuft, einen Wirbel und insbesondere beschreiben die Parallelbüschel, welche in Ebenen senkrecht zu der festen Geraden gelegen sind, Quirle der eben erwähnten besonderen Familie. Diese Quirle sind sämtlich zueinander ähnlich.

Aus der Gruppe der Bewegungen und Umlegungen gestattet ein Quirl in der Regel nur die kontinuierliche eingliedrige Gruppe der Drehungen um seine Mittelgerade. Laufen die Speere des Quirls aber zu einer Ebene parallel, so erweitert sich die Gruppe zu einer zweigliedrigen, gemischten, aus zwei getrennten Scharen bestehenden Gruppe. Ein Quirl endlich, der aus allen Speeren einer Ebene besteht, gestattet die dreigliedrige, aus vier getrennten Scharen bestehende Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen, die diese Ebene in Ruhe lassen.

Da die Speerkugeln mit den Quirlen durch den Schwenkungsprozeß  $\left( \beta \equiv \frac{\pi}{2} \right)$  vertauscht werden, so können wir die Eigenschaften der Kugeln hierher übertragen. So finden wir z. B.:

Durch drei verschiedene Speere, von denen keine zwei syntaktisch sind, geht ein einziger Quirl.

Es gibt in der Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  außer der Identität nur eine einzige Transformation, welche alle

Speere eines Quirls einzeln in Ruhe läßt. Diese Transformation, die „Spiegelung an dem Quirl“, gehört der Schar  $H_{12}^{(3)}$  an.

Allgemeiner: Es gibt nur eine einzige von der Identität verschiedene Transformation in  $(G_{14}, H_{14})$ , die alle Speere eines Wirbels einzeln in Ruhe läßt, „die Spiegelung an dem Wirbel“.

Besteht ein Quirl aus allen Speeren einer Ebene, so reduziert sich die Spiegelung an ihm auf die gewöhnliche Spiegelung an dieser Ebene. So stellt z. B.  $S^* = \bar{S}$  die Spiegelung an der Ebene  $x_2 = 0$  dar (vgl. § 3).

Im allgemeinen Falle können wir die Spiegelung folgendermaßen konstruktiv durchführen. Die Ebenen aller Büschel syntaktischer Speere, die in unserem Quirl enthalten sind, umhüllen einen Drehkegel. Den Doppelpunkt  $o$  dieses Drehkegels nehmen wir als Mittelpunkt der Einheitskugel des sphärischen Bildes. Es sei irgend ein Speer  $S$  gegeben und wir sollen den daraus durch Spiegelung an dem Quirl hervorgehenden Speer  $S^*$  aufsuchen. Liegt der Punkt  $t_\alpha$ , welcher das sphärische Bild von  $S$  ist, auf dem Kreise  $K$ , der das sphärische Bild des Quirls ist, so findet man  $S^*$  aus  $S$  durch Spiegelung an der Ebene des Büschels, der zu  $S$  syntaktischen Speere des Quirls. Im allgemeineren Falle, wenn  $t_\alpha$  nicht auf  $K$  gelegen ist, suchen wir zunächst den Pol  $k$  der Ebene des Kreises  $K$  bezüglich der Kugel. Der zweite Schnittpunkt der Verbindungslinie  $kt_\alpha$  mit der Kugel ist das sphärische Bild  $t_\alpha^*$  von  $S^*$ . Es sei  $p$  der Schnittpunkt von  $S$  mit der Tangentialebene  $\tau$  in  $t_\alpha$  an die Einheitskugel. Zu  $\tau$  legen wir die parallele Ebene  $\tau_1$  durch  $t_\alpha^*$  und projizieren  $p$  aus  $k$  zentral auf  $\tau_1$  nach  $p_1$ . Klappen wir nun die Ebene  $\tau_1$  in die Tangentialebene  $\tau^*$  in  $t_\alpha^*$  um ihre Schnittlinie in bestimmter Weise hinein, so kommt  $p_1$  in den Fußpunkt  $p^*$  von  $S^*$  auf  $\tau^*$  zu liegen. Das Hineinklappen hat hiebei so zu erfolgen, daß die bestehende Ähnlichkeit  $p \rightarrow p^*$  eine uneigentliche wird, wenn man die zum Kugelmittelpunkt gerichteten Normalen von  $\tau$  und  $\tau^*$  einander zuordnet.

Die Gruppe der automorphen Formationen eines Quirls ist natürlich ähnlich zu der eines Wirbels. Besteht der Quirl aus allen Speeren einer Ebene, so enthält er  $\infty^3$  Ketten, die wir als „orientierte Kreise“ bezeichnen können, indem wir die Büschel von Speeren mit eigentlichem Scheitel auch zu diesen Kreisen rechnen. Die sieben-gliedrige Gruppe aus  $(G_{14}, H_{14})$  muß also, soweit sie sich auf die betrachtete Ebene bezieht, orientierte Kreise wieder in solche überführen. Die Gesamtheit aller Vertauschungen der Speere einer Ebene, welche diese Eigenschaft haben, ist aber eine sieben-gliedrige, gemischte Gruppe, wie zuerst S. Lie angegeben hat,<sup>1)</sup> eine Untergruppe der zehngliedrigen Gruppe aller ebenen orientierten Be-

<sup>1)</sup> Lie, Göttinger Nachrichten, Mai 1871 und Math. Ann. 5. Bd. (1872), S. 136.

rührungstransformationen, die Kreise in Kreise überführen. Man hat diese siebengliedrige Gruppe, da sich Laguerre mit ihrer Geometrie eingehender beschäftigt hat, die „erweiterte Laguerresche Gruppe (der Ebene)“ genannt. Wir finden also:

Hält man die Gesamtheit der Speere einer (reellen, eigentlichen) Ebene fest, so vertauscht die Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  die Speere dieser Ebene ebenso, wie die erweiterte Laguerresche Gruppe.

Die automorphe Gruppe aus  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  bildet sich ab auf die sechsgliedrige „Laguerresche Gruppe“, die in der früheren invariant enthalten ist. Diese Gruppe gehört der unendlichen Gruppe von Speertransformationen an, die Scheffers die Gruppe der äquivalenten Transformationen genannt hat.<sup>1)</sup>

Wie die automorphe Gruppe eines allgemeineren Quirls dessen Speere untereinander vertauscht, erkennt man, wenn man beachtet, daß die orthogonale Projektion dieser Vertauschungen auf eine Ebene, die zur Mittelgeraden des Quirls senkrecht steht, wieder die (erweiterte) Laguerresche Gruppe ist, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Machen wir noch einige Bemerkungen bezüglich der Speerketten.

In jedem Wirbel gibt es  $\infty^3$  Ketten. Durch jede Kette geht ein einziger Quirl und  $\infty^1$  Wirbel.

Es gibt innerhalb der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  eine diskrete Gruppe von vier vertauschbaren Transformationen, die die Speere einer Kette einzeln in Ruhe lassen, nämlich

aus $G_{12}$ die Identität,	}	durch die Kette.
aus $H_{12}^{(1)}$ die Spiegelung an der Garbe		
aus $H_{12}^{(2)}$ die Spiegelung an der Kugel		
aus $H_{12}^{(3)}$ die Spiegelung an dem Quirl		

Einen speziellen Fall dieser diskreten Gruppen haben wir schon im § 3 betrachtet, nämlich die vier Transformationen  $S^* = S$ ,  $S^* = \tilde{S}$ ,  $S^* = \bar{S}$  und  $S^* = \tilde{\bar{S}}$ , welche sämtlich die Speerkette in Ruhe lassen, die aus allen Speeren der Ebene  $x_2 = 0$  gebildet wird, die durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgehen.

## § 6. Die involutorischen Transformationen der Gruppe $(G_{14}, H_{14})$ .

Wir wollen jede Transformation, die zweimal hintereinander angewendet die Identität ergibt, involutorisch nennen, so daß also auch die Identität selbst zu den involutorischen Transformationen

<sup>1)</sup> Vgl. die Abhandlung des Verfassers „Zur Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene“, Monatsh. 1910, S. 3.

gerechnet wird.<sup>1)</sup> Um nun derartige Abbildungen in unserer Gruppe zu finden, gehen wir von der Betrachtung des sphärischen Bildes aus. Da das sphärische Bild einer involutorischen Transformation wieder eine solche sein muß, so kommen hier nur die folgenden vier Fälle von reellen Möbiusschen Kreisverwandtschaften in Frage:

I. Die Identität.

II. Eine Transformation, die folgendermaßen konstruiert wird: Man nimmt zwei beliebige, voneinander verschiedene, reelle Kugelpunkte als Doppelpunkte der Abbildung an; um zu einem beliebigen dritten Punkte den entsprechenden zu finden, legt man durch ihn und die beiden Fixpunkte den Kugelkreis und ermittelt darauf bezüglich dieser beiden Punkte zu dem gegebenen Punkt den vierten harmonischen. Entsprechende Punkte werden durch die Geraden des Netzes ausgeschnitten, daß die Verbindungslinie der Doppelpunkte und deren reziproke Polare bezüglich der Kugel als Leitlinien hat. Man kann diese Kreisverwandtschaft auch durch die Aufeinanderfolge von zwei anderen, miteinander vertauschbaren ersetzen; nämlich z. B. durch die Inversionen an dem kleinsten und größten der durch die Doppelpunkte gehenden Kugelkreise. Liegen die Fixpunkte diametral gegenüber, so reduziert sich die Transformation auf die Umwendung um den verbindenden Durchmesser.

III. Die Inversion an einem (mit einem reellen Zug versehenen oder) einteiligen Kugelkreis.

IV. Die Inversion an einem nullteiligen Kugelkreis. Man kann diese auch durch zwei vertauschbare Transformationen ersetzen, nämlich durch die Spiegelung an einem einteiligen Kreise und die Umwendung an dem Durchmesser, der zu der Ebene des Kreises senkrecht ist.

Die Transformationen I und II sind eigentliche, III und IV uneigentliche Kreisverwandtschaften. Unsere Aufzählung ist ferner vollständig, d. h. jede (reelle) involutorische Kreisverwandtschaft ist gegenüber der Gruppe aller (reellen) Kreisverwandtschaften mit einer der vier aufgezählten Arten äquivalent.

Wir beginnen damit, die involutorischen Transformationen der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  zu ermitteln.

Da das sphärische Bild einer Transformation aus  $G_{12}$  eine eigentliche Kreisverwandtschaft ist, so haben wir hier nur die Fälle I und II zu berücksichtigen. Wir finden 1. die Identität und 2. die Abbildung, welche wir Spiegelung an einem Speerpaar nennen können, da bei dieser Transformation nur zwei verschiedene, nicht-syntaktische Speere in Ruhe bleiben. Vermöge der ersten Abbildung des Speerraumes entspricht dieser Transformation die Umwendung an der komplexen Euklidischen Geraden, in der sich die beiden Minimal Ebenen schneiden, die den festbleibenden Speeren zugeordnet sind. Ist diese Gerade reell,

<sup>1)</sup> Diese Festsetzung machen wir nur hier für den Augenblick, und zwar aus naheliegenden Gründen.

d. h. fallen die beiden Speere gegensinnig oder antitaktisch zusammen, so wird die Umwendung mit der zugehörigen Transformation des Speerraumes identisch. Ein zweiter Sonderfall, der den ersten umfaßt, ist der, daß die komplexe Gerade eine reelle Richtung, d. h. einen reellen uneigentlichen Punkt hat, so daß die beiden Fixspeere der Abbildung antitaktisch liegen. Man führt diesen Fall durch Transformation mit einer „Querschiebung“ auf den ersten zurück. Wenden wir uns jetzt zu dem „allgemeinen Fall“, in dem die Fixspeere weder syn- noch antitaktisch sind. Wir legen durch den Halbierungspunkt ihrer gemeinsamen Normalen oder, falls sie sich schneiden, durch ihren Schnittpunkt eine Gerade, die in beliebiger Weise zu einem Speer orientiert mit den gegebenen Speeren gleiche Winkel bildet. Schraubt man unsere Fixspeere nun um die so gefundene Gerade als Axe, so durchlaufen sie eine Speerkugel. Die Spiegelung an dem Paar der Fixspeere kann man nun durch die Aufeinanderfolge von drei bekannten Transformationen ersetzen: erstens die Spiegelung an der eben gefundenen Kugel, zweitens die Umwendung an der gemeinsamen Normalen des Speerpaares, drittens die Umkehrung. Man bemerkt, daß jeder der  $\infty^4$  Speerketten durch das Fixspeerpaar in sich transformiert wird, und zwar so, daß Speere, die bezüglich des gegebenen Paares harmonisch liegen, miteinander vertauscht werden. Das Doppelverhältnis der vier dualen Speergrößen, welche an den beiden Fixspeeren und einem Paare entsprechender Speere gehört, hat, falls es überhaupt einen bestimmten Wert hat, den Wert  $-1$ .

Wir wenden uns an zweiter Stelle zu den involutorischen Transformationen von  $H_{12}^{(1)}$ , deren sphärische Bilder wieder eigentliche Kreisverwandtschaften sind. Wir finden für den Fall I 3. die Spiegelung an einer Garbe, die wir schon in § 4 behandelt haben, und entsprechend dem Fall II erhält man eine 4. Transformation, die durch die erste Abbildung aus der Spiegelung an einer komplexen Euklidischen Ebene  $\varepsilon$  hervorgeht. Da man mit Hilfe derartiger Transformationen die ganze Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)})$  aufbauen kann, so wollen wir sie einer etwas eingehenderen Betrachtung unterziehen.

Ist die Ebene  $\varepsilon$  reell, so kann unsere Transformation zusammengesetzt werden aus der Spiegelung an dieser Ebene und der mit dieser vertauschbaren Umkehrung. Der Fall, daß die Ebene  $\varepsilon$  eine reelle uneigentliche Gerade oder eine „reelle Stellung“ hat, läßt sich analog wie im Falle 2. durch eine Querschiebung in einfacher Weise auf die erste Annahme zurückführen. Wir wollen daher voraussetzen, daß unsere Ebene  $\varepsilon$  imaginär sei und von der konjugiert-imaginären Ebene in der reellen, eigentlichen Geraden  $A$  geschnitten werde. Die Kreisverwandtschaft, welche das sphärische Bild unserer Transformation ist, kann man zusammensetzen aus der Inversion an einem einteiligen Kugelmere  $K$ , dessen Ebene auf  $A$  senkrecht steht, mit der Spiegelung

an einer (reellen) Durchmessersebene  $\delta$ , die zu  $A$  parallel ist. Man kann nun zu einem Speere  $S$ , der nicht zu  $A$  parallel ist, in folgender Weise den entsprechenden  $S^*$  aufsuchen. Man ermittelt zuerst mit Hilfe des sphärischen Bildes die Richtung von  $S^*$ . Dann legt man durch zwei verschiedene (reelle, eigentliche) Punkte  $p$  und  $q$  von  $A$  syntaktische Speere zu  $S$ , nämlich  $S_p$  und  $S_q$ , ebenso zu  $S^*$   $S_p^*$  und  $S_q^*$ . Man bringt nun die drei syntaktischen Speere  $S$ ,  $S_p$  und  $S_q$  durch eine (reelle, eigentliche) Normalebene  $\nu$  in dem Dreieck  $s$ ,  $s_p$ ,  $s_q$  zum Durchschnitt; ebenso die beiden Speere  $S_p^*$  und  $S_q^*$  mit einer Normalebene  $\nu$  in den Punkten  $s_p^*$ ,  $s_q^*$ . Der Durchstoßpunkt  $s^*$  von  $S^*$  mit  $\nu^*$  ist jetzt so zu konstruieren, daß die Dreiecke  $s$ ,  $s_p$ ,  $s_q$  und  $s^*$ ,  $s_p^*$ ,  $s_q^*$  eigentlich ähnlich werden, wenn man die orientierten Normalen  $S$  und  $S^*$  von  $\nu$  und  $\nu^*$  einander zuordnet. Dadurch ist  $S^*$  eindeutig bestimmt.

Schließlich ist noch anzugeben, wie man die zu  $A$  parallelen Speere behandelt. Es sei also  $S$  ein zu  $A$  paralleler Speer und  $S^*$  der gesuchte entsprechende Speer. Wir nehmen an, daß der Mittelpunkt der Einheitskugel des sphärischen Bildes auf  $A$  gelegen sei. Wir bringen nun  $S$  im Punkte  $s$  zum Schnitt mit der Tangentialebene  $\nu$  in dem Punkte  $s_k$  der Einheitskugel, der das sphärische Bild von  $S$  ist. Dann projizieren wir  $s_k$  aus dem Pole der Ebene des selbstentsprechenden Kreises  $K$  bezüglich der Einheitskugel auf die Tangentialebene  $\nu^*$  im Punkte  $s_k^*$ , der dem Punkt  $s_k$  diametral gegenüberliegt. Der so erhaltene Punkt  $s^*$  ist der Schnittpunkt von  $S^*$  mit  $\nu^*$ , und zwar liegt  $S^*$  antitaktisch zu  $S$ .

Bei unserer Transformation gehen alle Speere einer (reellen) Ebene  $\alpha$  durch  $A$  wieder in die Speere einer solchen Ebene  $\alpha^*$  über, und zwar liegen  $\alpha$  und  $\alpha^*$  symmetrisch bezüglich der Ebene  $\delta$ . Insbesondere werden die Speere der Ebene  $\delta$  und ebenso auch die Speere der zu  $\delta$  normalen Ebene durch  $A$  untereinander vertauscht. In  $\delta$  liegen zwei Büschel syntaktischer Speere, die bei der Transformation einzeln in Ruhe verbleiben, während es in der genannten zu  $\delta$  normalen Ebene keine (reellen) festbleibenden Speere gibt.

Betrachten wir noch die Vertauschung der Speere in der Ebene  $\delta$  etwas eingehender. Es sei  $K_\delta$  der Schnitt von  $\delta$  mit der Einheitskugel des sphärischen Bildes und  $v$  der Mittelpunkt der Kugel. Um zu einem Speere  $S$  von  $\delta$ , der nicht zu  $A$  parallel ist, den entsprechenden  $S^*$  aufzusuchen, sucht man zuerst den Punkt  $s_k$  auf  $K_\delta$  so auf daß  $\overrightarrow{vs_k}$  syntaktisch zu  $S$  ist. Dann sucht man den zweiten Schnittpunkt  $s_k^*$  der Verbindungslinie  $ks_k$  mit  $K_\delta$ . Der durch den Schnittpunkt von  $S$  mit  $A$  syntaktisch zu  $\overrightarrow{vs_k^*}$  gezogene Speer ist der gesuchte  $S^*$ .

Diese Transformation der Speere einer Ebene gehört der „Laguerreschen Gruppe“ an, kann als „Laguerresche

Spiegelung“ bezeichnet werden und steht in gewisser Analogie zur Transformation durch reziproke Radien (Inversion).<sup>1)</sup>

Wir kommen jetzt zu den involutorischen Abbildungen der Schar  $H_{12}^{(2)}$ , deren sphärisches Bild die Schar der uneigentlichen Kreisverwandtschaften ist. Entsprechend dem sphärischen Bilde III erhalten wir als 5. involutorische Transformation die Spiegelung an einer Speerkugel. Setzt man eine derartige Spiegelung noch zusammen mit einer mit ihr vertauschbaren Transformation, nämlich der Umwendung an der Mittellinie der Kugel, so erhält man die 6. involutorische Transformation, deren sphärisches Bild von der Art IV ist. Aus der Spiegelung an einem Normalennetz erhält man durch Zusammensetzung mit der Umwendung an der (eigentlichen) Achse des Netzes die Umkehrung, die also auch hierher gehört.

Zum Schlusse haben wir noch die Schar  $H_{12}^{(3)}$  ins Auge zu fassen, zu der als sphärisches Bild wieder die Schar der uneigentlichen Kreisverwandtschaften gehört. Dem sphärischen Bilde III entspricht 7. die Spiegelung an einem Quirl. Als Sonderfall tritt hier die Spiegelung an einer (reellen, eigentlichen) Ebene auf. Fügt man zur Spiegelung an einem allgemeinen Quirl noch die Umwendung um seine Mittelgerade hinzu, so erhält man 8. die involutorische Transformation von  $H_{12}^{(3)}$ , deren sphärisches Bild mit der Nummer IV zu bezeichnen ist. Als Spezialfall gehört hierher die Spiegelung an einem (reellen, eigentlichen) Punkte.

Damit sind die involutorischen Transformationen der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  erschöpfend aufgezählt, d. h. jede derartige Transformation ist mit einer der acht angezählten äquivalent.

Innerhalb der Gruppe  $G_{14}$  gibt es keine neuen involutorischen Transformationen, d. h. diese Abbildungen sind sämtlich gegenüber  $G_{12}$  mit den Transformationen 1., 2., 3. und 4. äquivalent. Dies folgt sofort aus dem Zusammenhange der Gruppe  $G_{14}$  mit den komplexen Ähnlichkeitstransformationen.

Innerhalb der Schar  $H_{14}$  gibt es noch  $2 \cdot \infty^1$  gegenüber  $G_{12}$  verschiedene involutorische Abbildungen, die aus den Transformationen 5., 7.; 6., 8. am einfachsten mittels geeigneter Schwenkungen durch beliebige Winkel hervorgehen. Innerhalb  $(G_{14}, H_{14})$  gibt es nur sechs verschiedene Klassen involutorischer Transformationen, nämlich die Abbildungen 1., 2., 3., 4., dann die Spiegelungen an Wirbeln, die zu 5. und 7. äquivalent sind, und endlich diejenigen Abbildungen, welche zu 6. und 8. äquivalent sind.

Stellen wir noch die einfachsten Formen unserer acht involutorischen Abbildungen in  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  übersichtlich zusammen.

<sup>1)</sup> Vgl. § 5 und die Abh. des Verf. „Zur Geom. der Speere in der Ebene“, Monatshefte f. Math. XXI. (1910) bes. S. 15.

- $$G_{12} \begin{cases} 1) \text{ Identität.} \\ 2) \text{ Umwendung.} \end{cases}$$
- $$H_{12}^{(1)} \begin{cases} 3) \text{ Spiegelung an einem Punkte} \times \text{Umkehrung.} \\ 4) \text{ Spiegelung an einer Ebene} \times \text{Umkehrung.} \end{cases}$$
- $$H_{12}^{(2)} \begin{cases} 5) \text{ Umwendung} \times \text{Umkehrung.} \\ 6) \text{ Umkehrung.} \end{cases}$$
- $$H_{12}^{(3)} \begin{cases} 7) \text{ Spiegelung an einer Ebene.} \\ 8) \text{ Spiegelung an einem Punkte.} \end{cases}$$

### § 7. Abgeschlossene Speerkontinuen.

Will man das Kontinuum der (reellen) Speere oder, wie wir jetzt sagen wollen, der (reellen) eigentlichen Speere durch Hinzufügung „uneigentlicher“ Speere zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzen, das für die Betrachtung der Gruppen  $G_{12}$  und  $G_{14}$  geeignet ist, so bietet sich zunächst der folgende Weg dar. Wir hatten die eigentlichen Speere umkehrbar eindeutig auf die Mannigfaltigkeit der Minimalebenen abgebildet und diese (in § 1) durch drei „homogene“ komplexe Koordinaten  $t_{00}, t_1, t_2$  dargestellt. Nun wird nach der Anschauung der projektiven Geometrie das Kontinuum der Minimalebenen durch eine einzige „uneigentliche Minimalebene“ abgeschlossen, nämlich durch die uneigentliche oder unendlich ferne Ebene, die dem oben ausgeschlossenen Wertetripel  $t_{00} \neq 0, t_1 = 0, t_2 = 0$  entspricht. Es liegt daher der Gedanke nahe, auch das Speerkontinuum durch Einführung eines einzigen uneigentlichen Speeres abzuschließen. Die homogenen komplexen Koordinaten  $t_{00}, t_1, t_2$  stellen dieses abgeschlossene Kontinuum, das wir mit  $\mathfrak{C}_1$  bezeichnen werden, ausnahmslos eindeutig dar, natürlich unter der Voraussetzung, daß man das Tripel  $0, 0, 0$  ausschließt.

Aus dieser ersten Ergänzung kann man leicht eine zweite herleiten. Wir setzen

$$(1) \quad t_{00} = \tau_{00}, \quad t_1 = \tau \tau_1, \quad t_2 = \tau \tau_2$$

und betrachten die komplexen Zahlen  $\tau_{00}, \tau, \tau_1, \tau_2$  als Speerkoordinaten. Bedeuten  $\rho$  und  $\sigma$  zwei beliebige komplexe, von Null verschiedene Zahlen, so sehen wir die Systeme  $(\tau_{00}, \tau, \tau_1, \tau_2)$  und  $(\rho^2 \sigma^2 \tau_{00}, \rho \tau, \sigma \tau_1, \sigma \tau_2)$  als äquivalent an. Ferner wollen wir die Wertesysteme  $(\tau_{00}, \tau, 0, 0)$  ausschließen. Dadurch kommen wir zu einem neuen Kontinuum  $\mathfrak{C}_2$  mit  $\infty^3$  uneigentlichen Elementen, die den Zusammenhang der (reellen) Punkte einer Kugel haben und durch das Verschwinden von  $\tau$  charakterisiert sind. Jedem Verhältnis  $\tau_1 : \tau_2 = t_1 : t_2$  entspricht ein einziges uneigentliches Element  $(\rho^2 t_{00}, 0, \tau_1, \tau_2)$ , d. h. in jedem Bündel syntaktischer Speere liegt ein einziger uneigentlicher Speer, umgekehrt geht durch

jeden uneigentlichen Speer ein einziges Bündel syntaktischer Speere hindurch. Die uneigentlichen Speere bilden sich also auf die sphärischen Bilder der Bündel syntaktischer Speere auf der Einheitskugel ein-eindeutig ab.

Wir benützen im Folgenden einen für die Geometrie grundlegenden Begriff, den Herr Study eingeführt hat, nämlich den Begriff, der zu einer Gruppe gehörigen „natürlichen“ Kontinuen.<sup>1)</sup>

Wir haben bis jetzt abgeschlossene Speerkontinuen in der Weise hergestellt, daß wir die (reellen) Speere auf die komplexen Tangentialebenen eines irreduziblen Kegelschnittes oder dual auf die komplexen Punkte eines irreduziblen Kegels abgebildet haben, dann haben wir das Punktkontinuum dieses Kegels in einer gegenüber der automorphen projektiven Gruppe „natürlichen“ Weise zu einem abgeschlossenen Kontinuum ergänzt und diese Ergänzung auf den Speerraum übertragen. Auf diesem Wege können wir aber nichts Neues mehr gewinnen, da die beiden angegebenen Kontinuen die einzigen natürlichen Kontinuen für die Gruppe eines Kegels sind, was man ebenso nachweisen kann, wie Study den analogen Satz für seine Gruppe der radialen Projektivitäten beweist.<sup>2)</sup> Wir wollen daher jetzt einen anderen Weg einschlagen, der uns zu einem dritten Speerkontinuum  $\mathfrak{C}_3$  führen wird, das die Grundlage unserer späteren Untersuchungen bilden soll.

An Stelle der in § 2 benützten unhomogenen dualen Koordinaten  $X_1, X_2, X_3$  wollen wir hier homogene duale Koordinaten für die Speere einführen, indem wir an Stelle von  $X_k, X_k : X_0$  setzen. Dann besteht zwischen den neuen dualen Größen die Beziehung

$$(2) \quad X_0^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$$

Wir trennen ferner skalare und vektorielle Teile

$$(3) \quad \begin{aligned} X_0 &= \mathfrak{x}_{00} + \varepsilon \mathfrak{x}_{00}, & X_1 &= \mathfrak{x}_{01} + \varepsilon \mathfrak{x}_{23}, \\ X_2 &= \mathfrak{x}_{02} + \varepsilon \mathfrak{x}_{31}, & X_3 &= \mathfrak{x}_{03} + \varepsilon \mathfrak{x}_{31}, \end{aligned}$$

so daß die Beziehungen statt haben

$$(4) \quad \mathfrak{x}_{00}^2 = \mathfrak{x}_{01}^2 + \mathfrak{x}_{02}^2 + \mathfrak{x}_{03}^2,$$

$$(5) \quad \mathfrak{x}_{00} \mathfrak{x}_{00} = \mathfrak{x}_{01} \mathfrak{x}_{23} + \mathfrak{x}_{02} \mathfrak{x}_{31} + \mathfrak{x}_{03} \mathfrak{x}_{12}.$$

<sup>1)</sup> Man vgl. *Geom. d. Dynamen* § 27, bes. S. 272. Ferner Study, die *Elemente 2. Ordnung . . .*, Leipzig Ber. 53 (1901), S. 338 und *Enzyklopädie d. m. W. III, AB, 4 b, Fano* S. 338, Nr. 19.

<sup>2)</sup> *Geom. der Dynamen* § 27. Vgl. auch die Arbeit des Verfassers „*Unters. zur Geom. d. Speere in der Euklidischen Ebene*“, *Monatsh.* 1910, bes. § 11, S. 52.

Dann führen wir nochmals neue Bezeichnungen ein, indem wir

$$(6) \quad x_{0k} = \xi_k \quad \{k = 0, 1, 2, 3\}$$

setzen und die zweiteiligen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

mit  $\xi_{rs}$  bezeichnen  $\{rs = 01, 02, 03, 23, 31, 12\}$ , also z. B.

$$(7) \quad x_{00} x_{23} - x_{01} x_{01} = \xi_{01}.$$

Zur Abkürzung führen wir endlich noch Vektorenbezeichnungen ein:

$$(8) \quad \begin{aligned} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi, \\ (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) &= \underline{\xi}, \\ (\xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}) &= \underline{\underline{\xi}}. \end{aligned}$$

Dann bestehen folgende Gleichungen:

$$(9) \quad \xi_0^2 = (\xi | \xi),$$

$$(10) \quad \xi_0 (\underline{\xi} | \underline{\xi}) = \xi_0 (\underline{\underline{\xi}} | \underline{\underline{\xi}}) = (\xi \underline{\xi} \underline{\underline{\xi}}),$$

$$(11) \quad (\xi | \underline{\xi}) = 0, (\underline{\xi} | \underline{\underline{\xi}}) = 0, (\underline{\underline{\xi}} | \xi) = 0,$$

$$(12) \quad \begin{cases} * + \xi_1 \xi_{23} + \xi_2 \xi_{31} + \xi_3 \xi_{12} = 0, \\ -\xi_0 \xi_{23} \quad * + \xi_2 \xi_{03} - \xi_3 \xi_{02} = 0, \\ -\xi_0 \xi_{31} - \xi_1 \xi_{03} \quad * + \xi_3 \xi_{01} = 0, \\ -\xi_0 \xi_{12} + \xi_1 \xi_{02} - \xi_2 \xi_{01} \quad * = 0, \end{cases}$$

$$(12)^* \quad \begin{cases} * + \xi_1 \xi_{01} + \xi_2 \xi_{02} + \xi_3 \xi_{03} = 0, \\ -\xi_0 \xi_{01} \quad * - \xi_2 \xi_{12} + \xi_3 \xi_{31} = 0, \\ -\xi_0 \xi_{02} + \xi_1 \xi_{12} \quad * - \xi_3 \xi_{23} = 0, \\ -\xi_0 \xi_{03} - \xi_1 \xi_{31} + \xi_2 \xi_{23} \quad * = 0, \end{cases}$$

$$(13) \quad \hat{\xi} \hat{\xi} = \xi_0 \underline{\xi}, \xi_0 \hat{\underline{\xi}} = (\underline{\xi} | \underline{\xi}) \xi = (\underline{\underline{\xi}} | \underline{\underline{\xi}}) \xi, \hat{\underline{\underline{\xi}}} = \xi_0 \underline{\xi}. \quad ^1)$$

<sup>1)</sup> Eine Darstellung der  $\xi_k, \xi_{rs}$  als rationale Funktionen von vier unabhängigen Parametern ( $t, T, \bar{t}, \bar{T}$ ) geben die Formeln (23) des § 8.

Zwischen den Vektoren  $\xi$ ,  $\underline{\xi}$  und  $\overline{\xi}$  und den zuvor benützten Vektoren  $\mathfrak{X}$ ,  $\underline{\mathfrak{X}}$ ,  $\overline{\mathfrak{X}}$  (vgl. § 2) bestehen die Relationen

$$(14) \quad \mathfrak{X} = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \underline{\mathfrak{X}} = \frac{\underline{\xi}}{\xi_0^2}, \quad \overline{\mathfrak{X}} = \frac{\overline{\xi}}{\xi_0^2}.$$

Sehen wir nun die Koordinaten  $\xi_k, \xi_{rs}$  in dem Sinne als homogen an, daß die Systeme  $(\xi_k, \xi_{rs})$  und  $(\rho \xi_k, \rho^2 \xi_{rs})$  als äquivalent gelten, so stellen diese Koordinaten, von denen wir nur voraussetzen müssen, daß sie nicht sämtlich gleichzeitig verschwinden, ein abgeschlossenes Kontinuum dar, von dem wir zeigen werden, daß es für die Gruppe  $G_{14}$  ein natürliches Kontinuum ist.

Wir setzen  $\xi_r \cdot \xi_s = x_{rs}$  und deuten die zehn  $x_{rs}$ , zwischen denen die lineare Beziehung  $x_{00} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$  besteht, und die sechs  $\xi_{rs}$  als überzählige homogene Punktkoordinaten in einem ebenen Raume  $R_{14}$  von vierzehn Dimensionen. Unser Speerkontinuum bildet sich ausnahmslos ein-eindeutig auf eine rationale vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit  $M_4$  in diesem  $R_{14}$  ab.<sup>1)</sup> Wir haben nun zu zeigen, daß sich unsere Gruppe  $G_{14}$  auf eine Gruppe von Kollineationen im  $R_{14}$  abbildet, die naturgemäß  $M_4$  als Ganzes in Ruhe lassen müssen.

Zunächst können wir die Transformationen von  $G_{12}$  in den dualen Koordinaten  $X_k$  durch die linearen Substitutionen

$$(15) \quad X_k^* = \sum_{l=0}^{l=3} A_{kl} X_l, \quad \{k=0, 1, 2, 3\}$$

darstellen, welche die Gleichung  $X_0^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$  in sich transformieren. Dabei müssen wir noch voraussetzen, daß die Determinante der (reell-) dualen  $A_{kl} = a_{kl} + \varepsilon b_{kl}$  einen von Null verschiedenen und zwar positiven skalaren Bestandteil  $|a_{kl}|$  habe. Daraus folgt in den Koordinaten  $\xi_k, \xi_{rs}$  für  $G_{12}$  die Darstellung

$$(16) \quad \xi_k^* = \sum_{l=0}^3 a_{kl} \xi_l, \quad \{k=0, 1, 2, 3\}$$

$$\xi_{rs}^* = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{si} \\ b_{ri} & b_{sj} \end{vmatrix} \xi_i \xi_j + \sum_{m,n} \begin{vmatrix} a_{rm} & a_{rn} \\ a_{sm} & a_{sn} \end{vmatrix} \xi_{mn},$$

wobei  $mn$  und ebenso  $rs$  die Wertepaare 01, 02, 03, 23, 31, 12 zu durchlaufen haben. Die Gruppe  $G_{12}$  bildet sich also tatsächlich auf Kollinationen im  $R_{14}$  ab, von deren Determinanten man zeigen kann, daß sie nicht verschwinden. Nehmen wir noch die Transformationen  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$  der diskreten Gruppe des § 3.

<sup>1)</sup> Dies ist bereits bei J. Grünwald angedeutet a. a. O., S. 135.

$$(17) \quad \begin{cases} \mathfrak{D}_1 & \left\{ \begin{array}{l} \xi_0^* = \xi_0, \xi_1^* = \xi_1, \xi_2^* = \xi_2, \xi_3^* = \xi_3, \\ \xi_{01}^* = -\xi_{01}, \xi_{02}^* = -\xi_{02}, \xi_{03}^* = -\xi_{03}, \\ \xi_{23}^* = -\xi_{23}, \xi_{31}^* = -\xi_{31}, \xi_{12}^* = -\xi_{12}; \end{array} \right. \\ \mathfrak{D}_2 & \left\{ \begin{array}{l} \xi_0^* = \xi_0, \xi_1^* = \xi_1, \xi_2^* = -\xi_2, \xi_3^* = \xi_3, \\ \xi_{01}^* = \xi_{01}, \xi_{02}^* = -\xi_{02}, \xi_{03}^* = \xi_{03}, \\ \xi_{23}^* = -\xi_{23}, \xi_{31}^* = \xi_{31}, \xi_{12}^* = \xi_{12}; \end{array} \right. \\ \mathfrak{D}_3 & \left\{ \begin{array}{l} \xi_0^* = \xi_0, \xi_1^* = -\xi_1, \xi_2^* = -\xi_2, \xi_3^* = -\xi_3, \\ \xi_{01}^* = -\xi_{01}, \xi_{02}^* = -\xi_{02}, \xi_{03}^* = -\xi_{03}, \\ \xi_{23}^* = -\xi_{23}, \xi_{31}^* = -\xi_{31}, \xi_{12}^* = -\xi_{12} \end{array} \right. \end{cases}$$

und endlich eine zweigliedrige Gruppe, durch deren Adjunktion man  $G_{12}$  zu  $G_{14}$  erweitern kann,

$$(18) \quad \begin{aligned} & \xi_k^* = \xi_k, \{k = 0, 1, 2, 3\} \\ & \xi_{01}^* = \lambda (\xi_{01} \cos \beta + \xi_{23} \sin \beta), \quad \xi_{23}^* = \lambda (\xi_{23} \cos \beta - \xi_{01} \sin \beta), \\ & \xi_{02}^* = \lambda (\xi_{02} \cos \beta + \xi_{31} \sin \beta), \quad \xi_{31}^* = \lambda (\xi_{31} \cos \beta - \xi_{02} \sin \beta), \\ & \xi_{03}^* = \lambda (\xi_{03} \cos \beta + \xi_{12} \sin \beta), \quad \xi_{12}^* = \lambda (\xi_{12} \cos \beta - \xi_{03} \sin \beta), \\ & \qquad \qquad \qquad \{ \lambda \neq 0 \} \end{aligned}$$

zu den obigen Transformationen hinzu, so erkennen wir, daß sich alle Transformationen von  $(G_{14}, H_{14})$  auf automorphe Kollineationen der  $M_4$  abbilden. Damit ist gezeigt, daß unser abgeschlossenes Speerkontinuum  $\mathfrak{C}_3$  für die Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  ein natürliches Kontinuum ist.

Wir wollen nunmehr die Mannigfaltigkeit der uneigentlichen Speere unseres natürlichen Kontinuums betrachten, die durch das gleichzeitige Verschwinden aller  $x_{rs}$  charakterisiert sind. Wir finden, daß es  $\infty^3$  uneigentliche Speere gibt, die sich auf die rationale  $M_3$  von der vierten Ordnung abbilden, die als vollständiger Durchschnitt der beiden vierfach ausgedehnten quadratischen Räume

$$(19) \quad \begin{aligned} & \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + \xi_{03}^2 = \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2 + \xi_{12}^2, \\ & \xi_{01} \xi_{23} + \xi_{02} \xi_{31} + \xi_{03} \xi_{12} = 0 \end{aligned}$$

in dem ebenen  $R_3 \{x_{rs} = 0\}$  auftritt. Die  $M_3$  bleibt natürlich bei der betrachteten 14gliedrigen gemischten Gruppe von automorphen Kollineationen der  $M_4$  als Ganzes in Ruhe.

In jedem Büschel syntaktischer Speere liegt ein einziger uneigentlicher Speer und umgekehrt gehen durch jeden uneigentlichen Speer  $\infty^1$  Büschel syntaktischer Speere, die durch beliebige Schiebungen untereinander vertauscht werden. Ein Büschel syntaktischer Speere kann nämlich mit Hilfe eines Parameters  $\omega$  so dargestellt werden:

$$\underline{x}_{0k}^* = \underline{x}_{0k}, \{k = 0, 1, 2, 3\}$$

$$\underline{x}_{00}^* = \underline{x}_{00} + \omega \underline{x}'_{00}, \quad \underline{x}_{rs}^* = \underline{x}_{rs} + \omega \underline{x}'_{rs},$$

$$\{rs = 00, 23, 31, 12\},$$

oder

$$\xi_k^* = \xi_k, \quad \xi_{ij}^* = \xi_{ij} + \omega \xi'_{ij}.$$

Für  $\lim \omega = \infty$  erhält man den uneigentlichen Speer des Büschels

$$\xi_k^* = 0, \quad \xi_{ij}^* = \xi'_{ij}.$$

Mittels unserer Formeln erhält man sofort eine Abbildung der uneigentlichen Speere auf die Tangenten der Einheitskugel oder, was im reellen Gebiete gleichbedeutend ist, auf ihre Linienelemente. Deuten wir nämlich die  $\xi_{ij}$  als Plücker'sche Linienkoordinaten einer Geraden  $\Xi$ , was ja zufolge der Gleichung  $(\xi | \xi) = 0$  möglich ist, so stellt die Gleichung  $(\xi | \xi) = (\underline{\xi} | \underline{\xi})$  den Tangentenkomplex der Einheitskugel dar, wenn wir uns die Linienkoordinaten aus den homogen geschriebenen rechtwinkligen Punktkoordinaten zusammengesetzt denken. Die zu einem eigentlichen Speer, der nicht durch den Koordinatenanfangspunkt  $o$  geht, gehörige Gerade  $\Xi$  geht zufolge der Gleichungen (12) auch durch das sphärische Bild  $\left(x_k = \frac{\xi_k}{\xi_0}\right)$  des Speeres hindurch und steht zufolge der zweiten Gleichung (14) auf der Verbindungsebene des Speeres mit  $o$  normal. Lassen wir nun unseren Speer in einem Parallelenbüschel ins unendliche rücken, so dreht sich die zugehörige Gerade in der Tangentialebene um den Punkt der Einheitskugel, der das sphärische Bild des Speeres ist, und steht in der Grenze auf der Ebene des Büschels normal. Wir werden zweckmäßig die so erhaltene Kugeltangente oder das Linienelement, welches sie mit der Kugel gemein hat, das sphärische Bild des uneigentlichen Speeres nennen. Man konstruiert demnach das sphärische Bild des uneigentlichen Speeres, der in einem gegebenen Parallelenbüschel enthalten ist, indem man in dem Punkte der Einheitskugel,

welcher das sphärische Bild der eigentlichen Speere des Büschels ist, das Linienelement der Kugel verzeichnet, das auf der Ebene des Büschels senkrecht steht.

Man kann durch Einführung eines Äquivalenzbegriffes von unserem natürlichen Kontinuum auf das zweite abgeschlossene Speerkontinuum zurückgelangen, indem man nämlich Linienelemente des sphärischen Bildes mit gemeinsamem Anfangspunkt nicht voneinander unterscheidet.

Um einen Einblick in die Struktur der  $M_3$  zu gewinnen, wird es nötig sein, auch ihre analytische Fortsetzung ins komplexe Gebiet zu betrachten.

In dem Büschel von quadratischen, vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, das durch die beiden Gleichungen (19) bestimmt ist, gibt es sechs von verschwindender Diskriminante. Davon fallen aber je drei zusammen, so daß nur zwei verschiedene vorhanden sind, nämlich die beiden konjugiert-imaginären

$$(20) \quad (\xi_{01} + i \xi_{23})^2 + (\xi_{02} + i \xi_{31})^2 + (\xi_{03} + i \xi_{12})^2 = 0,$$

$$(20)^* \quad (\xi_{01} - i \xi_{23})^2 + (\xi_{02} - i \xi_{31})^2 + (\xi_{03} + i \xi_{12})^2 = 0.$$

Die erste dieser Mannigfaltigkeiten besteht aus allen Geraden, die gleichzeitig die imaginäre Ebene (d. h. die lineare Mannigfaltigkeit mit zwei komplexen Dimensionen)

$$(21) \quad \xi_{01} + i \xi_{23} = 0, \quad \xi_{02} + i \xi_{31} = 0, \quad \xi_{03} + i \xi_{12} = 0$$

und den Kegelschnitt  $C$  treffen, der aus der konjugiert-imaginären Ebene

$$(21)^* \quad \xi_{01} - i \xi_{23} = 0, \quad \xi_{02} - i \xi_{31} = 0, \quad \xi_{03} - i \xi_{12} = 0$$

durch (20) ausgeschnitten wird. Analoges gilt von der konjugiert-imaginären Mannigfaltigkeit (20)\*. Der Durchschnitt der beiden (20) und (20)\*, das ist die analytische Fortsetzung der  $M_3$ , besteht somit aus allen komplexen Geraden, die gleichzeitig die beiden konjugiert-imaginären Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$  schneiden.

Nimmt man in  $R_5$  zwei beliebige Kegelschnitte an, deren Ebenen keinen Punkt gemein haben, so erfüllen die gemeinsamen Treffgeraden der beiden Kegelschnitte eine Mannigfaltigkeit von drei komplexen Dimensionen, die zur analytischen Fortsetzung unserer  $M_3$  gegenüber der Gruppe der komplexen Kollineationen des  $R_5$  äquivalent ist. Daraus ersieht man, daß die  $M_3$  von 28 reellen Konstanten abhängt.

Auf die Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$ , längs welcher sich die quadratischen Mannigfaltigkeiten des Büschels (19) berühren, kommen wir auch in einfacher Weise, wenn wir von unserer Abbildung der  $M_3$  auf den Tangentenkomplex der Einheitskugel ausgehen. Diesem Komplex gehören nämlich die beiden Scharen von Kugel-

erzeugenden an und diese entsprechen gerade den beiden Kegelschnitten  $C$  und  $\bar{C}$ . Jede Kugeltangente, die nicht selbst Kugelerzeugende ist, liegt in einem einzigen Büschel von Tangenten der Kugel und in diesem Büschel liegen auch zwei ihrer Erzeugenden. Daraus folgt für die  $M_3$ : Jeder Punkt der  $M_3$ , der nicht auf einem der Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$  liegt, gehört einer einzigen Erzeugenden der  $M_3$  an und diese Erzeugende trifft jeden der beiden Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$  in einem Punkte. Die Erzeugenden der  $M_3$  sind demnach ein-eindeutig auf die Punkte der Einheitskugel bezogen, und zwar die reellen Erzeugenden auf die reellen Kugelpunkte. Die Einheitskugel ist ferner Riemannsche Zahlenkugel für die binären Gebiete der Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$ .

Mit Hilfe unserer sphärischen Abbildung ist es nun auch leicht die  $\infty^4$  (reellen) Kegelschnitte zu finden, die auf der  $M_3$  gelegen sind. Jeder reellen Regelschar, deren Erzeugende Kugeltangenten sind, entspricht ein solcher Kegelschnitt. Und umgekehrt: jedem reellen Kegelschnitt der  $M_3$  entspricht eine solche Regelschar, vorausgesetzt, daß wir auch die Schaar der Erzeugenden eines der Kugel umschriebenen (irreduziblen) Kegels und die Schaar der Tangenten eines (irreduziblen) Kreises der Kugel unter diesen Begriff fassen. An Stelle der reellen Erzeugenden der Regelscharen können wir auch bloß ihre Berührungselemente mit der Kugel betrachten. Das ist eine kontinuierliche Figur von  $\infty^1$  Linienelementen, wir wollen sie für den Augenblick ein Band von Elementen nennen, deren Punkte einem irreduziblen Kugelkreise angehören und deren Geraden diesen Kreis unter einem festen Winkel treffen.

Wir stellen einige äquivalente Eigenschaften der Kugel und der  $M_3$  gegenüber:

Auf der Kugel gibt es  $\infty^4$  Bänder.

Durch jedes (reelle) Linienelement der Kugel gehen  $\infty^2$  dieser Bänder.

Durch zwei (reelle) Linienelemente, die ihre Punkte nicht gemeinsam haben, gehen zwei Bänder hindurch.

Auf der  $M_3$  liegen  $\infty^4$  (reelle) Kegelschnitte.

Durch jeden (reellen) Punkt der  $M_3$  gehen  $\infty^2$  dieser Kegelschnitte.

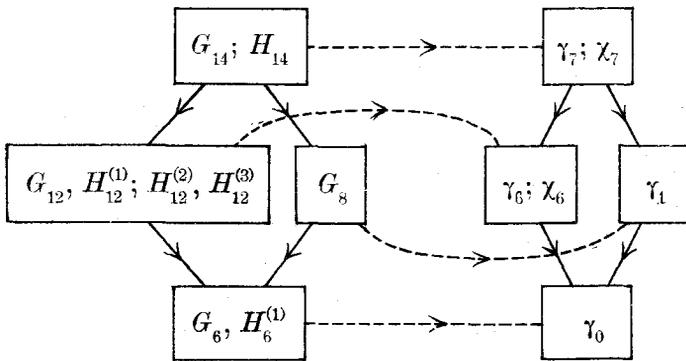
Durch zwei (reelle) Punkte der  $M_3$ , die nicht auf derselben Erzeugenden liegen, gehen zwei ihrer Kegelschnitte.

Wir wollen nunmehr die Gruppe der automorphen Kollineationen der  $M_3$  mittels der sphärischen Abbildung untersuchen. Zunächst orientieren wir uns durch eine Abzählung über die Parameterzahl der Gruppe: Man findet als Differenz der Parameterzahl 35 der Kollineationsgruppe im  $R_5$  und der Konstantenzahl 28 unserer  $M_3$  für die automorphe Gruppe die Parameterzahl 7. Nun zeigt es sich aber, daß bei der oben aufgestellten 14gliedrigen, gemischten Gruppe von automorphen Kollineationen ( $G_{14}, H_{14}$ ) der  $M_4$ , wie wir gleich näher ausführen werden, die Punkte der  $M_3$  sieben-

gliedrig vertauscht werden,<sup>1)</sup> und es liegt daher von vorneherein der Gedanke nahe, daß durch diese Vertauschungen schon die gesamte (reelle) Kollineationsgruppe der  $M_3$  erschöpft ist.

Beachten wir zunächst, wie bei der Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)})$  die Linienelemente der Kugel vertauscht werden, wenn wir sie als sphärische Bilder der uneigentlichen Speere ansehen. Aus den Sätzen (A) des § 3 folgt unmittelbar, daß diese Elementtransformationen „erweiterte“ Punkttransformationen auf der Einheitskugel sind, und zwar bei  $G_{12}, H_{12}^{(1)}$  eigentliche und bei  $H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)}$  uneigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaften. Nehmen wir die umfassendere Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$ , so tritt zu der sechsgliedrigen Gruppe  $(\gamma_6, \chi_6)$  der Kreisverwandtschaften noch eine eingliedrige, kontinuierliche Gruppe  $\gamma_1$  von Elementtransformationen hinzu, deren Transformationen die Eigenschaft haben, die Punkte der Linienelemente in Ruhe zu lassen und ihre Geraden alle durch den gleichen Winkel  $\beta$  zu drehen. Dadurch wird  $(\gamma_6, \chi_6)$  zu einer siebengliedrigen, gemischten Gruppe  $(\gamma_7, \chi_7)$  erweitert, die  $(\gamma_6, \chi_6)$ ,  $\gamma_6$  und  $\gamma_1$  als invariante Untergruppen enthält. Insbesondere ist  $\gamma_1$  eine ausgezeichnete invariante Untergruppe, d. h. jede ihrer Transformationen ist mit jeder Transformation von  $(\gamma_7, \chi_7)$  vertauschbar.

Zur besseren Übersicht geben wir eine Gruppentafel an.



Dabei ist links  $(G_{14}, H_{14})$  angegeben und invariante Untergruppen dieser Gruppe, rechts die induzierten Gruppen von Elementtransformationen auf der Einheitskugel oder anders aufgefaßt, die zugehörigen Gruppen von Punktvertauschungen auf der  $M_3$ . Zusammengehörige, zueinander meromorphe Gruppen sind durch punktierte Linien verbunden. Hierbei ist die Identität rechts mit  $\gamma_0$  bezeichnet.

<sup>1)</sup> Dieselben Vertauschungen erleiden die Punkte der  $M_3$  auch schon durch die Abbildungen der Gruppe  $(G_{13}, H_{13})$ .

Man kann nun leicht zeigen, daß durch  $(\gamma_7, \chi_7)$  die Gruppe der (reellen) automorphen Kollineationen der  $M_3$  bereits erschöpft ist. Nehmen wir an, es sei uns eine beliebige derartige Kollineation vorgelegt. Sie muß jedenfalls die Erzeugenden der  $M_3$  untereinander vertauschen. Demgemäß muß die zugehörige Elementtransformation auf der Einheitskugel die Eigenschaft haben, Linienelemente mit gemeinsamem Punkt wieder in solche überzuführen, also mit einer Punkttransformation verbunden zu sein. Da ferner bei der Kollineation die Kegelschnitte auf der  $M_3$  untereinander vertauscht werden, so muß unsere Elementtransformation Bänder in Bänder überführen und daher die zugehörige Punkttransformation auf der Kugel Kreise in Kreise. Eine derartige Punkttransformation auf der Kugel ist aber bekanntlich eine Möbiussche Kreisverwandtschaft.<sup>1)</sup> Nehmen wir auf der Kugel zwei (reelle) Linienelemente  $E$  und  $E'$  an. Ihnen mögen in der Kreisverwandtschaft die Elemente  $E_1$  und  $E'_1$  und in der Elementtransformation die Elemente  $E^*$  und  $E'^*$  entsprechen. Die Elemente  $E_1$  und  $E^*$  und ebenso die Elemente  $E'_1$  und  $E'^*$  haben dann ihren Punkt gemeinsam. Es mögen ferner die beiden ersten den (mod.  $\pi$  bestimmten) Winkel  $\beta$  und die beiden zweiten den Winkel  $\beta'$  einschließen. Aus der Bedingung, daß Bänder in Bänder übergehen müssen, können wir schließen, daß  $\beta \equiv \beta' \pmod{\pi}$  ist. Nehmen wir nämlich etwa an, daß die Elemente  $E$  und  $E'$  ihren Punkt nicht gemeinsam haben und denken wir uns eines der beiden Bänder  $\mathfrak{B}$  konstruiert, die  $E$  und  $E'$  verbinden. Diesem entspricht in der Kreisverwandtschaft ein Band  $\mathfrak{B}_1$  durch  $E_1$  und  $E'_1$  und in der Elementtransformation ein Band  $\mathfrak{B}^*$  durch  $E^*$  und  $E'^*$ , und zwar haben  $\mathfrak{B}$ , und  $\mathfrak{B}^*$  den Kreis, welcher als Punktort ihrer Linienelemente auftritt, gemeinsam, d. h. ihre Elemente schneiden ein und denselben Kreis unter festem Winkel. Daraus folgt aber, daß (bis auf Vielfache von  $\pi$ )  $\beta = \beta'$  ist und damit ist auch bewiesen, daß durch  $(\gamma_7, \chi_7)$  die automorphe Kollineationsgruppe der  $M_3$  erschöpft ist.

Bei den Abbildungen von  $\gamma_7$  wird jeder der Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$  in sich selbst transformiert, während bei denen von  $\chi_7$  die beiden Kegelschnitte untereinander vertauscht werden. Die Kollineationen der Gruppe  $\gamma_6$  sind im  $R_3$  dadurch charakterisiert, daß sie die quadratischen Mannigfaltigkeiten des Büschels (19) durch die  $M_3$  einzeln in Ruhe lassen, hingegen die von  $\gamma_1$  dadurch, daß sie die Erzeugenden der  $M_3$  einzeln in Ruhe lassen.

Die Punkte der  $M_3$  sind im reellen Gebiete sämtlich regulär, im komplexen Gebiete hingegen sind die Punkte der Kegelschnitte

<sup>1)</sup> Man kommt zu demselben Ergebnis auch durch folgende Betrachtung: Bei der Kollineation der  $M_3$  muß der Kegelschnitt  $C$  entweder auf sich selbst oder auf  $\bar{C}$  projektiv bezogen werden. Die Einheitskugel, d. i. die zugehörige Riemannsche Zahlenkugel wird daher durch eine Kreisverwandtschaft in sich transformiert.

$C$  und  $\bar{C}$ , durch die die  $M_3$  doppelt hindurchgeht, singular. Die Fortschreitungsrichtungen auf  $M_3$ , welche von einem Punkte  $p$  des Kegelschnittes  $C$  ausgehen, erfüllen die quadratische Mannigfaltigkeit von drei komplexen Dimensionen, welche von den Geraden überdeckt wird, die gleichzeitig die Tangente in  $p$  an  $C$  und den Kegelschnitt  $\bar{C}$  treffen.

Gehen wir jetzt dazu über, den Bau der Mannigfaltigkeit  $M_4$  näher zu untersuchen. Zunächst bemerkt man, daß die  $M_4$  (oder genauer ihr reeller Zug) ein abgeschlossenes Kontinuum von  $\infty^2$  (gewöhnlichen) Ebenen enthält, deren jede einem Bündel syntaktischer Speere entspricht. Durch jeden reellen Punkt der  $M_4$  geht eine einzige dieser Ebenen hindurch und jede der Ebenen schneidet die invariante  $M_3$  in einer ihrer Erzeugenden. Setzt man die Mannigfaltigkeit der  $\infty^2$  Ebenen, die man die erzeugenden Ebenen der  $M_4$  nennen wird, ins komplexe Gebiet hinein fort, so erhält man, wie man unschwer einsehen kann, alle komplexen Ebenen auf der  $M_4$ . Auch durch einen komplexen Punkt der  $M_4$  geht in der Regel nur eine der erzeugenden Ebenen hindurch, ausgenommen sind nur die Punkte der ausgezeichneten Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$ , durch deren jeden  $\infty^2$  der  $\infty^4$  komplexen erzeugenden Ebenen hindurchlaufen.

Die  $M_4$  enthält keine Gerade, die nicht auf einer ihrer erzeugenden Ebenen gelegen wäre. Da jeder reellen Geraden auf  $M_4$ , die nicht ganz auf der  $M_3$  liegt, demnach ein Büschel syntaktischer Speere zugeordnet ist, so liegt es nahe, das Kontinuum der  $\infty^4$  Büschel syntaktischer Speere durch Hinzufügung von  $\infty^2$  „uneigentlichen“ Büscheln zu einem abgeschlossenen Kontinuum zu ergänzen. Jedes derartige Büschel besteht aus den  $\infty^1$  uneigentlichen Speeren eines Bündels syntaktischer Speere und auf der  $M_4$  ist ihm eine Erzeugende der  $M_3$  zugeordnet.

Die Punkte der  $M_4$ , welche nicht gleichzeitig auf der  $M_3$  liegen, sind regulär. Doch auch noch in jedem Punkte der  $M_3$ , der nicht auf  $C$  oder  $\bar{C}$  liegt, gibt es einen eindeutig bestimmten Tangential- $R_4$  an die  $M_4$ , den man erhält, wenn man den Tangential- $R_3$  an die  $M_3$  in diesem Punkte mit der erzeugenden Ebene der  $M_4$  verbindet, die durch den Punkt hindurchgeht.

Die Punkte der Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$  sind hingegen in der Weise singular, daß die Tangenten an die  $M_4$  in einem dieser Punkte einen rationalen „Kegel“ von der vierten Ordnung in einem  $R_7$  erfüllen. Jeder derartige Kegel ist, wie man ohne weiteres bestätigt, gegenüber komplexen Kollineationen äquivalent zu einer Mannigfaltigkeit, die man folgendermaßen konstruiert. Man nimmt zuerst eine rationale Regelfläche vierter Ordnung in einem  $R_5$  an, die durch Verbindung entsprechender Punkte von projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitten  $K_0$  und  $K_\infty$  entsteht, deren Ebenen sich nicht treffen. Benützen wir die Parameter  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda$ ,

die durch die Bedingung  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$  verbunden sind, so können wir eine solche Regelfläche so darstellen, daß wir die sechs homogenen Koordinaten in  $R_5$  einzeln gleichsetzen

$$\begin{aligned} \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \\ \lambda \alpha_1, \quad \lambda \alpha_2, \quad \lambda \alpha_3, \end{aligned}$$

wobei dann die Kegelschnitte  $K_0$  und  $K_\infty$  etwa den Werken 0 und  $\infty$  von  $\lambda$  entsprechen mögen. Projiziert man nun unsere Regelfläche aus einer Geraden  $R_1$ , die mit dem  $R_5$  keinen Punkt gemein hat, so entsteht ein Kegel der gewünschten Art. Die singuläre Gerade  $R_1$  eines solchen Tangentenkegels in einem Punkte von  $C$  oder  $\bar{C}$  ist die Tangente in diesem Punkte an  $C$  oder  $\bar{C}$ .

Die erzeugenden Ebenen der  $M_4$ , welche durch den Punkt von  $C$  oder  $\bar{C}$  hindurchgehen, erfüllen einen Kegel von drei komplexen Dimensionen der aus dem Tangentenkegel durch einen  $R_6$  ausgeschnitten wird. Ein äquivalentes Gebilde erhält man demgemäß dadurch, daß man die eben benützte Regelfläche vierter Ordnung aus einem Punkte projiziert, der nicht in dem  $R_5$  der Regelfläche liegt. Diese Regelfläche ist aber einfach überdeckt von  $\infty^2$  irreduziblen Kegelschnitten, deren jeder einem festen Wert des komplexen Parameters  $\lambda$  entspricht. Der Kegelschnitt wird aus dem singulären Punkte des dreifach ausgedehnten Kegels durch einen (gewöhnlichen) irreduziblen Kegel zweiter Ordnung projiziert. Demnach gehen durch jeden Punkt von  $C$  oder  $\bar{C}$   $\infty^2$  derartige Kegel, die den Punkt als Scheitel haben und ganz in der Mannigfaltigkeit  $M_4$  enthalten sind. Man erkennt auch, daß es andere Kegel zweiter Ordnung auf der  $M_4$  nicht geben kann. Einen der  $\infty^2$  Kegel durch einen Punkt von  $C$  kann man sofort angeben, nämlich den Kegel, durch den  $\bar{C}$  aus diesem Punkte projiziert wird.

Unsere Mannigfaltigkeit  $M_4$  enthält zwei von einander getrennte, abgeschlossene Kontinuen von  $\infty^4$  irreduziblen Kegeln zweiter Ordnung. Die Scheitel dieser Kegel sind auf die beiden singulären Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$  verteilt.

Durch jeden Punkt der  $M_4$ , der nicht auf  $C$  oder  $\bar{C}$  liegt, geht aus jedem der beiden Kontinuen, ein einziger Kegel hindurch.

Die  $M_4$  ist also von den beiden Scharen von Kegeln in ähnlicher Weise doppelt überdeckt, wie eine Kugel durch die beiden Scharen von Erzeugenden. Diese Analogie erstreckt sich aber noch weiter, man findet nämlich:

Jeder dieser  $\infty^4$  Kegel, der keinen der Kegelschnitte  $C$  oder  $\bar{C}$  ganz enthält, enthält nur einen einzigen reellen Punkt. Jeder der hier ausgeschlossenen Kegel enthält hingegen eine ganze reelle Erzeugende der  $M_3$ .

Ordnet man jedem Kegel des einen der beiden Kontinuen seinen reellen Punkt zu, so entsteht dadurch eine im Allgemeinen (1, 1)-deutige Zuordnung. Erinnern wir uns des zweiten  $\mathfrak{C}_2$  der von uns zu Anfang dieses Paragraphen betrachteten Speerkontinuen, bei dem es nur  $\infty^2$  uneigentliche Speere gab, die den Erzeugenden der  $M_3$  entsprachen, so erkennen wir:

Jedes der beiden Kegelkontinuen bildet sich ausnahmslos ein-eindeutig auf das Speerkontinuum  $\mathfrak{C}_2$  ab.

Wir wollen jetzt zusehen, welche Gebilde den Speer-Garben, -Wirbeln und -Ketten auf der  $M_4$  zugeordnet sind.

Als Beispiel einer Garbe werden wir am einfachsten die Nullgarbe verwenden, die aus allen Speeren durch den Koordinatenanfangspunkt gebildet wird. Für sie sind die sechs  $\xi_{rs} = 0$  und es bleiben nur die zehn  $x_{rs} = \xi_r \xi_s$  übrig, von denen nur neun linear unabhängig sind infolge der Bedingung  $x_{00} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ . Wir erhalten so eine rationale Fläche von der achten Ordnung in einem ebenen Raume von acht Dimensionen, die auf die Einheitskugel ausnahmslos ein-eindeutig abgebildet ist. Diese Fläche hat mit der  $M_3$  keinen Punkt gemein, da überdies ihr  $R_3$  mit dem  $R_5$  der  $M_3$  keinen Punkt gemein hat.

Als Beispiel eines Wirbels könnte man etwa das orientierte Normalennetz der  $x_3$ -Achse verwenden. Man findet für die zugehörige rationale Regelfläche auf  $M_4$  dann eine einfache Parameterdarstellung. Die Fläche ist von der sechsten Ordnung und liegt in einem  $R_7$ , der mit dem  $R_5$  der  $M_3$  eine Ebene gemeinsam hat. Diese Ebene enthält einen irreduziblen Kegelschnitt, in dem sich die Fläche und die  $M_3$  durchsetzen.

Einer Speerkette — etwa dem Durchschnitt der eben verwendeten Garbe und des eben verwendeten Wirbels — entspricht auf der  $M_4$  eine rationale Normalkurve vierter Ordnung in einem  $R_4$ .

Die Ordnung der  $M_4$  ist 20. Man kann dies etwa so feststellen, daß man die  $M_4$  mit dem  $R_{13}$  schneidet, der durch die Gleichung  $x_{33} = 0$  bestimmt ist. Das Schnittgebilde zerfällt: 1. in die invariante  $M_3$ , die von der vierten Ordnung ist und bei der Abzählung einfach in Rechnung zu ziehen ist, 2. eine ebenfalls dreifach ausgedehnte rationale Mannigfaltigkeit, die alle Punkte der  $M_4$  enthält, die den zur  $x_3$ -Achse normalen eigentlichen Speeren entsprechen. Diese Mannigfaltigkeit ist von der Ordnung acht, ist aber doppelt in Rechnung zu bringen, da der  $R_{13}$  die  $M_4$  längs dieses Gebildes berührt. So ergibt sich tatsächlich für die  $M_4$  die Ordnung  $4 + 2 \cdot 8 = 20$ .

Es ist offenbar die Frage von einer gewissen Bedeutung, ob es (reelle) automorphe Kollineationen der  $M_4$  gibt, die nicht in der Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  enthalten sind. Gäbe es nämlich solche

Transformationen, so wäre  $(G_{14}, H_{14})$  eine Untergruppe der umfassenderen Gruppe aller Kollineationen des  $R_{14}$ , die unsere  $M_4$  in sich selbst transformieren, und die Geometrie unserer Gruppe, wäre in der Geometrie einer weiteren endlichen Gruppe enthalten, die der unseren in natürlicher Weise übergeordnet ist. Es zeigt sich jedoch, daß dies nicht der Fall ist:

Die Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  enthält *sämtliche* reellen automorphen Kollineationen der  $M_4$ .

Um dies nachzuweisen, machen wir zunächst die Bemerkung, daß bei jeder Kollineation der  $M_4$  die  $M_3$  invariant bleiben muß, denn die singulären Kegelschnitte  $C, \bar{C}$  müssen doch jedenfalls einzeln fest bleiben oder miteinander vertauscht werden und durch sie ist die  $M_3$ , der Ort der Treffgeraden beider Kegelschnitte, schon bestimmt.

Um die Vertauschung der reellen Punkte der  $M_4$ , die nicht auf  $M_3$  liegen, zu untersuchen, benützen wir die komplexen Parameter  $t, \bar{T}$ , deren wir uns schon in § 2 bedient haben. Die genannten Punkte der  $M_4$  sind im allgemeinen ein-eindeutig auf die endlichen Wertepaare  $t, \bar{T}$  abgebildet. Und zwar entspricht jedem festen Werte von  $t$  eine der  $\infty^2$  reellen erzeugenden Ebenen auf  $M_4$  und jede dieser Ebenen (mit Ausnahme von  $t = \infty$  ist Gaußsche Ebene für die zweite komplexe Veränderliche  $\bar{T}$ , wenn man die beiden Schnittpunkte der Ebene mit  $C$  und  $\bar{C}$  als ihre absoluten Punkte ansieht.

Ersetzt man in den Formeln (1), (2), (6), (8) des § 2 die Veränderlichen  $\mathcal{X}_{r,s}$  durch die „homogenen“  $\xi$  mit Hilfe der Formeln (14) unseres jetzigen Paragraphen, so erkennt man, daß sich die automorphen Kollineationen notwendiger Weise so darstellen lassen müssen:

$$\begin{cases} t^* = f(t, \bar{t}, T, \bar{T}), \\ T^* = F(t, \bar{t}, T, \bar{T}), \end{cases}$$

wo  $f$  und  $F$  rationale Funktionen der angegebenen Veränderlichen bedeuten.

Wir machen jetzt von einer für unsere Überlegung wichtigen Tatsache Anwendung, deren Beweis wir uns auf später aufsparen. Wir werden in § 9 zeigen, daß bei jeder automorphen Kollineation der  $M_4$  analytische Beziehungen zwischen den Parametern  $t, \bar{T}$  wieder in solche übergehen müssen. Das ergibt für die Transformationsformeln die einfacher Gestalt

$$\begin{cases} t^* = t^*(t, T), \\ T^* = T^*(t, T), \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} t^* = t^*(\bar{t}, \bar{T}), \\ T^* = T^*(\bar{t}, \bar{T}), \end{cases}$$

wobei die Funktionszeichen wieder rationale Funktionen andeuten.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Man vgl. den Lehrsatz III in Study (Circolo mat. di Palermo 1906) Sugli enti analitici.

Über die Gestalt dieser Funktionen können wir sofort einige weitere Aussagen machen. Da bei den gesuchten Kollineationen die erzeugenden Ebenen der  $M_4$  untereinander vertauscht werden, so kann  $t^*$  nur von  $t$  oder  $\bar{t}$  abhängen, und zwar wird diese Abhängigkeit durch eine linear-gebrochene Substitution vermittelt. Ordnet man nämlich jeder der erzeugenden Ebenen ihre beiden Schnittpunkte mit  $C$  und  $\bar{C}$  zu, so werden die binären Gebiete dieser beiden Kegelschnitte durch den komplexen Parameter  $t$  dargestellt und die projektiven Vertauschungen der Punkte dieser Kegelschnitte drücken sich durch linear-gebrochene Substitutionen von  $t$  aus. Greifen wir anderseits zwei zusammengehörige Werte  $t, t^*$  heraus. Ihnen entsprechen zwei erzeugende Ebenen, die für die Veränderlichen  $T, T^*$  Gaußsche Ebenen sind, wenn wir ihre Schnittpunkte mit  $C$  und  $\bar{C}$  als absolute Punkte ansehen. Unter derselben Annahme sind aber die beiden ebenen durch die gesuchte Kollineation ähnlich aufeinander bezogen. Unsere Transformation muß demnach so geschrieben werden können:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^* = \frac{a_{21} + a_{22} t}{a_{11} + a_{12} t}, \\ T^* = H(t) + \Theta(t) T, \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} t^* = \frac{a_{21} + a_{22} \bar{t}}{a_{11} + a_{12} \bar{t}}, \\ T^* = H(\bar{t}) + \Theta(\bar{t}) \bar{T}. \end{array} \right.$$

Nennen wir einen reellen Flächenzug, der auf  $M_4$ , aber nicht auf  $M_3$  liegt und durch eine analytische Beziehung zwischen den Parametern  $t, T$  dargestellt wird, einen „isotropen Flächenzug“, dann können wir das schon oben benützte Ergebnis, dessen Beweis wir auf später verschoben haben, auch so aussprechen: Jede automorphe Kollineation von  $M_4$  vertauscht die isotropen Flächenzüge untereinander. Zu diesen Flächenzügen gehören die Mannigfaltigkeiten, welche den Speergarben entsprechen und durch Gleichungen von der Form

$$(23) \quad T + A + Bt + Ct^2 = 0$$

dargestellt werden.<sup>1)</sup> Diese speziellen (algebraischen) isotropen Flächenzüge sind unter allen anderen durch die folgenden zwei Eigenschaften gekennzeichnet: 1. Sie haben mit jeder (reellen) erzeugenden Ebene der  $M_4$  nur einen einzigen Punkt gemein; 2. zwei verschiedene derartige Züge schneiden sich stets in zwei Punkten, die auch zusammenfallen können. Diese Eigenschaften, von denen auch schon die zweite allein genügt, sind aber gegenüber den zu suchenden Kollineationen invariant. Demnach müssen diese die zu Garben gehörigen isotropen Flächenzüge untereinander vertauschen. Sollen aber die Transformationen (22) Gleichungen von der Form (23) wieder in solche überführen, so folgt, daß sie entweder die Ge-

<sup>1)</sup> Vgl. § 4 (2\*).

stalt (5) in § 1 haben müssen oder die, welche man hieraus erhält, wenn man rechts für  $t$  und  $T$   $\bar{t}$  und  $\bar{T}$  einführt.

Damit ist aber das oben angeführte Ergebnis nachgewiesen.

Das Speerkontinuum  $\mathfrak{C}_3$  ist in gewissem Sinne das einfachste aller zur Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  gehörigen natürlichen Kontinuen, doch kann man ihm noch eine Reihe anderer an die Seite stellen, insbesondere sind auch die Kontinuen  $\mathfrak{C}_1$  und  $\mathfrak{C}_2$  natürlich. Der Verfasser behält sich vor auf diese Fragen noch ausführlicher zurückzukommen.

### § 8. Komplexe Speere und ihre reelle Darstellung.

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung der  $\infty^8$  komplexen Speere unseres natürlichen Kontinuums  $\mathfrak{C}_3$ , die den komplexen Punkten der  $M_4$  entsprechen. Hierbei wird uns eine reelle Darstellung der komplexen Speere gute Dienste leisten, die nach dem Vorhergehenden ziemlich nahe liegt.

Die beiden ausgezeichneten Kegelschnitte  $C$  {Formeln (20) und (21)\* des § 7} und  $\bar{C}$  auf der  $M_4$  wollen wir durch die Beiworte „links“ und „rechts“ voneinander unterscheiden.  $C$  sei also der linksseitige,  $\bar{C}$  der rechtsseitige ausgezeichnete Kegelschnitt. Entsprechend soll jeder der  $\infty^4$  irreduziblen Kegel zweiter Ordnung auf  $M_4$  linksseitig oder rechtsseitig heißen, je nachdem er seinen Doppelpunkt auf  $C$  oder  $\bar{C}$  hat. Nennen wir ferner die  $M_3$  das „uneigentliche“ Gebilde auf  $M_4$  und diejenigen Punkte und Kegel der  $M_4$ , die auf der  $M_3$  liegen ebenfalls „uneigentlich“, die anderen Punkte und Kegel hingegen „eigentlich“, so können wir frühere Sätze so aussprechen:

Durch jeden eigentlichen komplexen Punkt  $p$  der  $M_4$  gehen zwei eigentliche Kegel der  $M_4$  hindurch, ein linksseitiger und ein rechtsseitiger, deren jeder einen einzigen, und zwar eigentlichen reellen Punkt  $\{p_l$  und  $p_r\}$  enthält. Durch Angabe zweier beliebiger reeller, eigentlicher Punkte  $p_l$  und  $p_r$  ist umgekehrt ein einziger komplexer Punkt  $p$  der  $M_4$  eindeutig bestimmt, nämlich der Schnittpunkt des linksseitigen Kegels durch  $p_l$  mit dem rechtsseitigen durch  $p_r$ . Dadurch sind also die komplexen, eigentlichen Punkte der  $M_4$  umkehrbar eindeutig abgebildet auf die geordneten Paare reeller, eigentlicher Punkte derselben Mannigfaltigkeit.

Auf der uneigentlichen Mannigfaltigkeit  $M_3$  liegen die Dinge etwas anders. Nehmen wir zuerst einen komplexen Punkt  $p$  auf  $M_3$  an, der auf keinem der ausgezeichneten Kegelschnitte  $C$  und  $\bar{C}$  liegt. Durch  $p$  geht sowohl ein linksseitiger wie ein rechtsseitiger, und

zwar uneigentlicher Kegel der  $M_4$ , deren jeder eine reelle Erzeugende  $\{G_l \text{ und } G_r\}$  der  $M_3$  enthält. Diese Geraden findet man folgendermaßen: Man legt durch  $p$  die komplexe Erzeugende der  $M_3$ , die  $C$  und  $\bar{C}$  in den Punkten  $c_1$  und  $c_2$  treffen möge.  $G_l$  ist dann die Verbindungslinie von  $c_1$  mit dem konjugiert-komplexen Punkt  $\bar{c}_1$  und ebenso  $G_r$  die Verbindungslinie von  $c_2$  und  $\bar{c}_2$ . Nehmen wir also irgend einen reellen Punkt  $p_l$  auf  $G_l$  und einen zweiten  $p_r$  auf  $G_r$  an, so stellt uns dieses Punktepaar den Punkt  $p$  dar, ebenso aber auch jeden anderen Punkt der Erzeugenden  $[c_1 c_2]$ . Jeder uneigentliche Punkt  $p$ , der weder auf  $C$  noch  $\bar{C}$  gelegen ist, bildet sich also auf  $\infty^2$  Paare uneigentlicher, reeller Punkte  $(p_l, p_r)$  ab, die sich auf zwei reelle Erzeugende  $G_l$  und  $G_r$  der  $M_3$  verteilen, und umgekehrt stellt jedes solche Punktepaar  $\infty^2$  Punkte auf einer bestimmten komplexen Erzeugenden der  $M_3$  dar.

Noch anders gestalten sich die Verhältnisse für die „ausgezeichnet-uneigentlichen“ Punkte der  $M_4$ , d. h. für die Punkte auf  $C$  und  $\bar{C}$ . Es sei z. B.  $p$  auf  $C$  gelegen. Dann gibt es  $\infty^2$  linksseitige Kegel auf  $M_4$ , die durch  $p$  hindurchgehen, und zwar diesen Punkt als Scheitel haben. Die reellen Punkte dieser Kegel gehören einer der  $\infty^2$  reellen Ebenen auf  $M_4$  an. Durch  $p$  gehen ferner  $\infty^2$  rechtsseitige Kegel, nämlich alle uneigentlichen, rechtsseitigen Kegel, deren jeder eine reelle Erzeugende der  $M_3$  enthält. Gibt man daher einen reellen eigentlichen Punkt  $p_l$  und einen reellen uneigentlichen Punkt  $p_r$  der  $M_4$  an, so ist dadurch zwar ein einziger linksseitiger, ausgezeichneter Punkt  $p$  festgelegt, es wird jedoch derselbe Punkt  $p$  dargestellt, wenn wir an die Stelle von  $p_l$  irgend einen anderen reellen Punkt der Ebene von  $M_4$  durch  $p$  und an die Stelle von  $p_r$  irgend einen anderen reellen, uneigentlichen Punkt treten lassen. Man ersieht daraus, daß unsere Abbildung im uneigentlichen Gebiete nicht mehr so einfach ist und nur durch Einführung ziemlich verwickelter Äquivalenzbegriffe umkehrbar eindeutig gemacht werden könnte.

Wir deuten nun die imaginären Punkte der  $M_4$  als „imaginäre Speere“. Aus den Formeln (14) des § 7 geht hervor, daß auch im komplexen Gebiete die Mannigfaltigkeit der Euklidischen Geraden durch die Mannigfaltigkeit der „Euklidischen Speere“  $\{\xi_0^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \neq 0\}$  geradeso wie im rechten Gebiete doppelt überdeckt ist: Jede komplexe Euklidische Gerade trägt zwei verschiedene Euklidische Speere, die durch die Umkehrung mit einander vertauscht werden, und jeder Euklidische Speer liegt auf einer einzigen Euklidischen Geraden. Bezeichnen wir die aus Hesseschen Punktkoordinaten  $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$  zusammengesetzten Plückersehen Linienkoordinaten der Euklidischen Geraden mit

$p_{ik} \{p_{01} p_{23} + p_{02} p_{31} + p_{03} p_{12} = 0, \quad p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2 \neq 0\}$ , so finden wir für die Koordinaten der darauf liegenden Speere die Werte:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_0 = \rho w, & \xi_k = \rho p_{0k} \quad \{k = 1, 2, 3\} \\ \xi_{01} = \rho^2 p_{23} w, \dots, & \xi_{23} = \rho^2 (p_{02} p_{12} - p_{03} p_{23}), \dots \\ & w^2 = p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2 \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} p_{01} : p_{02} : p_{03} : \\ p_{23} : p_{31} : p_{12} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 \xi_1 : \xi_0 \xi_2 : \xi_0 \xi_3 : \\ \xi_{01} : \xi_{02} : \xi_{03} \end{array} \right.$$

Zur Abkürzung führen wir auch Vektorenbezeichnungen ein

$(p_{01}, p_{02}, p_{03}) = p, \quad (p_{23}, p_{31}, p_{12}) = \underline{p}$ , dann ist

$$(3) \quad \xi_0 = \rho w, \quad \xi = \rho p, \quad \underline{\xi} = \rho^2 \underline{p} w, \quad \underline{\underline{\xi}} = \rho^2 \underline{\underline{p}} \underline{\underline{p}}.$$

Indem wir uns zunächst auf Euklidische Gerade und Speere beschränken, wollen wir untersuchen, welche Mannigfaltigkeit von Geraden diejenigen Speere überdecken, die den  $\infty^4$  Punkten eines eigentlichen Kegels auf  $M_4$  entsprechen. Greifen wir auf der  $M_4$  den reellen, eigentlichen Punkt heraus, der der  $x_3$ -Achse unseres Koordinatensystems entspricht:

$$(4) \quad \begin{aligned} t = 0, \quad T = 0 \\ \xi_0 = 1, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 1; \quad \xi_{rs} = 0. \end{aligned}$$

Den linksseitigen Kegel durch diesen Punkt können wir mit Hilfe der (unhomogenen) Parameter  $\mu, \nu$  so darstellen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \xi_0 = 1, & \xi_1 = \mu, & \xi_2 = i\mu, & \xi_3 = 1; \\ x_{00} = 1, & x_{01} = \mu, & x_{02} = i\mu, & x_{03} = 1, \\ & x_{11} = \mu^2, & x_{12} = i\mu^2, & x_{13} = \mu, \\ & & x_{22} = -\mu^2, & x_{23} = i\mu, \\ & & & x_{33} = 1; \\ & \xi_{01} = \nu, & \xi_{02} = i\nu, & \xi_{03} = 0, \\ & \xi_{23} = -i\nu, & \xi_{31} = \nu, & \xi_{12} = 0. \end{array} \right.$$

Sein Scheitel auf  $C$  hat die Koordinaten  $\{\nu = \infty\}$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_k = 0; \quad x_{rs} = 0; \\ \xi_{01} = 1, \quad \xi_{02} = i, \quad \xi_{03} = 0, \\ \xi_{23} = -i, \quad \xi_{31} = 1, \quad \xi_{12} = 0. \end{array} \right.$$

Die von den zugehörigen Speeren überdeckten Geraden haben nach Formel (2) die Koordinaten

$$(9) \quad \left. \begin{array}{l} p_{01} : p_{02} : p_{03} : \\ p_{23} : p_{31} : p_{12} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mu : i\mu : 1 : \\ \nu : i\nu : 0 , \end{array} \right.$$

liegen also in der Minimalebene

$$(10) \quad x_1 + i x_2 = 0.$$

Dieselbe Minimalebene enthält jedoch auch die Speere

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = 1, \quad \xi_1 = -\mu, \quad \xi_2 = -i\mu, \quad \xi_3 = -1; \\ x_{00} = 1, \quad x_{01} = -\mu, \quad x_{02} = -i\mu, \quad x_{03} = -1, \\ \qquad \qquad \qquad x_{11} = \mu^2, \quad x_{12} = i\mu^2, \quad x_{13} = \mu, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x_{22} = -\mu^2, \quad x_{23} = i\mu, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad x_{33} = 1; \\ \qquad \qquad \qquad \xi_{01} = -\nu, \quad \xi_{02} = -i\nu, \quad \xi_{03} = 0, \\ \qquad \qquad \qquad \xi_{23} = -i\nu, \quad \xi_{31} = \nu, \quad \xi_{12} = 0. \end{array} \right.$$

Diesem entspricht ein rechtsseitiger Kegel auf  $M_4$  mit dem Scheitel

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_k = 0; \quad x_{rs} = 0; \\ \xi_{01} = -1, \quad \xi_{02} = -i, \quad \xi_{03} = 0, \\ \xi_{23} = -i, \quad \xi_{31} = 1, \quad \xi_{12} = 0 \end{array} \right.$$

auf  $\bar{C}$ .

Während den komplexen Euklidischen Speeren einer Euklidischen Ebene  $\infty^4$  Punkte auf der  $M_4$  entsprechen, die einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen angehören, gehören die Punkte welche den komplexen Euklidischen Speeren einer Minimalebene entsprechen, zwei Kegeln auf der  $M_4$  an, einem linksseitigen und einem rechtsseitigen.<sup>1)</sup> Die beiden Kegel werden durch die automorphe Kollineation der  $M_4$  mit einander vertauscht, welche der Umkehrung entspricht.

Betrachtet man den komplexen Speer als Raumelement, so erscheint es daher vorteilhaft, die Gesamtheit der Minimalebenen doppelt zu überdecken und entsprechend den linksseitigen und rechtsseitigen Kegeln der  $M_4$  linksseitige und rechtsseitige Minimalebenen zu unterscheiden. Die beiden, voneinander völlig getrennten Kontinuen von je  $\infty^4$  „einseitigen“ und, wie wir jetzt beifügen wollen, „eigentlichen“ Minimalebenen wird man zweckmäßig durch je  $\infty^2$  „uneigentliche, einseitige“ Minimalebenen, die man etwa auf die Punkte des absoluten Kegelschnittes abbilden könnte, zu abgeschlossenen Kontinuen ergänzen. Jedes Büschel von einseitigen Minimalebenen enthält eine

<sup>1)</sup> Es genügt natürlich, wenn wir, wie das hier geschehen ist, dies für eine beliebig herausgegriffene Minimalebene nachweisen, da durch die reellen Bewegungen die Minimalebenen transitiv vertauscht werden, gerade so wie durch die zugehörigen Kollineationen der  $M_4$  deren reelle, eigentliche Punkte.

einzigste uneigentliche Minimalebene und umgekehrt, durch jede uneigentliche, einseitige Minimalebene geht ein einziges Bündel von einseitigen Minimalen hindurch. Jede gewöhnliche oder besser „doppelseitige“ Minimalebene trägt zwei einseitige, eine links- und eine rechtsseitige. Zwei einseitige, eigentliche Minimalen gleicher Art haben stets keinen eigentlichen, zwei von verschiedener Art haben stets einen einzigen, und zwar eigentlichen Speer gemein. Jede einseitige, eigentliche Minimalebene enthält einen einzigen reellen, und zwar eigentlichen Speer.

Bei der in § 2 betrachteten Zuordnung von reellen, eigentlichen Speeren und eigentlichen, doppelseitigen Minimalen, hatten wir jedem solchen Speer diejenige doppelseitige Minimalebene zugeordnet, welche die linksseitige Minimalebene trägt, die durch den Speer hindurchgeht.

Aus der reellen Abbildung der komplexen, eigentlichen Punkte der  $M_4$  ergibt sich nun folgendes: Die komplexen, eigentlichen Speere werden ausnahmslos umkehrbar eindeutig abgebildet auf die geordneten Paare reeller, eigentlicher Speere. Man findet zu einem komplexen, eigentlichen Speere  $S$  sein reelles Bild  $(S_l, S_r)$ , indem man den reellen Speer  $S_l$  der linksseitigen und den reellen Speer  $S_r$  der rechtsseitigen Minimalebene durch  $S$  aufsucht. Ist umgekehrt ein beliebiges geordnetes Paar reeller eigentlicher Speere  $(S_l, S_r)$  vorgelegt, so findet man den dargestellten komplexen, eigentlichen Speer  $S$  als gemeinsamen Speer der linksseitigen Minimalebene durch  $S_l$  mit der rechtsseitigen durch  $S_r$ .

Man bemerkt, daß  $S_l$  auch in der rechtsseitigen Minimalebene durch  $\bar{S}$ , den zu  $S$  konjugiert-komplexen Speer, liegt und ebenso  $S_r$  in der linksseitigen Minimalebene durch  $\bar{S}$ . Eigentliche komplexe Speere mit reeller Richtung, d. h. mit reellen sphärischen Bilde  $\{\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3\}$  bilden sich ab auf geordnete Paare syntaktischer Speere. Insbesondere bilden sich reelle eigentliche Speere ab auf Paare zusammenfallender Speere  $\{S = S_l = S_r\}$ . Zu komplexen Euklidischen Speeren  $\{\xi_0 \neq 0\}$  gehören Paare reeller, nicht-antitaktischer Speere.

Wir richten nun unser Augenmerk auf die  $\infty^6$  Speere, die durch die {gegenüber  $G_{12}$  nicht-invariante} Bedingung  $\xi_0 = 0$  charakterisiert sind und die wir akzessorische Speere nennen wollen.<sup>1)</sup> Das entsprechende Gebilde auf  $M_4$ , der Schnitt mit dem  $R_{13}$   $x_{00} = 0$ , zerfällt in zwei analytisch-getrennte Mannigfaltigkeiten, nämlich in die Mannigfaltigkeit  $M_3$  der „uneigentlichen“ Punkte, längs welcher die  $M_4$  von dem  $R_{13}$  berührt wird, und

<sup>1)</sup> Die Terminologie ist der des Herrn Study in der Geom. der Dynamen nachgebildet. Vgl. dort S. 290.

eine zweite nationale Mannigfaltigkeit  $V_3$  von der Ordnung 8 in einem reellen  $R_{10}$ , die aus  $\infty^2$  imaginären Ebenen besteht, keinen reellen Punkt enthält und die  $M_3$  in einer rationalen Regelfläche vierter Ordnung trifft.

Beachten wir zunächst die eigentlichen Punkte der  $V_3$ , denen die eigentlichen, akzessorischen Speere entsprechen. Für sie ist zwar  $\xi_0 = 0$ , aber es sind nicht gleichzeitig alle  $\xi_k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ), oder in Vektorbezeichnung  $\xi \neq 0$ . Wollen wir die von diesen Speeren überdeckten Geraden des Plückerischen Geradenkontinuums ermitteln, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden: entweder ist neben  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi \neq 0$  auch  $\underline{\xi} = 0$  oder nicht ( $\underline{\xi} \neq 0$ ).

Im zweiten Falle liefern die Formeln (2) eine bestimmte, und zwar uneigentliche, von dem Speer überdeckte Gerade  $\{p = 0, \underline{p} = \underline{\xi} \neq 0\}$ . Da überdies sich zufolge der Formeln (13) des § 7 aus  $\xi_0 = 0$  ergibt, daß die Vektoren  $\xi$  und  $\underline{\xi}$  proportional

$\{\underline{\xi} \hat{=} 0\}$  sind und somit  $\xi_0^2 = (\xi | \xi) = (\underline{\xi} | \underline{\xi}) = (\underline{p} | \underline{p}) = 0$  wird, ist die überdeckte Gerade eine Tangente des absoluten Kegelschnittes. Wir finden also, daß  $\infty^4$  verschiedene eigentliche Speere, für die die Verhältnisse  $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \xi_{01} : \xi_{02} : \xi_{03}$  bestimmte feste Werte haben, eine einzige Gerade des Plückerischen Linienkontinuums überdecken, und zwar eine uneigentliche Gerade, nämlich eine Tangente des absoluten Kegelschnittes.

Nehmen wir an zweiter Stelle an, es sei neben  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi \neq 0$  noch  $\underline{\xi} = 0$ . Jetzt werden die Formeln (2) illusorisch, doch können wir aus den Gleichungen (3) dieser Paragraphen ersehen, daß

$$(13) \quad \xi = \rho p, \quad \underline{\xi} = \rho^2 \hat{p} \underline{p}$$

wird und hieraus

$$(14) \quad p = \frac{1}{\rho} \xi, \quad \underline{p} = \frac{1}{\rho} \frac{\hat{\xi} v}{(\xi | v)},$$

worin  $v$  einen im übrigen beliebigen Vektor bedeutet, dessen inneres Produkt mit  $\xi$  nicht verschwindet  $\{(\xi | v) \neq 0\}$ . Ändern wir den Vektor  $v$ , so durchläuft die Gerade mit dem Koordinaten  $p, \underline{p}$  ein Büschel von Minimalgeraden. Nehmen wir umgekehrt ein solches Büschel an,

$$(15) \quad p = p_0, \quad \underline{p} = \underline{p}_0 + \lambda p_0, \quad \{p_0 \neq 0, (p_0 | p_0) = 0\}$$

so entspricht allen  $\infty^2$  Minimalgeraden des Büschels derselbe Speer

$$(16) \quad \xi_0 = 0, \quad \xi = \rho p_0, \quad \underline{\xi} = 0, \quad \underline{\xi} = \rho^2 p_0 \hat{p}_0.$$

Nennen wir einen derartigen Speer  $\{\xi_0 = 0, \xi \neq 0, \bar{\xi} = 0\}$  einen eigentlichen Minimalspeer, so können wir uns so ausdrücken: Jeder eigentliche Minimalspeer überdeckt alle  $\infty^2$  Geraden eines Büschels von Minimalgeraden und jede eigentliche Minimalgerade trägt einen einzigen eigentlichen Minimalspeer.

Mit Hilfe unserer reellen Darstellung können diese Verhältnisse ganz anschaulich gemacht werden. Ein eigentlicher akzesorischer Speer bildet sich auf ein (geordnetes) Paar von (reellen eigentlichen, und zwar) antitaktischen Speeren  $(S_l, S_r)$  ab. Überdecken  $S_l$  und  $S_r$  nicht ein und dieselbe Gerade, so sind die doppelseitigen Minimalebenen, welche mit der linksseitigen durch  $S_l$  und der rechtsseitigen durch  $S_r$  zusammenfallen, parallel, ihre Schnittlinie ist eine Tangente des absoluten Kegelschnittes. Die eigentlichen Minimalspeere bilden sich auf Paare antitaktisch zusammenfallender Speere ab. Die zugehörigen einseitigen Minimalebenen überdecken ein und dieselbe doppelseitige Minimalebene, deren sämtliche Minimalgeraden von dem Minimalspeere überdeckt werden.

Man wird das Kontinuum der eigentlichen Minimalspeere durch  $\infty^2$  uneigentliche Minimalspeere abschließen, welche den Punkten eines Kegelschnittes auf der  $M_0$  entsprechen.

Wir bemerken nunmehr: Unsere reelle Darstellung ist gegenüber jeder (reellen) Transformation der kontinuierlichen Gruppe  $G_{14}$  invariant.

Das soll folgendes leisten: Es sei  $S \rightarrow S^*$  eine Transformation von  $G_{14}$ ,  $(S_l, S_r)$  das reelle Bild eines komplexen, eigentlichen Speeres  $S$ ,  $(S_l^*, S_r^*)$  das Bild des transformierten Speeres  $S^*$ , dann geht durch dieselbe Transformation  $S \rightarrow S^*$  auch  $S_l$  in  $S_l^*$  und  $S_r$  in  $S_r^*$  über. Man könnte diese Tatsache auch dadurch kennzeichnen, daß man sagt: Unsere reelle Darstellung ist mit den Transformationen von  $G_{14}$  vertauschbar.

Da bei den Transformationen von  $G_{14}$  antitaktische Speere in allgemeinen nicht wieder in antitaktische Speere übergehen, erkennen wir auch auf diese Weise, daß hierbei im allgemeinen akzesorische Speere nicht wieder in solche und ebenso Minimalspeere nicht wieder in Minimalspeere übergehen.

Beachten wir jetzt, wie sich die (reellen) Transformationen der kontinuierlichen Schaar  $H_{14}$  angewendet auf die komplexen Speere reell darstellen. Behalten wir die eben eingeführten Bezeichnungen bei, so sehen wir, daß durch die Transformation  $S \rightarrow S^*$   $S_l$  in  $S_r^*$  und  $S_r$  in  $S_l^*$  übergeht. Ist beispielsweise die betrachtete Transformation die Umkehrung, so ist

$$S_l^* = -S_r, S_r^* = -S_l,$$

wenn wir durch das Minuszeichen die Umkehrung andeuten.<sup>1)</sup> Die Minimalspeere sind dadurch gekennzeichnet, daß sie bei der Umkehrung einzeln in Ruhe verbleiben.

Wir gehen nun einen Schritt weiter und setzen die Scharen  $G_{14}$ ,  $H_{14}$  analytisch ins komplexe Gebiet fort, wodurch wir zu Scharen  $G_{28}$ ,  $H_{28}$  mit 28 reellen Parametern gelangen und fragen uns, wie sich deren Transformationen reell abbilden. Man findet:

Eine Transformation  $\mathfrak{T}$  von  $G_{28}$  (oder, was dasselbe ist, eine komplexe Transformation von  $G_{14}$ ),  $\{S_l\} \mathfrak{T} = S^*$ , wird dadurch reell dargestellt, daß man die Speere  $S_l$ ,  $S_r$  einzeln zwei (reellen) Transformationen  $\mathfrak{T}_l$ ,  $\mathfrak{T}_r$  von  $G_{14}$  unterwirft,  $\{S_l\} \mathfrak{T}_l = S_l^*$ ,  $\{S_r\} \mathfrak{T}_r = S_r^*$ .

Ist  $\mathfrak{T}$  reell, so ist  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_l = \mathfrak{T}_r$ . Die Gruppe  $G_{28}$  ist demnach halb-einfach und setzt sich aus zwei vertauschbaren Untergruppen zusammen, deren jede zu  $G_{14}$  isomorph ist.

Eine Transformation von  $H_{28}$ ,  $\{S\} \mathfrak{T} = S^*$ , wird analog folgendermaßen reell dargestellt:

$\{S_l\} \mathfrak{T}_l = S_r^*$ ,  $\{S_r\} \mathfrak{T}_r = S_l^*$ . Dabei sind  $\mathfrak{T}_l$  und  $\mathfrak{T}_r$  (reelle) Transformationen aus  $H_{14}$ .

Man kann die Gruppe ( $G_{28}$ ,  $H_{28}$ ) etwa noch dadurch um zwei weitere kontinuierliche Scharen erweitern, daß man das Konjugium, das ist diejenige Transformation, welche jedem Speere den konjugiert-komplexen zuordnet, adjungiert. Das Konjugium stellt sich so dar:

$$S_l^* = S_r, S_r^* = S_l.$$

Unter den invarianten Untergruppen von  $G_{28}$  erwähnen wir die Gruppe  $G_{24}$ , die aus  $G_{12}$  durch analytische Fortsetzung hervorgeht. Die zugehörigen Abbildungen  $\mathfrak{T}_l$  und  $\mathfrak{T}_r$  gehören der Gruppe  $G_{12}$  an.

Um für die Zuordnung zwischen komplexen, eigentlichen Speeren und Paaren reeller, eigentlicher Speere auch eine analytische Formulierung herzustellen, nehmen wir unseren Ausgang vom sphärischen Bilde.

Ist das sphärische Bild  $s \{\xi_0 : \xi\}$  eines eigentlichen komplexen Speeres  $S$  gegeben, so kann man die sphärischen Bilder  $s_l$  und  $s_r$  der zugehörigen reellen eigentlichen Speere  $S_l$  und  $S_r$  folgendermaßen konstruieren: Wir legen durch den komplexen Punkt  $s$  der Kugel die „linksseitige“ Kugelerzeugende, ihr reeller Punkt ist  $s_l$ , ebenso die „rechtsseitige“, deren reeller Punkt ist  $s_r$ . Dabei

<sup>1)</sup> Hierbei bedeuten die  $S$  nicht etwa auch komplex-duale Größen, sonst wären die Formeln unrichtig.

haben wir nur zu beachten, daß der jetzige Gebrauch der Worte „links“ und „rechts“ mit dem früheren in der Weise übereinstimmen, daß z. B. die sphärischen Bilder der Speere einer linksseitigen Minimalebene auch eine linksseitige Kugelerzeugende erfüllen.

Man findet als Bedingung dafür, daß zwei Kugelpunkte  $s \{ \xi_0 : \xi \}$  und  $s^* \{ \xi_0^* : \xi^* \}$ , auf derselben linksseitigen Erzeugenden gelegen sind,

$$(17)_l \quad \hat{\xi} \xi^* - i \{ \xi_0^* \xi - \xi_0 \xi^* \} = 0$$

und analog für die rechtsseitigen Erzeugenden

$$(17)_r \quad \hat{\xi} \xi^* + i \{ \xi_0^* \xi - \xi_0 \xi^* \} = 0.$$

Für die Koordinaten der Punkte  $s_l \{ \xi_0^{(l)} : \xi^{(l)} \}$  und  $s_r \{ \xi_0^{(r)} : \xi^{(r)} \}$  ergeben sich demnach die Verhältnisse

$$(18) \quad \frac{\xi^{(l)}}{\xi_0^{(l)}} = \frac{\bar{\xi}_0 \xi + \xi_0 \bar{\xi} + i \hat{\xi} \bar{\xi}}{\xi_0 \bar{\xi}_0 + (\xi | \bar{\xi})},$$

$$\frac{\xi^{(r)}}{\xi_0^{(r)}} = \frac{\bar{\xi}_0 \xi + \xi_0 \bar{\xi} - i \hat{\xi} \bar{\xi}}{\xi_0 \bar{\xi}_0 + (\xi | \bar{\xi})},$$

wo der Querstrich wie früher den Zeichenwechsel von  $i$  andeutet. Umgekehrt ist

$$(19) \quad \frac{\xi}{\xi_0} = \frac{\xi_0^{(r)} \xi^{(l)} + \xi_0^{(l)} \xi^{(r)} + i \hat{\xi}^{(l)} \xi^{(r)}}{\xi_0^{(l)} \xi_0^{(r)} + (\xi^{(l)} | \xi^{(r)})}.$$

Die reellen Kugelpunkte bilden sich auf zusammenfallende  $\{s = s_l = s_r\}$ , die uneigentlichen Kugelpunkte auf diametral gegenüberliegende Punkte ab  $\{ \xi_0^{(r)} \xi^{(l)} + \xi_0^{(l)} \xi^{(r)} = 0 \}$ .

Aus diesen Formeln (17), (18), (19) können wir unmittelbar die entsprechenden für die reelle Darstellung der komplexen Speere entnehmen mit Hilfe des Übertragungsprinzips aus der Geometrie der Dynamen.

Bisher hatten wir nur reelle eigentliche Speere auf die reell-dualen Punkte der Einheitskugel abgebildet. Setzen wir nunmehr das vierfach ausgedehnte reell-duale Gebiet der Einheitskugel ins komplex-duale Gebiet hinein fort, so erhalten wir eine achtfach ausgedehnte Bildmannigfaltigkeit der komplexen Speere. Den eigentlichen, einseitigen Minimalebenen entsprechen die komplex-dualen Erzeugenden der Kugel. Benützen wir demnach zur Dar-

stellung der komplexen Speere die homogenen, komplex-dualen Koordinaten vom Anfange des § 7,  $X_0; (X_1, X_2, X_3) = X$ , so ergeben sich für die reelle Abbildung der komplexen, eigentlichen Speere die Gleichungen, welche man aus den obigen erhält, wenn man die  $\xi$  alle durch die  $X$  ersetzt. Analog erhält man aus den Formeln (17)<sub>l</sub>, (17)<sub>r</sub>, die Bedingungen dafür, daß zwei Speere  $S$  und  $S^*$  gleichzeitig in einer linksseitigen oder rechtsseitigen Minimalebene liegen.

Während diese Formeln für alle eigentlichen Speere gelten, führen wir noch einige weitere an, die keinen so umfassenden Gültigkeitsbereich aufweisen. Stellen wir nämlich die reellen Speere  $S_l$  und  $S_r$  durch die komplex-dualen Speergrößen des § 2 dar, so findet sich

$$(20) \quad \begin{cases} S_l = t_l + \varepsilon T_l = \frac{X_1 + i X_2}{X_0 + X_3} = \frac{X_0 - X_3}{X_1 - i X_2}, \\ S_r = t_r + \varepsilon T_r = \frac{\bar{X}_1 + i \bar{X}_2}{\bar{X}_0 + X_3} = \frac{\bar{X}_0 - \bar{X}_3}{\bar{X}_1 - i \bar{X}_2} \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(21) \quad \begin{cases} X_0 : X_1 : X_2 : X_3 = \\ = (1 + S_l \bar{S}_r) : (S_l + \bar{S}_r) : -i(S_l - \bar{S}_r) : (1 - S_l \bar{S}_r). \end{cases} \quad ^1)$$

Durch Scheidung skalarer und vektorieller Teile findet man ferner aus (20) [vgl. (2) und (8) in § 2]:

$$(22) \quad \begin{cases} t_l = \frac{\xi_1 + i \xi_2}{\xi_0 + \xi_3}, & T_l = \frac{(\xi_{01} + i \xi_{02}) - i(\xi_{23} + i \xi_{31})}{(\xi_0 + \xi_3)^2}, \\ t_r = \frac{\bar{\xi}_1 + i \bar{\xi}_2}{\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_3}, & T_r = \frac{(\bar{\xi}_{01} + i \bar{\xi}_{02}) - i(\bar{\xi}_{23} + i \bar{\xi}_{31})}{(\bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_3)^2} \end{cases}$$

und ebenso

$$(23)$$

$$\begin{aligned} \rho \xi_0 &= \{1 + t_l \bar{t}_r\}, & \rho \xi_1 &= \{t_l + \bar{t}_r\}, & \rho \xi_2 &= -i\{t_l - \bar{t}_r\}, & \rho \xi_3 &= \{1 - t_l \bar{t}_r\}, \\ \rho^2 \xi_{01} &= \{(1 - t_l^2) \bar{T}_r + (1 - \bar{t}_r^2) T_l\}, & \rho^2 \xi_{23} &= -i\{(1 - t_l^2) \bar{T}_r - (1 - \bar{t}_r^2) T_l\}, \\ \rho^2 \xi_{02} &= i\{(1 + t_l^2) \bar{T}_r - (1 + \bar{t}_r^2) T_l\}, & \rho^2 \xi_{31} &= \{(1 + t_l^2) \bar{T}_r + (1 + \bar{t}_r^2) T_l\}, \\ \rho^2 \xi_{03} &= -2\{t_l \bar{T}_r - \bar{t}_r T_l\}, & \rho^2 \xi_{12} &= 2i\{t_l \bar{T}_r + \bar{t}_r T_l\}. \end{aligned}$$

Diese Formeln (20), (21), (22), (23) versagen (außer für die un-eigentlichen Speere) nur für diejenigen, für welche  $\xi_0 + \xi_3 = 0$  ist,

<sup>1)</sup> Es sei hier nochmals daran erinnert, daß der Querstrich den Zeichenwechsel von  $i$  und nicht etwa von  $\varepsilon$  andeutet.

doch kann man auch leicht eine homogene Darstellung einführen, die diese Ausnahmestellen sämtlich beseitigt.

Fügen wir noch einige Bemerkungen über die komplexen, uneigentlichen Speere an. Ihre reelle Darstellung gestaltet sich ziemlich verwickelt, so daß wir nicht weiter darauf eingehen. Den beiden ausgezeichneten Kegelschnitten  $C$  und  $\bar{C}$  auf  $M_3$  entsprechen zwei getrennte, abgeschlossene Kontinuen von je  $\infty^2$  „ausgezeichnet uneigentlichen“ Speeren, die bei den Abbildungen von  $(G_{14}, H_{14})$  untereinander vertauscht werden.

Die Mannigfaltigkeit der uneigentlichen Geraden des Plückersehen Linienkontinuums ist in folgender Weise durch Speere überdeckt. Jede komplexe uneigentliche Gerade trägt ein Kontinuum von  $\infty^4$  uneigentlichen Speeren, das sämtliche ausgezeichnete uneigentlichen Speere und zwei verschiedene uneigentliche Minimalspeere enthält. Das entsprechende Gebilde auf der  $M_3$  ist eine rationale Regelfläche vierter Ordnung, die durch eine projektive Beziehung zwischen  $C$  und  $\bar{C}$  erzeugt wird. Jede Tangente des absoluten Kegelschnittes trägt drei analytisch-getrennte Mannigfaltigkeiten von je  $\infty^4$  Speeren: Zunächst ein einziges Kontinuum von  $\infty^4$  eigentlichen, akzessorischen Speeren, das durch ein Bündel von  $\infty^2$  uneigentlichen Speeren abgeschlossen wird und  $\infty^2$  eigentliche und einen uneigentlichen Minimalspeer enthält, dann zwei Mannigfaltigkeiten von  $\infty^4$  uneigentlichen Speeren, die beide denselben uneigentlichen Minimalspeer enthalten. Die entsprechenden Gebilde auf  $M_4$  sind: eine Ebene und zwei uneigentliche Kegel, ein linksseitiger und ein rechtsseitiger.

Jeder uneigentliche Speer, der weder ausgezeichnet-uneigentlich noch ein Minimalspeer ist, überdeckt ein Bündel von  $\infty^2$  uneigentlichen Geraden, das seinen Scheitel nicht auf dem absoluten Kegelschnitt hat. Jeder Minimalspeer hingegen überdeckt ein Bündel, dessen Scheitel dem absoluten Kegelschnitt angehört, und jeder ausgezeichnet-uneigentliche Speer überdeckt alle  $\infty^4$  uneigentlichen Geraden.

In der komplexen Speergeometrie wird es zweckmäßig sein, die Begriffe der Speer-Garben, -Wirbel und -Ketten zu erweitern. Zunächst werden wir nämlich diese reellen Gebilde analytisch ins komplexe Gebiet hinein fortsetzen, wodurch sich ihre Dimensionszahl verdoppelt, und dann werden wir alle Mannigfaltigkeiten, die mit den so gefundenen gegenüber  $(G_{28}, H_{28})$  äquivalent sind, mit demselben Namen belegen, während die ursprünglich so genannten Gebilde nunmehr als reelle Züge oder wie wir auch kürzer sagen werden, als „Membranen“ reeller Mannigfaltigkeiten zu bezeichnen sind.

Betrachten wir zunächst die  $\infty^4$  komplexen Speere einer reellen Garbe. An dem speziellen Fall der Nullgarbe kann man sich leicht folgendes klar machen: Zwei beliebige reelle

Speere  $S_l$  und  $S_r$  einer Garbe ergeben zusammen genommen das Bild  $(S_l, S_r)$  eines beliebigen komplexen Speeres  $S$  der Garbe.

Durch Austübung einer Abbildung der Gruppe  $(G_{28}, H_{28})$  folgt hieraus:

Jede komplexe Garbe  $\Gamma$  bildet sich derart auf die Membranen  $\Gamma_l$  und  $\Gamma_r$  zweier reeller Garben ab, daß ein beliebiger Speer  $S_l$  von  $\Gamma_l$  zusammen mit einem beliebigen Speer  $S_r$  von  $\Gamma_r$  das reelle Bild  $(S_l, S_r)$  eines beliebigen Speeres  $S$  von  $\Gamma$  ergibt.

Unter den reellen Wirbeln haben wir zwei gegenüber  $(G_{14}, H_{14})$  verschiedene Klassen zu unterscheiden: die einteiligen Wirbel und die nullteiligen. Die einteiligen sind analytische Fortsetzungen der zuvor als „Wirbel“ bezeichneten Membranen. Für die nullteiligen Wirbel bietet uns der Wirbel aller Minimalsperre ein Beispiel. Die in § 6 unter den Nummern 6. und 8. aufgezählten involutorischen Transformationen haben wir jetzt als Spiegelungen an nullteiligen Wirbeln zu bezeichnen.

Man kann auch im komplexen Gebiete Speerkugeln und -Quirle definieren, indem man diejenigen Mannigfaltigkeiten so bezeichnet, die aus den analytischen Fortsetzungen der früher so genannten Gebilde durch Abbildungen der Gruppe  $G_{24}$  hervorgehen, welche aus  $G_{12}$  durch analytische Fortsetzung entsteht.

Das reelle Bild  $(S_l, S_r)$  eines Euklidischen Speeres  $S$  einer reellen Ebene besteht offenbar aus zwei zu der Ebene symmetrischen Speeren. Verallgemeinert man das Ergebnis, das man hieraus für das reelle Bild der  $\infty^4$  komplexen Speere des speziellen Quirls, der alle Speere der Ebene enthält, gewinnt, so findet sich:

Das reelle Bild  $(S_l, S_r)$  eines eigentlichen, komplexen Speeres  $S$  in einem reellen (einteiligen oder nullteiligen) Wirbel, setzt sich aus zwei reellen eigentlichen Speeren  $S_l, S_r$  zusammen, die einander in der Spiegelung an dem Wirbel entsprechen.

Analoges gilt für die reellen Speerkugeln und -Quirle, die ja Sonderfälle der Wirbel sind. Eine spezielle nullteilige Speerkugel ist die Kugel der Minimalspeere. Die Spiegelung an ihr ist die Umkehrung.

Durch die gleiche Verallgemeinerung wie zuvor ergibt sich:

Die reellen, eigentlichen Speere  $S_l, S_r$  der Paare  $(S_l, S_r)$ , welche die  $\infty^4$  komplexen Speere eines beliebigen Wirbels darstellen, entsprechen einander in einer beliebigen Abbildung  $S_l \rightarrow S_r$  der Schar  $H_{14}$ . Ist insbesondere der Wirbel eine Kugel, so gehört die Abbildung der Schar  $H_{12}^{(2)}$ , und ist der Wirbel ein Quirl, so gehört sie der Schar  $H_{12}^{(3)}$  an.

Es gibt nullteilige Wirbel, die nur aus akzessorischen Speeren bestehen. Man erzeugt einen solchen Wirbel, indem man auf die Kugel der Minimalspeere eine (reelle) Schwenkung durch einen beliebigen reellen Winkel  $\beta$  ausübt. Die Spiegelung an einem solchen Wirbel ist eine involutorische Transformation, die man als Produkt einer Schwenkung durch den Winkel  $2\beta$  mit der Umkehrung herstellen kann. Für  $\beta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  erhält man insbesondere die Quirle, die die Eigenschaft haben, daß die Spiegelung an ihnen identisch ist mit der gewöhnlichen Spiegelung an einem (reellen, eigentlichen) Punkte.

Betrachtet man eine Speerkette als Durchschnitt der einzigen durch ihn gehenden Garbe mit den  $\infty^2$  hindurchgehenden (komplexen) Wirbeln, so findet man:

Bezieht man die Speere  $S_l$  und  $S_r$  der reellen Züge  $\Gamma_l$  und  $\Gamma_r$  zweier reeller Garben so aufeinander, daß ihre sphärischen Bilder *uneigentlich* kreisverwandt werden, so stellen die entstehenden  $\infty^2$  Paare  $(S_l, S_r)$  die  $\infty^2$  komplexen Speere einer Kette dar.

Zu den Ketten des (eigentlichen) komplexen Gebietes könnte man auch diejenigen Mannigfaltigkeiten rechnen, welche den irreduziblen ebenen Schnitten der eigentlichen Kegel auf der  $M_4$  entsprechen. Eine derartige „Kette“, die wir uns z. B. in einer linksseitigen Minimalebene liegend denken, hat als reelles Bild  $\infty^2$  Speerpaare, deren erster Speer  $S_l$  fest bleibt, während der zweite  $S_r$  den reellen Zug einer Garbe durchläuft. Man bemerkt, daß die durch die Gruppe  $G_{28}$  in einer eigentlichen Minimalebene bestimmte Geometrie übereinstimmt mit der durch  $G_{14}$  in dem Gebiete aller reellen Speere definierten Geometrie.

Unser Kontinuum der komplexen, eigentlichen Speere steht in einem einfachen Zusammenhange mit dem Kontinuum der komplexen „Strahlen“ des Herrn Study.<sup>1)</sup> Deutet man die  $X_1 : X_2 : X_3$  als komplex-duale Studysche Strahlenkoordinaten, so erkennt man, daß die Gesamtheit der eigentlichen Strahlen mit der Gesamtheit der eigentlichen Speere derart überdeckt ist, daß jeder komplexe eigentliche Strahl, der nicht Minimalstrahl<sup>2)</sup> ist, zwei verschiedene komplexe, eigentliche Speere trägt, die ebenfalls nicht Minimalspeere sind, während jeder eigentliche Minimalstrahl einen einzigen Speer, und zwar einen eigentlichen Minimalspeer trägt. Umgekehrt überdeckt jeder eigentliche Speer einen einzigen, eigentlichen Strahl.

Man kann demnach auch die eigentlichen Strahlen auf Speerpaare abbilden, doch empfiehlt sich hier eine kleine Änderung. Sei  $\mathfrak{S}$  ein eigentlicher Strahl  $\{X_1 : X_2 : X_3\}$ . Wir „orientieren“ ihn zunächst, indem wir über das Vorzeichen der Wurzel  $X_0 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$  eine Entscheidung treffen, zu einem Speere  $S$

<sup>1)</sup> Geom. d. Dynamen § 28.

<sup>2)</sup> Vgl. a. a. O. S. 290.

$\{X_0 : X_1 : X_2 : X_3\}$ . Dann suchen wir das reelle Bild  $(S_l, S_r)$  von  $S$ . Der aus  $S_r$  durch Umkehrung hervorgehende Speer sei  $S''$ , während wir  $S_l$  auch mit  $S'$  bezeichnen wollen. Dann bilden wir den Strahl  $\mathcal{S}$  auf das Speerpaar  $(S', S'')$  ab. Hätten wir an Stelle von  $S$  den umgekehrten Speer  $\{-X_0 : X_1 : X_2 : X_3\}$  genommen, so wären wir zu demselben Paar nur in verkehrter Anordnung  $(S'', S')$  gekommen. So ergibt sich:

Die komplexen, eigentlichen Studyschen Strahlen  $\mathcal{S}$  sind umkehrbar eindeutig abgebildet auf die nicht-geordneten Paare  $(S', S'') = (S'', S')$  von reellen, eigentlichen Speeren.

Weiter folgt:

Die komplexen, Euklidischen Geraden der Plückerschen Liniengeometrie sind umkehrbar eindeutig abgebildet auf die nicht-geordneten Paare nicht-syntaktischer, reeller, eigentlicher Speere.

Man findet zu einer Euklidischen Geraden die zugehörigen Speere  $S', S''$  indem man die beiden Minimalebenen durch die Gerade hindurchlegt und dann diejenigen Speere aufsucht, die diesen Minimalebenen in der in § 2 behandelten Abbildung entsprechen.

Die zwei komplexen Bewegungsinvarianten eines (allgemeinen) Geradenpaares ergeben, wenn man sie in reelle und durch  $i$  geteilte rein-imaginäre Teile spaltet, die vier reellen Invarianten des zugehörigen Speerquadrupels gegenüber  $G_{12}$ , die nach E. v. Weber eine elegante geometrische Deutung zulassen.

Die gefundene Darstellung der komplexen Euklidischen Geraden ist auch für die konstruktive Geometrie von einer gewissen Bedeutung, da sich mit ihrer Hilfe die einfachsten Aufgaben der metrischen Geometrie des komplexen Linienraumes wesentlich einfacher lösen lassen als mit der von Staudt gegebenen Abbildung, die nur für die einfachsten Aufgaben der projektiven Geometrie zweckmäßig ist. Analoge Beziehungen finden schon in der ebenen Geometrie statt, bei der Darstellung komplexer Punkte einerseits nach Laguerre andererseits nach Staudt.<sup>1)</sup>

### § 9. Isotrope Speerkongruenzen. Die unendliche Gruppe der isotropen Speertransformationen.

Wir wollen nunmehr die reellen Flächenzüge auf der  $M_4$  die wir (in § 8) isotrop genannt hatten, etwas eingehender betrachten. Es sei also eine analytische Abhängigkeit zwischen den komplexen Parametern  $t, T$  vorgelegt. Indem wir den Fall  $t = \text{const.}$ , der die reellen Ebenen der  $M_4$  liefert, übergehen, nehmen wir an, die Beziehung sei auf die Form gebracht  $T = f(t)$ , wo  $f$  eine komplexe analytische Funktion der komplexen Veränderlichen  $t$  bedeutet. Die Stelle  $t = 0$  sei für die Funktion regulär, und zwar sei  $f(0) = 0$  und  $f'(0)$  von Null verschieden.

Der vierfach ausgedehnte Tangentialraum  $R_4$  im Punkte  $t = 0, T = 0$  [vgl. (4) § 8] kann mittels der unhomogenen Parameter  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  so dargestellt werden:

$$(1) \left\{ \begin{array}{llll} x_{00} = 1, & x_{01} = \lambda_0, & x_{02} = \lambda_1, & x_{03} = 1, \\ & x_{11} = 0, & x_{12} = 0, & x_{13} = \lambda_0, \\ & & x_{22} = 0, & x_{23} = \lambda_1, \\ & & & x_{33} = 1; \\ & \xi_{01} = \lambda_2, & \xi_{03} = \lambda_3, & \xi_{03} = 0, \\ & \xi_{23} = -\lambda_3, & \xi_{31} = \lambda_2, & \xi_{12} = 0. \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> Siehe die Einleitung des ersten Bandes von Studys Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Geometrie. Leipzig 1911.

Die reellen Parameter  $\lambda_k$  kann man als homogene Koordinaten für die vom Punkte  $t=0$ ,  $T=0$  auf der  $M_4$  ausgehenden reellen Fortschreitungsrichtungen verwenden. Deutet man die  $\lambda_k$  andererseits als homogene Punktkoordinaten in einem dreifach ausgedehnten Raume  $\{\lambda\}$ , so sind die Punkte dieses Raumes dadurch umkehrbar eindeutig auf die genannten Fortschreitungsrichtungen bezogen.

Andererseits können wir diese Richtungen durch die Differentiale  $dt, dT$ , die abgesehen von einem gemeinsamen reellen Faktor bestimmt sind, festlegen. Den Zusammenhang zwischen den beiden verschiedenen Arten von Koordinaten kann man, wie aus den Formeln (2) des § 2 mittels der Formeln (17) des § 7 folgt, so ausdrücken

$$(2) \quad \begin{aligned} x. (dt)_0 &= \lambda_0 + i\lambda_1, \\ x. (dT)_0 &= \lambda_2 + i\lambda_3, \end{aligned}$$

wenn  $x$  einen reellen Faktor bedeutet und durch den Index Null auf den Punkt  $t=0$ ,  $T=0$  hingewiesen wird.

Es sei nun  $\left(\frac{dT}{dt}\right) = f'(0) = \frac{\alpha_2 + i\alpha_3}{\alpha_0 + i\alpha_1}$ , so daß wir setzen können

$$(3) \quad \begin{aligned} \lambda_0 + i\lambda_1 &= \{\alpha_0 + i\alpha_1\} \{\rho + i\sigma\}, \\ \lambda_2 + i\lambda_3 &= \{\alpha_2 + i\alpha_3\} \{\rho + i\sigma\}, \end{aligned}$$

wo die  $\alpha$  Konstante und  $\rho, \sigma$  reelle Veränderliche bedeuten. Durch Absonderung der reellen und rein-imaginären Teile ergibt sich

$$(4) \quad A \dots \begin{cases} \lambda_0 = \alpha_0 \rho - \alpha_1 \sigma, \\ \lambda_1 = \alpha_0 \sigma + \alpha_1 \rho, \\ \lambda_2 = \alpha_2 \rho - \alpha_3 \sigma, \\ \lambda_3 = \alpha_2 \sigma + \alpha_3 \rho. \end{cases}$$

Dadurch ist im Raume  $\{\lambda\}$  eine Gerade  $A$  bestimmt, die die Gerade

$$(5) \quad G \dots \begin{cases} \lambda_0 + i\lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 + i\lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ im Punkte } \begin{cases} \rho = 1, \\ \sigma = i \end{cases} = \begin{cases} \lambda_0 = \alpha_0 - i\alpha_1, \\ \lambda_1 = i\alpha_0 + \alpha_1, \\ \lambda_2 = \alpha_2 - i\alpha_3, \\ \lambda_3 = i\alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

und die konjugiert-imaginäre Gerade  $\bar{G}$  im konjugiert-imaginären Punkte trifft.

Ändert man nun  $\left(\frac{dT}{dt}\right)_0$  oder die  $\alpha$ , so durchläuft die Gerade  $A$  die reellen Geraden des elliptischen Netzes, das  $G$  und  $\bar{G}$

zu Brennlinien hat. Die komplexe Größe  $\left(\frac{dT}{dt}\right)_0$  ist projektiv auf das binäre Punktgebiet der Geraden  $G$  und damit auf das Gebiet der reellen Geraden des Netzes bezogen. Dem uneigentlichen Werte  $\left(\frac{dT}{dt}\right)_0 = \infty$  entspricht die Gerade  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ , welche den Fortschreitungsrichtungen zugeordnet ist, die vom Punkte  $t=0$ ,  $T=0$  ausgehen und in der Ebene  $t=0$  gelegen sind.

In den Formeln (5) des § 8 hatten wir für den linksseitigen Kegel durch den Punkt  $t=0$ ,  $T=0$  eine Parameterdarstellung angegeben, aus der man entnimmt, daß die Tangentialebene durch den Punkt an den Kegel durch die Bedingungen

$$\begin{aligned}\lambda_0 + i\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 + i\lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

charakterisiert ist. Den komplexen Fortschreitungsrichtungen auf dem linksseitigen Kegel entspricht also im Raume  $\{\lambda\}$  die Gerade  $G$ , ebenso denen auf dem rechtsseitigen die Gerade  $\bar{G}$ . Die Tangentialebene an jeden isotropen Flächenzug  $T=f(t)$  durch den betrachteten Punkt schneidet demnach die konjugiert-imaginären Tangentialebenen an die beiden Kegel durch diesen Punkt.

Da nun durch die Gruppe  $G_{1,2}$  von reellen automorphen Kollineationen der  $M_4$  einerseits ihre reellen eigentlichen Punkte transitiv vertauscht werden, andererseits, wie aus den Transformationsformeln (5) in § 1 folgt, isotrope Flächenzüge wieder in solche übergehen, so ergibt sich, daß das, was wir eben für den Punkt  $t=0$ ,  $T=0$  bewiesen haben, für jeden reellen, eigentlichen Punkt der  $M_4$  richtig bleibt. Aus bekannten Sätzen der Funktionentheorie folgt demnach:

Es sei im eigentlichen Gebiete der  $M_4$  ein Stück eines reellen Flächenzuges gegeben, der stetig ist und in jedem seiner Punkte eine bestimmte Tangentialebene hat. Wenn diese Tangentialebene stets die beiden Tangentialebenen an die Kegel durch den Berührungspunkt nach Geraden schneidet, so gehört das Stück unseres reellen Flächenzuges einem notwendigerweise analytischen, und zwar isotropen Flächenzuge an.

Der gesamte reelle Zug wird durch reelle analytische Fortsetzung ermittelt.

Es leuchtet ein, daß die eben bewiesene charakteristische Eigenschaft der isotropen Züge gegenüber allen reellen, automorphen Kollineationen der  $M_4$  invariant ist. Daraus folgt aber das schon in § 7 benützte Ergebnis, daß diese Kollineationen die isotropen Flächenzüge untereinander vertauschen.

Die analytische Fortsetzung eines isotropen Zuges ins komplexe Gebiet der  $M_4$  wollen wir eine isotrope Fläche nennen. Ebenso soll aber auch jede komplexe analytische Fläche auf der  $M_4$  genannt werden, die in das eigentliche Gebiet der  $M_4$  eindringt und dort die Bedingung erfüllt, daß ihre Tangentialebene stets die Tangentialebenen an die Kegel durch den Berührungspunkt schneidet.

Bevor wir auf die geometrischen Deutungen im Speerraume übergehen, schicken wir noch einige Bemerkungen über die anzuwendenden Bezeichnungen voraus.

Da sich die folgenden Überlegungen nur auf das Gebiet der eigentlichen, komplexen Speere erstrecken, können wir das Beiwort „eigentlich“ entbehren.

Die Gesamtheit der  $\infty^2$  komplexen Speere, die den eigentlichen Punkten einer auf der  $M_4$  gelegenen analytischen Kurve entsprechen, von der wir natürlich voraussetzen, daß sie überhaupt in das eigentliche Gebiet eindringt, soll eine (analytische) Speerfläche genannt werden. Ebenso soll die Gesamtheit der  $\infty^4$  komplexen Speere, die den eigentlichen Punkten einer analytischen Fläche zugeordnet sind, eine (analytische) Speerkongruenz heißen. Die  $\infty^1$  reellen Speere, die zu den Punkten eines reellen Zuges einer analytischen Kurve auf der  $M_4$  gehören, bilden ein (analytisches) Speerband und die  $\infty^2$  reellen Speere, die den Punkten eines reellen Zuges einer analytischen Fläche entsprechen, bilden eine (analytische) Speermembran, eine Terminologie, die wir schon früher gelegentlich benützt hatten.

Eine Speerfläche oder ein Band heißt zylindrisch, wenn sich das sphärische Bild auf einen Punkt reduziert. Ebenso soll eine Kongruenz oder eine Membran zylindrisch genannt werden, wenn ihr sphärisches Bild nur eine analytische Kurve oder einen reellen Zug einer solchen (ganz oder zum Teil) überdeckt und nicht flächenhaft ausgedehnt ist.

Den isotropen Flächenzügen und Flächen der  $M_4$  entsprechen die isotropen Speermembranen und die isotropen Speerkongruenzen. Man erhält eine isotrope Speermembran, wenn man eine analytische Mannigfaltigkeit von  $\infty^2$  Minimalebene, die entweder eine krumme Minimallinie, oder einen Minimalkegel oder endlich eine Tangente des absoluten Kegelschnittes umhüllen, mit Hilfe der in § 2 behandelten Transformation auf den Speerraum abbildet. Zu den isotropen Membranen gehören demnach die reellen Züge reeller Garben und die reellen Züge reeller Bündel syntaktischer Speere.

Wir bilden nun die komplexen Speere ab auf die komplexen Punkte einer reellen, ebenen, Euklidischen Mannigfaltigkeit  $V_4$  von vier komplexen Dimensionen. Die komplexen rechtwinkligen Koor-

dinaten eines Punktes  $p$  der  $V_4$  seinen  $\xi_1^*, \eta_1^*; \xi_2^*, \eta_2^*$ . Die Koordinaten eines komplexen Speeres  $S$  seien  $\xi_k, \xi_{r_s}$  und anderseits  $t_l, T_l; t_r, T_r$  (vgl. (20), (22), § 8). Wir setzen

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi_1^* &= \frac{\xi_1}{\xi_0 + \xi_3} = \frac{t_l + \bar{t}_r}{2}, & \eta_1^* &= \frac{\xi_2}{\xi_0 + \xi_3} = \frac{t_l - \bar{t}_r}{2i}; \\ \xi_2^* &= \frac{\xi_{01} + \xi_{31}}{(\xi_0 + \xi_3)^2} = \frac{T_l + \bar{T}_r}{2}, & \eta_2^* &= \frac{\xi_{02} - \xi_{23}}{(\xi_0 + \xi_3)^2} = \frac{T_l - \bar{T}_r}{2i}. \end{aligned}$$

Dadurch ist eine, im allgemeinen ein-eindeutige Beziehung  $S \leftrightarrow p$  zwischen den Speeren und den eigentlichen Punkten der  $V_4$  hergestellt. Für reelle Speere ist  $t = t_l = t_r, T = T_l = T_r$  und die  $\xi_k^*$  und  $\eta_k^*$  sind die reellen und durch  $i$  geteilten rein-imaginären Bestandteile von  $t, T$ . Es entspricht wohl jedem Punkte  $p$  ein bestimmter Speer  $S$ , aber nicht auch umgekehrt, da sich die Speere, welche der Bedingung  $\xi_0 + \xi_3 = 0$  genügen, der Abbildung entziehen.

Wir bilden nunmehr nach Study,<sup>1)</sup> die komplexen, eigentlichen Punkte  $p$  der  $V_4$  auf Paare reeller, eigentlicher Punkte  $p_l \{x_1^{(l)}, y_1^{(l)}; x_2^{(l)}, y_2^{(l)}\}$  und  $p_r \{x_1^{(r)}, y_1^{(r)}; x_2^{(r)}, y_2^{(r)}\}$  in folgender Weise ab. Wir setzen

$$(7) \quad \begin{aligned} p_l &\begin{cases} x_1^{(l)} + iy_1^{(l)} = \xi_1^* + i\eta_1^* = t_l, \\ x_2^{(l)} + iy_2^{(l)} = \xi_2^* + i\eta_2^* = T_l; \end{cases} \\ p_r &\begin{cases} x_1^{(r)} - iy_1^{(r)} = \xi_1^* - i\eta_1^* = \bar{t}_r, \\ x_2^{(r)} - iy_2^{(r)} = \xi_2^* - i\eta_2^* = \bar{T}_r. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Punkte  $p_l$  und  $p_r$  sind aber die Bilder der Speere  $S_l$  und  $S_r$ , welche zusammengenommen die reelle Darstellung  $(S_l, S_r)$  von  $S$  ergeben. Durch die Abbildung  $S \rightarrow p$  wird also unsere reelle Darstellung der komplexen Speere  $S \rightarrow (S_l, S_r)$  übergeführt in die Studysche Darstellung  $p \rightarrow (p_l, p_r)$  der komplexen Punkte der  $V_4$ . Dadurch ist es möglich einige Sätze, die Herr Study über die letztere Darstellung angegeben hat, hierher zu übertragen.

Wir stellen einige Begriffe gegenüber, die einander in der Abbildung  $S \rightarrow p$  entsprechen.

<sup>1)</sup> Vgl. hier und im folgenden die Abhandlung: Sugli enti analitici. Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1906. Deutsch als Anhang des zweiten Bandes von Studys Vorl. über ausgew. Gegenstände d. Geom. Leipzig 1911.

<p>Speermannigfaltigkeit.</p> <p>Protovarietà.</p> <p>Synektische <math>S_2</math>.</p> <p>Segresche Mannigfaltigkeit <math>V_2</math>.</p> <p>Unendliche kontinuierliche Gruppe der synektischen Transformationen.</p> <p>Unendliche kontinuierliche Schar der antisynektischen Transformationen.</p>	<p>Punktmannigfaltigkeit.</p> <p>Einseitige Minimalebene.</p> <p>Isotrope Membranen.</p> <p>Isotrope Speerkongruenz.</p> <p>Unendliche kontinuierliche Gruppe der „isotropen Transformationen“.</p> <p>Unendliche kontinuierliche Schar der „antisotropen Transformationen“.</p>
--	--

Dabei ist unter einer isotropen Transformation eine Abbildung verstanden, die für reelle Speere durch die Formeln

$$(8) \quad \begin{cases} t^* = f(t, T), \\ T^* = F(t, T) \end{cases}$$

ausgedrückt werden kann, wenn unter  $f, F$  analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich und nicht identisch-verschwindender Funktionaldeterminante verstanden werden. Hat man einen komplexen Speer  $\{t_i, T_i; \bar{t}_r, \bar{T}_r\}$  durch eine derartige Abbildung zu transformieren, so unterwirft man sowohl das Parameterpaar  $t_i, T_i$  wie das Paar  $\bar{t}_r, \bar{T}_r$  der Substitution (8).

Die antisotropen Transformationen haben für reelle Speere die Form

$$(9) \quad \begin{cases} t^* = f(\bar{t}, \bar{T}), \\ T^* = F(\bar{t}, \bar{T}) \end{cases}$$

und für komplexe

$$(10) \quad \begin{cases} t_i^* = f(\bar{t}_r, \bar{T}_r), \\ T_i^* = F(\bar{t}_r, \bar{T}_r); \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{t}_r^* = f(t_i, T_i), \\ \bar{T}_r^* = F(t_i, T_i). \end{cases}$$

Dabei sind über die Funktionen  $f, F$  dieselben Voraussetzungen zu machen wie zuvor.

Unter den isotropen Transformationen sind die Transformationen von  $G_{14}$  enthalten unter den antisotropen die von  $H_{14}$ .

Die isotropen und antisotropen Transformationen bilden zusammengenommen die erweiterte isotrope Gruppe.

Wir führen nun einige Sätze an, die sich entweder aus den Theoremen des Herrn Study ergeben, oder aus dem vorhergehenden folgen.

Die erweiterte isotrope Gruppe hat die charakteristische Eigenschaft, die isotropen Membranen untereinander zu vertauschen.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Man braucht von den transformierenden reellen Funktionen nur Stetigkeit und einmalige Differenzierbarkeit vorauszusetzen.

Die Eigenschaft, die (Membranen von) Garben untereinander zu vertauschen, ist für die Gruppe  $(G_{14}, H_{14})$  charakteristisch.<sup>1)</sup>

Man beweist nämlich zunächst, daß jede derartige Speertransformation der erweiterten isotropen Gruppe angehört, und dann schließt man ebenso weiter wie am Schlusse des § 7.

Unter allen reellen, analytischen Speertransformationen sind die isotropen und antisotropen dadurch gekennzeichnet, daß sie die einseitigen Minmalebenen untereinander vertauschen.

Die kontinuierliche isotrope Gruppe hat innerhalb der Gruppe aller analytischer Speertransformationen die charakteristische Eigenschaft mit unserer reellen Abbildung der komplexen Speere vertauschbar zu sein.

Werden durch eine isotrope [antisotrope] Transformation zwei isotrope Membranen aufeinander bezogen, so sind dadurch ihre sphärischen Bilder in der Regel eigentlich [uneigentlich] konform aufeinander abgebildet.

Eine Ausnahme hiervon tritt nur dann ein, wenn sich eines oder auch beide sphärischen Bilder auf einen Punkt reduzieren. Nach der in § 2 gegebenen geometrischen Deutung der komplexen Koordinaten  $t, T$  bleibt aber der angeführte Satz auch noch in diesen Sonderfällen bestehen unter der Voraussetzung, daß man das sphärische Bild einer zylindrischen isotropen Membran, also eines Bündels syntaktischer Speere ersetzt durch das Feld der Schnittpunkte mit einer orientierten Normalebene des Bündels. Dieselbe Bemerkung gilt für den folgenden Satz:

Die  $\infty^2$  komplexen Speere  $S$  einer (analytischen) Speerfläche, die nicht in einer einseitigen Minmalebene liegt, werden durch  $\infty^2$  Speerpaare  $(S_v, S_r)$  dargestellt, deren Speere auf zwei isotrope Membranen verteilt sind, die auf einander so abgebildet werden  $\{S_v \rightarrow S_r\}$ , daß ihre sphärischen Bilder *uneigentlich* konform sind.

Die  $\infty^4$  komplexen Speere einer isotropen Kongruenz bilden sich ab auf  $\infty^4$  Speerpaare, deren Speere auf zwei isotrope Membranen verteilt sind.

Ist die Kongruenz reell, so fallen die beiden Membranen zusammen. Man erkennt, daß jede reelle isotrope Kongruenz eine und nur eine reelle Membran enthält. Zwei verschiedenartige einseitige Minmalebenen durch zwei Speere einer isotropen Kongruenz treffen sich immer wieder in einem Speere der Kongruenz.

<sup>1)</sup> Man braucht von den transformierenden reellen Funktionen nur Stetigkeit und einmalige Differenzierbarkeit vorauszusetzen.

Durch jede Speerfläche, die nicht in einer einseitigen Minimalebene enthalten ist, geht eine einzige isotrope Kongruenz und ebenso durch *jedes* Band eine einzige isotrope Membran.

Wir werden eine Speerkongruenz, die nicht in einer analytischen Mannigfaltigkeit von  $\infty^2$  Minimalebenen liegt, gewöhnlich nennen. Dann findet sich:

Die  $\infty^4$  Speerpaare  $(S_i, S_r)$ , welche die  $\infty^4$  komplexen Speere einer gewöhnlichen (analytischen) Speerkongruenz darstellen, bestimmen eine antisotrope Abbildung  $\{S_i \rightarrow S_r\}$ . Diese ist symmetrisch  $\{S_i \rightarrow S_r\} = \{S_r \rightarrow S_i\}$ , wenn die Kongruenz reell ist.

Bezieht man zwei Membranen *gewöhnlicher* (analytischer) Speerkongruenzen in beliebiger Weise aufeinander durch eine analytische Abbildung, so gibt es eine und nur eine synektische und ebenso eine und nur eine antisynektische Transformation, die diese Abbildung vermittelt. Insbesondere gibt es außer der Identität in der erweiterten synektischen Gruppe nur eine einzige, und zwar antisotrope, symmetrische Transformation, die alle Speere einer Membran einzeln in Ruhe läßt, die „*Spiegelung*“ an der Membran.

Diese Spiegelung läßt auch alle Speere der Kongruenz einzeln in Ruhe, welche die analytische Fortsetzung der Membran bildet, insbesondere auch die Speere jeder anderen Membran dieser Kongruenz. Ein komplexer Speer der Kongruenz wird durch ein Speerpaar dargestellt, dessen Speere sich in der Spiegelung wechselseitig entsprechen.

Es ist bemerkenswert, wie einfach sich manche Sätze von Ribaucour über isotrope Membranen mittels der komplexen Parameter  $t, T$  und ihrer geometrischen Deutung (§ 2) ergeben. Z. B. besteht zwischen den isothermen Kurvennetzen auf der Einheitskugel und den isotropen Membranen die folgende Beziehung.<sup>1)</sup>

Das Quadrat des Bogenelements  $ds$  der Einheitskugel habe in Bezug auf ein System von isothermen Parameterlinien  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  die Form

$$ds^2 = f(u, v) \{du^2 + dv^2\}.$$

Wir grenzen auf der Kugel ein einfach-zusammenhängendes Gebiet  $\{u, v\}$  ab, indem sich die reelle, analytische Funktion  $f$  regulär verhält und nicht verschwindet. In einem Punkt  $t$  dieses Gebietes tragen wir auf der Tangente an die durch  $p$  gehende

<sup>1)</sup> Vgl. Ribaucour a. a. O., § 27, oder Enzyklopädie III, D 5, R. v. Lilienthal, Nr. 30, S. 331.

Kurve  $u = \text{const.}$  die Strecke  $t_{*}p = \sqrt{f(u, v)}$  in irgend einer Richtung auf. Die Konstruktion wiederholen wir für die übrigen Punkte  $t_{*}$  des Gebietes  $\{u, v\}$  so, daß sich  $p$  mit  $t_{*}$  kontinuierlich fortbewegt. Zieht man nun durch die Punkte  $p$  syntaktische Speere  $S$  zu den Speeren  $\overrightarrow{ot_{*}}$ , so beschreibt  $S$  ein reguläres Gebiet einer isotropen Membran.

Man bestätigt dies sofort durch die analytische Formulierung der angegebenen Konstruktion. Durch die Belegung des Gebietes  $\{u, v\}$  einerseits mit den reellen Wertepaaren  $u, v$ , andererseits mit dem komplexen Parameter  $t$  ist  $t$  als analytische Funktion von  $w = u + iv$  definiert:  $t = \varphi(w)$ . Die konstruierte Membran wird nun mit Hilfe des Parameters  $w$  entweder durch die Formeln

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(w), \\ T = \varphi'(w), \end{array} \right. \text{ oder durch die folgenden } \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(w), \\ T = -\varphi'(w) \end{array} \right.$$

dargestellt. Die hiedurch zwischen  $t$  und  $T$  hergestellte Beziehung ist aber analytisch, also die Membran isotrop.

Ist umgekehrt eine (nicht-zylindrische) isotrope Membran und eine Einheitskugel beliebig vorgelegt, so bestimmt die Membran auf der Kugel ein einziges isothermes Kurvennetz, mit Hilfe dessen sie in der angegebenen Weise konstruiert werden kann. Dieses Netz ist durch eine komplexe Quadratur zu ermitteln. Es sei die Membran in der Form

$$T = \Phi(t)$$

gegeben und die Einheitskugel sei um den Koordinatenanfangspunkt beschrieben. Setzen wir dann z. B.

$$w = \int \frac{dt}{\Phi(t)},$$

so entsprechen den Geraden parallel zur reellen und imaginären Achse in der Gaußschen  $w$ -Ebene die Kurven des isothermen Netzes auf der Riemannschen Kugel für  $t$ .

Wir wollen hier zwei Formeln angeben, aus denen sich unmittelbar zwei bekannte differentialgeometrische Eigenschaften der isotropen Membranen ablesen lassen.

Es seien  $t, T$  gegeben als komplexe analytische Funktionen eines reellen Parameters  $\tau$ . Wenn wir voraussetzen, daß  $\frac{dt}{d\tau}$  nicht-identisch verschwinde, so ist uns dadurch, wenn wir von einem bestimmten Werte von  $\tau$  ausgehen, jedenfalls ein Stück eines nicht-zylindrischen Bandes gegeben, das wir durch reelle analytische Fortsetzung und allfällige reelle Parametersubstitutionen vervollständigen können. Erteilen wir dem Parameter  $\tau$  komplexe Werte,

so erhalten wir Speere der durch das Band hindurchgehenden isotropen Membran.

Nennen wir den Fußpunkt des gemeinsamen Lotes zweier konsekutiver Speere unseres Bandes (an einer Stelle, wo  $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$  ist) wie früher den Zentralpunkt  $z$  dieses Speeres, bezeichnen wir ferner mit  $f$  den Fußpunkt des vom Koordinatenanfangspunkt aus auf den Speer gefällten Lotes, so finden wir für die auch dem Vorzeichen nach bestimmte Strecke  $\overline{fz}$  (die wir am Schlusse von § 2 mit  $\Lambda$  bezeichnet hatten) den Wert

$$(11) \quad \Lambda = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{dT}{dt} - \frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} \right\} - i \frac{t\bar{T} - \bar{t}T}{1 + t\bar{t}}.$$

Wir wollen eine Stelle einer isotropen Membran, an der sich bei geeigneter Wahl des Koordinatenkreuzes  $T$  nach ganzen, positiven Potenzen von  $t$  entwickeln läßt, eine Stelle allgemeiner Lage nennen. Ferner soll eine Stelle eines Bandes, an der bei geeigneter Annahme des Koordinatensystems und des reellen Parameters  $\tau$  sich die Funktionen  $t(\tau)$  und  $T(\tau)$  holomorph verhalten und überdies  $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$  ist, eine reguläre Stelle des Bandes heißen. Dann können wir feststellen:

(I) Die durch eine Stelle allgemeiner Lage hindurchgehenden Bänder einer isotropen Membran, welche hier eine reguläre Stelle haben, haben denselben den gleichen Zentralpunkt.

Ebenso findet man für den Verteilungsparameter  $L$  (vgl. den Schluß von § 2) unseres Bandes den Ausdruck

$$(12) \quad L = \frac{1}{2} \left( \frac{dT}{dt} + \frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} \right) - \frac{t\bar{T} + \bar{t}T}{1 + t\bar{t}}.$$

(II) Die durch eine Stelle allgemeiner Lage hindurchgehenden Bänder einer isotropen Membran, welche hier eine reguläre Stelle haben, haben denselben den gleichen Verteilungsparameter.

Die Formeln (11), (12), geben uns eine einfache geometrische Deutung des reellen und durch  $i$  geteilten reinimaginären Teiles des Differentialquotienten  $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\tau} : \frac{dt}{d\tau}$ . Die Eigenschaft (I) hat

natürlich keine Bedeutung für die zylindrischen isotropen Membranen, die keine Stellen allgemeiner Lage enthalten. Die Eigenschaft (II) behält auch noch für diese Membranen insofern ihre Gültigkeit bei, als für jede Stelle eines zylindrischen Bandes der Verteilungsparameter den uneigentlichen Wert  $\infty$  hat.

Keine der Eigenschaften (I) und (II) ist, wie jetzt gezeigt werden soll, für die isotropen Membranen charakteristisch, sondern es gibt noch zwei Familien zylindrischer Membranen, deren jede eine der Eigenschaften (I) und (II) mit den isotropen Membranen teilt.<sup>1)</sup>

Stellen wir uns zuerst die Aufgabe, alle Membranen mit der Eigenschaft (I) aufzusuchen. Wir gehen hierbei von der Abbildung der vom Punkte  $t=0$ ,  $T=0$  auf der  $M_4$  ausgehenden Fortschreitungsrichtungen auf den Punktraum  $\{\lambda\}$  aus, deren wir uns schon zu Anfang dieses Paragraphen bedient haben.

Die Punkte, welche durch die Bedingung

$$\Re \left\{ \frac{1}{i} \left( \frac{dT}{dt} \right)_0 \right\} = \frac{1}{2i} \left\{ \left( \frac{dT}{dt} \right)_0 - \left( \frac{d\bar{T}}{dt} \right)_0 \right\} = \text{konst.}$$

auf der Geraden  $G$  des Raumes  $\{\lambda\}$  ausgesondert werden, bilden eine Staudtsche Kette, die durch den Punkt  $\frac{dT}{dt} = \infty$  hindurchgeht. Läßt man die Konstante variieren, so durchläuft die Kette  $\infty^1$  verschiedene Lagen, die sämtlich im Punkte  $\left( \frac{dT}{dt} \right)_0 = \infty$  zwei benachbarte Punkte gemein haben. Die zugehörige reelle Gerade  $A$  des Netzes mit den Brennlagen  $G$ ,  $\bar{G}$  beschreibt  $\infty^1$  reelle Züge von Regelscharen eines Büschels von einschaligen Hyperboloïden, die sich in den Geraden  $G$ ,  $\bar{G}$  schneiden und längs der Geraden  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$  berühren. Die anderen Regelscharen dieser Hyperboloïde gehören daher ebenfalls einem Netze an, und zwar einem parabolischen, dessen Brennlagen in der Geraden  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$  zusammenfallen.

Nehmen wir nun an, es gehe durch den Punkt  $t=0$ ,  $T=0$  ein reeller Flächenzug hindurch, der in der Umgebung dieser Stelle sich regulär verhält und die der Bedingung (I) entsprechende Eigenschaft hat. Die  $\infty^1$  reellen Fortschreitungsrichtungen, welche von unserem Punkte auf dem Flächenzuge ausgehen, bilden sich auf den reellen Zug einer Geraden des Raumes  $\{\lambda\}$  ab, die einem der beiden Netze angehören muß. Liegt sie in dem elliptischen Netze mit den Leitlinien  $G$ ,  $\bar{G}$ , so findet in den benachbarten Punkten des Flächenzuges Analoges statt und wir kommen so auf die isotropen Flächenzüge.

Es bleibt also noch der Fall zu erledigen, daß die Gerade dem parabolischen Netze angehört, also die Gerade  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$  schneidet. Dem Schnittpunkte mit dieser Geraden entspricht eine reelle Fortschreitungsrichtung auf unserem Flächenzuge, die in der auf der  $M_4$  gelegenen Ebene  $t=0$  verläuft. Denkt man sich die

<sup>1)</sup> Bei Ribaucour finden sich hierüber unrichtige Angaben. Man vgl. a. a. O. § 29. S. 35.

analogen Fortschreitungsrichtungen über den ganzen Flächenzug integriert, so erkennt man, daß er aus  $\infty^1$  ebenen Kurvenzügen besteht. Die zugehörige Membran ist demnach zylindrisch.

Bezeichnen wir mit  $u$  und  $v$  reelle Veränderliche, so können wir eine zylindrische Membran in der Form annehmen

$$\begin{cases} t = t(u), \\ T = T(u, v), \end{cases}$$

wo die Funktionszeichen rechter Hand komplexe analytische Funktionen der angezeigten Veränderlichen mit gemeinsamem Existenzbereich bedeuten. Soll nun der rein-imaginäre Bestandteil von

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du}}{\frac{dt}{du}}$$

von  $\frac{dv}{du}$  unabhängig sein, so muß die identische Beziehung stattfinden

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial v} & \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{v}} \\ \frac{dt}{du} & \frac{d\bar{t}}{d\bar{u}} \end{vmatrix} = 0.$$

Schließen wir die Möglichkeit aus, daß  $\frac{dt}{du}$  identisch verschwinde, so muß

$$\frac{\partial T}{\partial v} : \frac{dt}{du} = \Theta(u, v)$$

eine reelle analytische Funktion sein. Führt man an Stelle von  $v$  einen neuen reellen Parameter  $v^*$  ein, welcher die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v^*(u, v)}{\partial v} = \Theta(u, v)$$

genügt, so wird, wenn man das Sternchen wieder wegläßt

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{dt}{du}$$

und

$$(13) \quad \begin{cases} t = t(u), \\ T = T_1(u) + \frac{dt}{du} v, \end{cases}$$

wo  $T_1$  eine beliebige, analytische Funktion von  $u$  bedeutet, die mit  $t(u)$  einen gemeinsamen Existenzbereich besitzt.

Derartige Speermembranen (zu denen die Membranen reeller Bündel syntaktischer Speere nicht gehören) nennt man *synektische Membranen*. Wir kommen auf sie im folgenden Paragraphen zurück. Beispiele synektischer Membranen geben die reellen Züge reeller Speerkugeln.

Stellen wir uns nunmehr an zweiter Stelle die Aufgabe, alle Membranen zu ermitteln, die mit den isotropen die Eigenschaft (II) teilen, so könnte man auf völlig analogem Wege zu zylindrischen Kongruenzen kommen, die man in der Form

$$(14) \quad \begin{cases} t = t(u), \\ T = T_1(u) + i \frac{dt}{du} v \end{cases}$$

darstellen kann. Diese Gebilde wollen wir *parasynektische Membranen* nennen.

Natürlich geht im allgemeinen weder eine synektische noch eine parasynektische Membran durch eine Transformation der isotropen Gruppe wieder in eine solche über.

Ziehen wir die Formeln (15) des § 3 heran, so erkennen wir durch Vergleich unserer Ausdrücke (13) und (14):

Durch den Schwenkungsprozeß geht jede synektische in eine parasynektische Membran über und umgekehrt.

Beachten wir jetzt die durch die Formeln (17) in § 3 ausgedrückte Tatsache. Da, wie wir gezeigt haben, die synektischen und isotropen Membranen durch die Eigenschaft (I) charakterisiert sind, so folgt jetzt durch Anwendung einer Schwenkung unmittelbar, daß die parasynektischen und isotropen Membranen durch die Bedingung (II) gekennzeichnet werden.

Wir wollen noch nebenbei auf eine Formel hinweisen, die sich auf unsere reelle Darstellung komplexer Speere bezieht.

Es sei  $S$  ein Speer einer komplexen Speerfläche  $\{S\}$  und  $S_l, S_r$  die reellen Speere seines reellen Bildes  $(S_l, S_r)$ . Durchläuft  $S$  die Speerfläche  $\{S\}$ , so beschreibt, wie wir bewiesen haben,  $S_l$  eine isotrope Membran  $\{S_l\}$  und ebenso  $S_r$  eine isotrope Membran  $\{S_r\}$ .

Stellt man sich nun die Aufgabe, für den komplexen Verteilungsparameter von  $\{S\}$  an der Stelle  $S$  eine reelle geometrische Deutung zu finden, so findet man durch eine ähnliche Überlegung wie die, welche uns zur Formel (8) des § 3 geführt hat, die Beziehung

$$(15) \quad L = \left\{ \frac{L_l + L_r}{2} - e \operatorname{tg} \omega \right\} - i \frac{\overline{n_r z_r} - \overline{n_l z_l}}{2}.$$

Hierin bedeuten zunächst  $L_i$  und  $z_i$   $\{i = r, l\}$  Verteilungsparameter und Zentralpunkt von  $\{S_i\}$  in  $S_i$ . Füllen wir ferner auf  $S_l, S_r$  die (oder, im besonderen Falle, eine) gemeinsame Normale und orientieren wir diese in beliebiger Weise zu einem Speere  $N$ , so seien die Schnittpunkte von  $N$  und  $S_i$  mit  $n_i$  bezeichnet. Schließlich ist noch  $n_l n_r = 2e$  und Winkel  $[S_l, S_r] = 2\omega$  gesetzt.

### § 10. Synektische Speerkongruenzen.

#### Die unendliche Gruppe der synektischen Speertransformationen.

Wir wollen uns hier, wie auch schon im vorigen Abschnitte, der Kürze halber im wesentlichen auf das reelle Gebiet beschränken.

Die Formeln (13) des vorigen Paragraphen lassen sich zusammenfassen, wenn wir (reell-)duale Verbindungen einführen. Setzt man  $S = t + \varepsilon T = f(u + \varepsilon v)$ , wobei  $f$  eine (reell-)synektische Funktion<sup>1)</sup> des dualen Parameters  $u + \varepsilon v$  bedeutet, deren skalarer Teil nicht konstant ist, so ist dadurch (wenn man von einem bestimmten Parameterwerte ausgeht) eine synektische Membran bestimmt.

Geht man mit Hilfe der Formeln des § 2 zu den unhomogenen reell-dualen Koordinaten  $X_k$  über, so erkennt man, daß die synektischen Membranen auch in der Form

$$(1) \quad X_k = X_k(u + \varepsilon v) \quad \{k = 1, 2, 3\}$$

darstellbar sind, wo die Funktionszeichen rechts reell-synektische Funktionen andeuten, deren skalare Bestandteile nicht sämtlich konstant sind und die die Bedingung  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$  erfüllen. Läßt man für die Funktionen  $X_k$  und den Parameter  $u + \varepsilon v$  auch komplex-duale Werte zu, so erhält man Speermannigfaltigkeiten, die wir synektische Speerkongruenzen nennen wollen. Doch werden wir uns auf die Betrachtung der synektischen Membranen beschränken, deren Eigenschaften man ohne Schwierigkeit auf die synektischen Kongruenzen übertragen kann.

Benützen wir die Vektorschreibung des § 2, so folgt aus (1) durch Trennung der skalaren und vektoriellen Teile

$$(2) \quad \begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}(u), \\ \underline{x} &= \underline{x}_1(u) + \underline{x}'(u) \cdot v. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen oder auch unmittelbar aus den Formeln (13) des § 9 ist nun ersichtlich:

<sup>1)</sup> Vgl. *Geom. d. Dynamen* S. 198, 199 oder auch *J. Grünwald a. a. O.* S. 101—103, § 6.

Durch ein beliebiges, nicht-zyklindrisches (analytisches) Speerband geht stets eine und nur eine synektische Membran. Man verschiebe einen Speer allgemeiner Lage des Bandes syntaktisch zu sich selbst in der Ebene, welche zur asymptotischen Ebene<sup>1)</sup> des Bandes an dieser Stelle senkrecht steht. Alle die so erhaltenen (reellen) Speere gehören der Membran an.

Die synektischen Membranen sind unter allen (analytischen) Speermembranen dadurch gekennzeichnet, daß die gemeinsamen Normalen zwischen einem beliebigen Speer allgemeiner Lage der Membran und ihren benachbarten (zu ihm nicht-syntaktischen) Speeren in eine einzige Gerade zusammenfallen.

Die synektischen Membranen sind in Normalenkongruenzen reeller, entwickelbarer (aber unebener) Flächen enthalten.<sup>2)</sup>

Wir hatten in § 7 die (reellen) „uneigentlichen“ Speere des natürlichen Kontinuums auf die (reellen) Linienelemente der Einheitskugel abgebildet. Wir wollen jetzt in analoger Weise die (reellen) Büschel syntaktischer Speere auf die (reellen) Linienelemente der Kugel abbilden, indem wir jedem Büschel dasjenige Element zuordnen, dessen Punkt das sphärische Bild der Speere des Büschels ist und dessen Gerade auf der Ebene des Büschels senkrecht steht. Man findet dann:

Eine nicht-zyklindrische (analytische) Membran, die  $\infty^1$  Bänder reeller Büschel syntaktischer Speere enthält, ist dann und nur dann synektisch, wenn die  $\infty^1$  Linienelemente, welche die sphärischen Bilder dieser Büschel sind, einem reellen Kurvenzuge angehören.

Die zum Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnten parasynektischen Membranen werden mittels unserer Vektoren so dargestellt:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u), \\ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1(u) + \mathfrak{x} \wedge \mathfrak{x}' \cdot v. \end{cases}$$

Auch von diesen Membranen geht durch jedes (analytische) Band eine einzige hindurch. Seine Konstruktion geschieht in ähnlicher Weise wie die zuvor angegebene der synektischen Membran, es hat nämlich hier die syntaktische Verschiebung der Speere unseres Bandes in der zugehörigen asymptotischen Ebene zu erfolgen.

<sup>1)</sup> Unter einer asymptotischen Ebene eines Speerbandes in einem Speere  $S$  von allgemeiner Lage, soll diejenige Ebene durch  $S$  verstanden werden, die zu dem benachbarten Speer des Bandes parallel gestellt ist.

<sup>2)</sup> Über diese und andere Eigenschaften der synektischen Membranen vgl. die Geom. der Dynamen, S. 305 u. f.

Die Linienelemente auf der Kugel, welche den  $\infty^1$  reellen Büscheln syntaktischer Speere einer parasynektischen Membran gehören, stehen auf einem reellen Kurvenzuge senkrecht.

Im Anschlusse an die synektischen Membranen ist es nahelegend die unendliche, kontinuierliche Gruppe der synektischen Transformationen zu betrachten

$$(4) \quad X_k^* = X_k^*(X_1, X_2, X_3) \quad \{k = 1, 2, 3\}.$$

Von den reell-synektischen Funktionen  $X_k^*$  ist vor auszusetzen, daß sie einen gemeinsamen reellen Existenzbereich besitzen, die Beziehung  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$  invariant lassen und daß der skalare Bestandteil der Funktionaldeterminante der Transformation nicht identisch verschwinde.<sup>1)</sup>

Der synektischen Gruppe läßt sich die unendliche, kontinuierliche Schar der antisynektischen Transformationen an die Seite stellen

$$(5) \quad X_k^* = X_k^*(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3) \quad \{k = 1, 2, 3\}.$$

Dabei sind über die Funktionen rechter Hand dieselben Annahmen zu machen wie soeben und der Zirkumflex deutet wieder den Zeichenwechsel von  $\varepsilon$  an.

Beide Scharen bilden vereint wieder eine Gruppe, die wir die erweiterte synektische Gruppe nennen.

Trennen wir in den Formeln (4), (5) skalare und vektorielle Bestandteile, so erhalten wir

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{0k}^* = \tilde{x}_{0k}^*(x_{01}, x_{02}, x_{03}), \quad \{k = 1, 2, 3\} \\ X_{23}^* = x_{23}^{(1)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \Omega \cdot \left\{ \frac{\partial X_{01}^*}{\partial x_{01}} x_{23} + \frac{\partial X_{01}^*}{\partial x_{02}} x_{31} + \frac{\partial X_{01}^*}{\partial x_{03}} x_{12} \right\}, \\ X_{31}^* = x_{31}^{(1)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \Omega \cdot \left\{ \frac{\partial X_{02}^*}{\partial x_{01}} x_{23} + \frac{\partial X_{02}^*}{\partial x_{02}} x_{31} + \frac{\partial X_{02}^*}{\partial x_{03}} x_{12} \right\}, \\ X_{12}^* = x_{12}^{(1)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \Omega \cdot \left\{ \frac{\partial X_{03}^*}{\partial x_{01}} x_{23} + \frac{\partial X_{03}^*}{\partial x_{02}} x_{31} + \frac{\partial X_{03}^*}{\partial x_{03}} x_{12} \right\}. \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup>  $X_1^*$  ist eine reell-synektische Funktion der  $X_1, X_2, X_3$  wenn eine Beziehung stattfindet

$$X_1^* = x_{01}^* + \varepsilon x_{23}^* = x_{01}^*(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \varepsilon \left\{ x_{23}^{(1)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \frac{\partial X_{01}^*}{\partial x_{01}} x_{23} + \frac{\partial X_{01}^*}{\partial x_{02}} x_{21} + \frac{\partial X_{01}^*}{\partial x_{03}} x_{12} \right\},$$

wobei die im Übrigen beliebigen reell-analytischen Funktionen  $x_{01}^*$  und  $x_{23}^{(1)}$  einen gemeinsamen reellen Existenzbereich besitzen.

Hierin ist für synektische Abbildungen  $\Omega = +1$  und für anti-synektische  $\Omega = -1$  zu setzen.

Die Transformationen der erweiterten synektischen Gruppe vertauschen offenbar die synektischen Membranen untereinander (die parasynektischen hingegen im allgemeinen nicht). Man kann dies auch leicht mit Hilfe der Formeln (2) und (6) bestätigen ohne die dualen Größen heranzuziehen. Doch ist diese Eigenschaft, wie man an dem Beispiel der reellen Ähnlichkeitstransformationen ersieht, für unsere Gruppe nicht charakteristisch. Wir stellen uns daher die Aufgabe, die Gruppe  $\Gamma$  aller (reellen, analytischen) Speertransformationen aufzufinden, welche die synektischen Membranen (soweit sie in den Existenzbereich der Transformationen eindringen) untereinander vertauschen.

Zunächst leuchtet ein, daß die gesuchten Transformationen die (reellen) Büschel und daher auch die (reellen) Bündel syntaktischer Speere wieder in solche überführen.

Denken wir uns nun eine der gesuchten Transformationen  $S \rightarrow S^*$  gegeben und nehmen wir in ihrem Existenzbereich zwei nicht zylindrische Bänder an, deren sphärische Bilder zusammenfallen und beziehen wir die so aufeinander, daß wir syntaktische Speere einander zuordnen. Legen wir nun durch diese Bänder die synektischen Membranen. Die Ebenen der zwei Büschel dieser Membranen, die zwei zusammengehörige Speere enthalten, sind dann parallel. Durch unsere Abbildung  $S \rightarrow S^*$  gehen die zwei Bänder in zwei neue über, die in gleicher Weise aufeinander bezogen sind wie die ursprünglichen, und die synektischen Membranen durch die ursprünglichen Bänder gehen in die durch die neuen über. Daraus kann man aber den Schluß ziehen, daß bei unserer Transformation  $S \rightarrow S^*$  Büschel syntaktischer Speere, deren Ebenen parallel und deren Speere syntaktisch sind, wieder in solche Büschel übergehen müssen. Anders ausgedrückt: Büschel syntaktischer Speere mit gemeinsamem sphärischen Bilde gehen wieder in solche über.

Demgemäß ist mit jeder Abbildung  $S \rightarrow S^*$  eine Transformation der Linienelemente auf der Einheitskugel verknüpft. Man kann nun leicht erkennen, daß diese Elementtransformation eine Berührungstransformation sein muß, und zwar diejenige, welche durch den sogenannten Erweiterungsprozeß aus der Punkttransformation auf der Kugel hergeleitet wird, die das sphärische Bild der Abbildung  $S \rightarrow S^*$  ist. Doch wollen wir uns dieser Überlegung nicht bedienen, sondern gleich zu analytischen Betrachtungen übergehen.

Denken wir uns zwei in der Abbildung  $S \rightarrow S^*$  einander entsprechende (reelle) Bündel syntaktischer Speere durch Normal-ebenen geschnitten, so sind die Punktfelder dieser Ebenen so aufeinander bezogen, daß geraden Linien, wieder gerade Linien entsprechen, und zwar so, daß Parallelismus erhalten bleibt. Die

Felder sind also affin. Die Transformationsformeln müssen demnach die Gestalt haben

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}_{0k}^* = \mathfrak{X}_{0k}^*(\mathfrak{X}_{01}, \mathfrak{X}_{02}, \mathfrak{X}_{03}), \quad \{k = 1, 2, 3\} \\ \mathfrak{X}_{23}^* = A + B\mathfrak{X}_{23} + C\mathfrak{X}_{21} + D\mathfrak{X}_{12}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

worin die  $A, B, C, D, \dots$  (reelle, analytische) Funktionen der  $\mathfrak{X}_{0k}$  sind. Führt man nun die Bedingung ein, daß synektische Membranen, die wir in der Form (2) gegeben denken, wieder in solche übergehen, so findet man schließlich:

Die Transformationen der unendlichen, kontinuierlichen Gruppe  $\Gamma$ , welche die synektischen Membranen untereinander vertauschen, haben die Gestalt (6), wobei  $\Omega$  eine im übrigen beliebige (reelle, analytische) Funktion der  $\mathfrak{X}_{0k}$  bedeutet, die natürlich mit den Funktionen  $\mathfrak{X}_{0k}^*$ ,  $\mathfrak{X}_{rs}^{(1)}$  einen gemeinsamen, reellen Existenzbereich besitzen muß.

Aus der Gruppe  $\Gamma$  erhält man die Gruppe  $\Gamma^*$  aller Transformationen, die parasynektische Membranen wieder in solche überführen, wenn man  $\Gamma$  mit dem Schwenkungsprozeß transformiert. Der Durchschnitt von  $\Gamma$  und  $\Gamma^*$  wird von allen Transformationen (6) gebildet, deren sphärisches Bild

$$\mathfrak{X}_{0k}^* = \mathfrak{X}_{0k}^*(\mathfrak{X}_{01}, \mathfrak{X}_{02}, \mathfrak{X}_{03})$$

eine eigentlich- oder uneigentlich-konforme Abbildung ist.

Denken wir uns das sphärische Bild  $s \rightarrow s^*$  einer synektischen Transformation  $S \rightarrow S^*$  vorgelegt, d. h. die drei Funktionen  $\mathfrak{X}_{0k}^*$  gegeben. In zwei zugeordneten Punkten allgemeiner Lage  $p$  und  $p^*$  konstruieren wir nun die „berührende Affinität“, d. i. diejenige affine Abbildung zwischen den Tangentialebenen in diesen Punkten, welche die Linienelemente durch  $s$  und  $s^*$  (ihrer Lage und Länge nach) ebenso transformiert, wie die Punkttransformation  $s \rightarrow s^*$ .

Denkt man sich in den Formeln (6)  $\Omega = +1$  [ $\Omega = -1$ ] gesetzt, so ergibt sich aus ihrer Gestalt ohne weiteres:

Die Affinität zwischen zwei Normalebene von Bündeln syntaktischer Speere, die einander in einer synektischen [antisynektischen] Abbildung zugeordnet sind, unterscheidet sich von der berührenden Affinität in den zugehörigen Punkten der Einheitskugel nur durch eine Schiebung [Spiegelung an einem Punkte].<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Vgl. die analoge Eigenschaft (A) der Transformationen aus der Gruppe ( $G_{12}$ ,  $H_{12}^{(1)}$ ,  $H_{12}^{(2)}$ ,  $H_{12}^{(3)}$ ), die in § 3 näher erläutert worden ist. Natürlich ist der zweite Teil des dort angegebenen Satzes (A) als spezieller Fall in unserem jetzigen Lehrsatze enthalten.

Hieraus folgt:

Sind zwei reguläre Gebiete nicht-zyklindrischer (analytischer) Membranen aufeinander analytisch bezogen, so gibt es eine und nur eine synektische und ebenso eine und nur eine antisynnektische Abbildung, die diese Beziehung hervorruft.

Insbesondere ergibt sich weiter:

In der erweiterten synektischen Gruppe gibt es eine einzige von der Identität verschiedene, und zwar antisynnektische Transformation, die alle Speere einer nicht-zyklindrischen Membran einzeln in Ruhe läßt. Man konstruiert in dieser „*synektischen Spiegelung*“ an der Membran zu einem (reellen) Speere die entsprechenden, indem man ihn um die zu ihm syntaktischen Speere der Membran (falls solche vorhanden sind) umwendet.

Wir haben für alle hier behandelten Abbildungen im Gegenstande der ersten Paragraphen Beispiele. Die Gruppe  $(G_{12}, H_{12}^{(2)})$  ist in der synektischen Gruppe, die Scharen  $H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(3)}$  sind in der antisynnektischen Schar enthalten. Beispiele für Transformationen aus  $\Gamma$ , die nicht gleichzeitig in der erweiterten synektischen Gruppe enthalten sind, bieten, wie erwähnt, die reellen Ähnlichkeitstransformationen.

Wir kommen zu einer bemerkenswerten Untergruppe der erweiterten synektischen Gruppe, die ihr Durchschnitt mit der zuvor  $\Gamma^*$  genannten Gruppe ist, wenn wir diejenigen synektischen und antisynnektischen Abbildungen aufsuchen, deren sphärisches Bild konform ist. Wir werden diese Gruppe die erweiterte konform-synektische Gruppe nennen. Sie zerfällt in vier kontinuierliche Scharen: die Gruppe  $G$  der eigentlich-konform-synektischen Transformationen, die Schar  $H_I$  der eigentlich-konform-antisynnektischen, die Schar  $H_{II}$  der uneigentlich-konform-synektischen und endlich  $H_{III}$ , die der uneigentlich-konform-antisynnektischen Abbildungen.

In  $G, H_I, H_{II}, H_{III}$  sind entsprechend enthalten  $G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)}$ .

Benützen wir für die reellen Speere die komplex-dualen Speerkoordinaten  $S$  des § 3, so können wir die Transformationen der vier Scharen  $G, H_I, H_{II}, H_{III}$  der Reihe nach so darstellen

$$(7) \quad S^* = S^*(S), \quad S^* = S^*(\tilde{S}), \quad S^* = S^*(\bar{S}), \quad S^* = S^*(\tilde{\bar{S}}),$$

wenn der Querstrich den Zeichenwechsel von  $i$ , der Circumflex den von  $\varepsilon$  und die Funktionszeichen komplex-synektische Funktionen der angezeigten Veränderlichen andeuten, deren skalare Bestandteile nicht konstant sind (vgl. die Formeln (4) in § 3). Die erste dieser Formeln wollen wir beispielsweise auch ausführlicher schreiben, indem wir skalare und vektorielle Teile scheiden.

$$(8) \quad \begin{cases} t^* = \varphi(t), \\ T^* = \psi(t) + \varphi'(t) T. \end{cases}$$

Wir bemerken ferner:

Die erweiterte konform-synektische Gruppe ist der vollständige Durchschnitt der erweiterten isotropen Gruppe mit der erweiterten synektischen Gruppe, und zwar ist

$G$  der Durchschnitt der isotropen Gruppe mit der synektischen Gruppe,

$H_I$  der Durchschnitt der isotropen Gruppe mit der antisynektischen Schar,

$H_{II}$  der Durchschnitt der anisotropen Schar mit der synektischen Gruppe,

$H_{III}$  der Durchschnitt der anisotropen Schar mit der antisynektischen Schar.

Mit Hilfe der Parameter  $t, T$  beweist man ohne Mühe:

Die Gesamtheit aller Speertransformationen, die einerseits die isotropen andererseits die synektischen Membranen untereinander vertauschen, d. i. der Durchschnitt der erweiterten isotropen Gruppe mit  $\Gamma$ , entsteht aus der erweiterten konform-synektischen Gruppe durch Adjunktion der (reellen) Ähnlichkeitstransformationen.

Die im § 3 unter (A), (B), (C) angeführten Lehrsätze gelten auch für unsere unendlichen Gruppen, man hat nur an Stelle von „Kreisverwandtschaft“ „konforme Abbildung“ und an Stelle von  $G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)}$  entsprechend  $G, H_I, H_{II}, H_{III}$  einzusetzen.<sup>1)</sup> Die dort angegebenen Beweise lassen sich nämlich unmittelbar hierher übertragen.

Aus der Formel (8) erhält man durch differenzieren

$$(9) \quad \frac{dT^*}{dt^*} = \frac{\psi' + \varphi'' \cdot T}{\varphi'} + \frac{dT}{dt}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man die Gleichungen (11) und (12) des vorigen Paragraphen (§ 9) berücksichtigt, sofort ein wesentlicher Teil der Lehrsätze (B) und (C).

Nach dem bisher Bewiesenen können wir alle (analytischen) Speertransformationen angeben, die Bänder, welche in einem ge-

<sup>1)</sup> Einige dieser Beziehungen sind sehr ausführlich in anderer Form bei Herrn J. Grünwald (a. a. O. § 14, S. 118) behandelt, wo die Gruppe  $G$  schon untersucht worden ist.

meinsamen Speer gleichen Zentralpunkt haben, immer wieder in solche Bänder überführen. Nach der Eigenschaft nämlich, welche die isotropen und synektischen Membranen gemeinsam kennzeichnet [vgl. (I) in § 9], können wir von diesen Transformationen erkennen, daß sie sowohl die isotropen, wie die synektischen Membranen untereinander vertauschen, da es offenbar keine Transformation geben kann, die diese beiden Familien von Membranen untereinander vertauscht. Wir kommen also hier auf den schon zuvor betrachteten Durchschnitt von  $\Gamma$  mit der erweiterten isotropen Gruppe.

Zu ebendemselben Durchschnitt kommt man auch, wenn man alle (analytischen) Speertransformationen sucht, die folgende Eigenschaft haben. Es seien  $S, S^*$  zwei entsprechende Speere in einer der Transformationen  $S \rightarrow S^*$ ; dann soll zwischen den Verteilungsparametern  $L$  und  $L^*$  zweier entsprechender Bänder in  $S$  und  $S^*$  eine Beziehung bestehen

$$A + BL + CL^* = 0,$$

deren Koeffizienten nur von der Wahl des Paares  $S, S^*$  nicht aber von der Wahl der Bänder durch diese Speere abhängen.

Haben zwei Speerbänder einen Speer  $S$  gemeinsam und haben sie hier die Zentralpunkte  $z_1$  und  $z_2$ , so könnte man die (auch ihrem Vorzeichen nach bestimmte) Strecke  $\overline{z_1 z_2}$  „die Tangentialentfernung der beiden Bänder an der Stelle  $S$ “ nennen, indem man eine in der ebenen Geometrie übliche Ausdrucksweise auf den Raum in naheliegender Weise verallgemeinert.<sup>1)</sup>

Man kann sich nun nach allen (reellen) Speertransformationen fragen mit der Eigenschaft, daß entsprechende Tangentialentfernungen entsprechender Bänder stets einander gleich sein sollen. Solche Abbildungen hätte man dann, um die Analogie der ebenen Geometrie aufrecht zu erhalten, als eigentlich-äquidistante oder eigentlich-äquilonge Speertransformationen des Raumes zu bezeichnen.<sup>2)</sup>

Zunächst erkennt man wieder auf Grund der Eigenschaft (I) in § 9, daß derartige Abbildungen sowohl die isotropen als auch die synektischen Membranen untereinander vertauschen müssen. Daraus folgt dann weiter, daß sie der Gruppe  $(G, H_{III})$  angehören, deren Transformationen tatsächlich die gewünschte Eigenschaft haben, wie in den Theoremen  $(B)$  und  $(B_3)$  festgestellt wurde.

Wir sehen also:

Die unendliche Gruppe der *eigentlich-äquilongen* Speertransformationen des Raumes fällt mit der Gruppe  $(G, H_{III})$  zusammen. Ihr kann man die Scharen  $H_I, H_{II}$  der *uneigentlich-äquilongen* Abbildungen an die Seite stellen.

<sup>1)</sup> Man vgl. etwa die Arbeit des Verfassers: „Geometrie der Speere in der Ebene“. Monatshefte XXI., Jahrg. 1910, bes. S. 10.

<sup>2)</sup> Siehe ebendort S. 13. Eine andere Verallgemeinerung der äquilongen Gruppe der Ebene findet man behandelt in meiner Note: „Über einige unendliche Gruppen von Transformationen orientierter Ebenen“ im Archiv für Math. 1910. S. 182—189.

Bei den Transformationen aus  $H_I, H_{II}$  sind nämlich zugeordnete Tangentialentfernungen einander entgegengesetzt-gleich [vgl. die Lehrsätze ( $B_1$ ) und ( $B_2$ )].

Wir bemerken noch, daß die zuvor eingeführten Spiegelungen an (nicht-zylindrischen) Membranen in der Schar  $H_I$  enthalten sind. Es gilt allgemein der Satz:

Bezieht man zwei reguläre Gebiete nicht-zylindrischer Membranen so aufeinander, daß ihre sphärischen Bilder eigentlich [uneigentlich] konform werden, dann gibt es stets eine und nur eine Abbildung aus jeder der Scharen  $G$  und  $H_I$  [ $H_{II}$  und  $H_{III}$ ], die gerade diese Beziehung hervorruft.

### § 11. Zusammenhang der Speergeometrie des Raumes mit der Speergeometrie der Ebene.

Während wir uns in den letzten zwei Paragraphen meistens auf die Betrachtung reeller Speere beschränkt hatten, sollen sich die folgenden Untersuchungen wieder auf komplexe (eigentliche) Speere erstrecken.

Wir bilden die Gesamtheit der komplexen (eigentlichen) Speere  $S$  des Raumes ab auf die geordneten Paare ( $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_r$ ) von komplexen (eigentlichen) Speere einer festen Euklidischen Ebene  $\zeta$ , und zwar in folgender Weise. Wir legen durch  $S$  die linkseitige Minimalebene (§ 8). Diese hat mit  $\zeta$  einen einzigen Speer gemeinsam, den wir mit  $\mathfrak{S}_l$  bezeichnen wollen. Die rechtseitige Minimalebene durch  $S$  trifft  $\zeta$  ebenfalls in einem Speere und den durch Umkehrung daraus hervorgehenden Speer werden wir  $\mathfrak{S}_r$  nennen.  $\mathfrak{S}_r$  liegt demnach auch in der linkseitigen Minimalebene durch den Speer, welcher mit  $S$  antitaktisch zusammenfällt.

Ist umgekehrt das Paar ( $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_r$ ) von komplexen (eigentlichen) Speeren in  $\zeta$  vorgelegt, so finden wir den zugehörigen Speer  $S$  des Raumes folgendermaßen. Wir legen durch  $\mathfrak{S}_l$  die linkseitige Minimalebene und durch den Speer, der mit  $\mathfrak{S}_r$  antitaktisch zusammenfällt, die rechtseitige; die beiden verschiedenartigen Minimalebenen durchdringen sich im gesuchten Speere  $S$ .

Die Beziehung  $S \leftrightarrow (\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_r)$  ist also ausnahmslos umkehrbar eindeutig.

Wie wir sehen, ist es zweckmäßig, die Ebene  $\zeta$  doppelt zu überdecken mit zwei „Schichten“, wie wir uns ausdrücken wollen. Den Ort der Speere  $\mathfrak{S}_l$  nennen wir „die linke Schicht“  $\zeta_l$  und den von  $\mathfrak{S}_r$  „die rechte Schicht“  $\zeta_r$ .

Um die Zuordnung  $S \leftrightarrow (\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_r)$  auch analytisch zu formulieren, führen wir zunächst für die Speere  $\mathfrak{S}$  der Ebene  $\zeta$  Koordinaten ein, wobei wir etwa von der Annahme ausgehen, daß  $\zeta$  mit der Koordinatenebene  $x_3 = 0$  zusammenfalle. Als Koordinaten für  $\mathfrak{S}$  nehmen wir die beiden komplexen Parameter  $t, T$ ,

die der linksseitigen Minimalebene durch  $\mathfrak{S}$  in der in § 2 behandelten Zuordnung entsprechen, doch wollen wir statt  $t, T$  hier lieber  $t, \mathfrak{T}$  schreiben.

Sind

$$(1) \quad \begin{cases} v_0 + v_1 x_1 + v_2 x_2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der von  $\mathfrak{S}$  überdeckten Geraden, so können wir, wenn  $v_1^2 + v_2^2 = v_3^2$  gesetzt wird, die Beziehungen aufstellen [vgl. (3), (3\*) in § 1]

$$(2) \quad \begin{aligned} v_0 : v_1 - i v_2 : v_1 + i v_2 : -i v_3 &= i \mathfrak{T} : -1 : t^2 : t, \\ v_0 : v_1 : v_2 : v_3 &= -2 i \mathfrak{T} : (1 - t^2) : i(1 + t^2) : -2 i t. \end{aligned}$$

Wir führen ferner auch hier die (komplex-) duale Verbindung  $t + \varepsilon \mathfrak{T} = \mathfrak{S}$  ein. Benützen wir für die Speere  $S$  des Raumes die homogenen, (komplex-) dualen Koordinaten des § 7, so können wir unsere Abbildung  $S \leftrightarrow (\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_r)$  nunmehr so ausdrücken [vgl. (20) in § 8]

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_l = t_l + \varepsilon \mathfrak{T}_l = \frac{X_1 + i X_2}{X_0 + X_3} = \frac{X_0 - X_3}{X_1 - i X_2}, \\ \mathfrak{S}_r = t_r + \varepsilon \mathfrak{T}_r = -\frac{X_1 + i X_2}{X_0 - X_3} = -\frac{X_0 + X_3}{X_1 - i X_2}; \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} X_0 : X_1 : X_2 : X_3 = \\ = \{\mathfrak{S}_l - \mathfrak{S}_r\} : \{1 - \mathfrak{S}_l \mathfrak{S}_r\} : i \{1 + \mathfrak{S}_l \mathfrak{S}_r\} : -\{\mathfrak{S}_l + \mathfrak{S}_r\}. \end{cases}$$

Es sei hier noch an einige Tatsachen der ebenen Speergeometrie erinnert. Durch eine linear-gebrochene (komplex-) duale Substitution

$$\mathfrak{S}^* = \frac{A + B \mathfrak{S}}{C + D \mathfrak{S}}$$

wird eine komplexe Transformation aus der Gruppe der eigentlichen Laguerreschen Transformationen  $\mathfrak{G}_6$  dargestellt,<sup>1)</sup> dabei hat man nur vorauszusetzen, daß der skalare Bestandteil der Substitutionsdeterminante von Null verschieden sei. Analog wird durch eine Substitution

$$\mathfrak{S}^* = \frac{A + B \tilde{\mathfrak{S}}}{C + D \tilde{\mathfrak{S}}}$$

eine komplexe Abbildung aus der Schar  $\mathfrak{H}_6$  der uneigentlichen Laguerreschen Transformationen gegeben. Endlich wird durch die Formeln

$$\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}^*(\mathfrak{S}), \quad \tilde{\mathfrak{S}}^* = \tilde{\mathfrak{S}}^*(\tilde{\mathfrak{S}})$$

<sup>1)</sup> Man vgl. hier und später des Verfassers „Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene“, Monatshefte XXI (1910).

eine (komplexe) Abbildung aus der Gruppe  $\mathcal{G}$  der eigentlich- und eine aus der Schar  $\mathcal{H}$  der uneigentlich-äquilongen Speertransformationen der Ebene dargestellt, wenn wir annehmen, daß die skalaren Teile der komplex-synektischen Funktionen zu rechter Hand nicht konstant sind.

Wir stellen nach diesen Vorbereitungen einige geometrische Gebilde und Operationen einander gegenüber, die durch unsere Abbildung  $S \longleftrightarrow (\mathcal{S}_l, \mathcal{S}_r)$  miteinander vertauscht werden, wie man auf Grund der letzten Formeln oder auch auf synthetischem Wege leicht bestätigen wird.

Raum.	Ebene.
Speer $S$ .	Geordnetes Speerpaar $(\mathcal{S}_l, \mathcal{S}_r)$ .
Links- [rechts-] seitige Minimal- ebene.	Fester Speer der linken [rechten] Schicht verbunden mit allen Speeren der anderen Schicht.
Gesamtheit der Speere von $\zeta$ .	Die linke Schicht $\zeta_l$ wird auf die rechte $\zeta_r$ durch die Um- kehrung bezogen.

D. h. mit anderen Worten: Jeder Speer  $S$  von  $\zeta$  bildet sich auf ein Paar  $(\mathcal{S}_l, \mathcal{S}_r)$  ab, dessen Speere antitaktisch zusammenfallen. Analog ist die folgende Gegenüberstellung zu verstehen:

Kugel der Minimal-speere.	Die beiden Schichten sind auf- einander durch die Identität be- zogen.
(Komplexe) Bewegung des Speerraumes.	Die beiden Schichten werden der- selben komplexen Abbildung aus $\mathcal{G}_6$ unterworfen.

Die elementargeometrischen Eigenschaften räumlicher Speerfiguren bilden sich somit auf Eigenschaften ebener Speerfiguren ab, die gegenüber  $\mathcal{G}_6$  invariant sind.

Umwendung des Speerraumes an einer Euklidischen Geraden.	Die Schichten werden der Um- wendung an demselben Speer- paar unterworfen. <sup>1)</sup>
Komplexe Umlageung des Speerraumes.	Bedeutet $\Theta$ eine Transformation aus $\mathcal{G}_6$ , so ist $\{\zeta_l\} \Theta = \zeta_r^*, \{\zeta_r\} \Theta = \zeta_l^*.$

Die neue rechte Schicht geht also aus der früheren linken durch die gleiche uneigentliche Laguerresche Abbildung hervor, wie die neue linke aus der ursprünglichen rechten Schicht.

<sup>1)</sup> Siehe a. a. O. S. 14, 15, 16.

Die Umlegung ist insbesondere die Spiegelung an einer Euklidischen Ebene.

$\Theta$  ist insbesondere eine Laguerresche Spiegelung.<sup>2)</sup>

(I) Komplexe Transformation aus  $G_{12} [H_{12}^{(1)}]$ .

Bedeutet  $\Theta_l$  und  $\Theta_r$  zwei komplexe Transformationen aus  $\mathfrak{G}_6 [\mathfrak{H}_6]$ , so ist  $\{\zeta_l\} \Theta_l = \zeta_l^*$ ,  $\{\zeta_r\} \Theta_r = \zeta_r^*$ .

(II) Komplexe Transformation aus  $H_{12}^{(2)} [H_{12}^{(3)}]$ .

Bedeutet  $\Theta_{lr}$  und  $\Theta_{rl}$  zwei komplexe Transformationen aus  $\mathfrak{G}_6 [\mathfrak{H}_6]$ , so ist  $\{\zeta_l\} \Theta_{lr} = \zeta_r^*$ ,  $\{\zeta_r\} \Theta_{rl} = \zeta_l^*$ .

Die Umkehrung. Spiegelung an der Ebene  $\zeta$ .

$\Theta_{lr} = \Theta_{rl}$  ist die Identität.  $\Theta_{lr} = \Theta_{rl}$  ist die Umkehrung.

Die Gegenüberstellungen (I) und (II) bleiben richtig, wenn wir gleichzeitig links an Stelle von  $G_{12}, H_{12}^{(1)}, H_{12}^{(2)}, H_{12}^{(3)}$  der Reihe nach  $G, H_I, H_{II}, H_{III}$  (siehe § 18) einführen und rechts an Stelle von  $\mathfrak{G}_6, \mathfrak{H}_6$  entsprechend  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$ .

Komplexe Abbildung der isotropen Gruppe.

$$\{\zeta_l\} \Theta_l = \zeta_l^*, \{\zeta_r\} \Theta_r = \zeta_r^*.$$

Komplexe Abbildung der ant isotropen Schar.

$$\{\zeta_l\} \Theta_{lr} = \zeta_r^*, \{\zeta_r\} \Theta_{rl} = \zeta_l^*.$$

Hierbei bedeuten die verschiedenen  $\Theta$  beliebige (komplex-) analytische Speertransformationen in der Ebene  $\zeta$ .

$S$  durchläuft eine Speerfläche, die nicht in einer einseitigen Minimalebene enthalten ist.

$\mathfrak{S}_l$  und  $\mathfrak{S}_r$  durchlaufen zwei Speermannigfaltigkeiten  $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_r$  von einer komplexen Dimension, die aufeinander analytisch bezogen sind ( $\mathfrak{S}_l \rightarrow \mathfrak{S}_r$ ).

Wir wollen hier nebenbei angeben, welche Bedeutung der komplexe Verteilungsparameter  $L$  der Speerfläche für die ebene Figur hat, doch wollen wir uns bei dieser Angabe der Kürze halber auf den „allgemeinen Fall“ beschränken.

Den Schnittpunkt von  $\mathfrak{S}_l$  und  $\mathfrak{S}_r$  wollen wir  $n$  und den Berührungspunkt von  $\mathfrak{S}_l [\mathfrak{S}_r]$  mit der (im allgemeinen) umhüllten (orientierten) analytischen Kurve werden wir  $z_l [z_r]$  nennen. Dann ist

$$(5) \quad L = \frac{i}{2} \{ \overline{n z_l} + \overline{n z_r} \},$$

<sup>1)</sup> Siehe a. a. O. S. 14, 15.

wobei natürlich den beiden Strecken  $\overline{nz_i}$  und  $\overline{nz_r}$  bestimmte Vorzeichen zu erteilen sind. Es sei dem Leser überlassen, hieraus Sätze über entwickelbare Speerflächen  $\{L=0\}$  herzuleiten. Man kann die Formel (5) etwa auf Grund der Beziehung (18) des § 2 für den Brennpunkt der Speerfläche entwickeln.

$S$  durchläuft eine komplexe Speerkette, die nicht in einer Minimalebene liegt.

$S$  beschreibt eine isotrope Speerkongruenz.

Die Kongruenz ist eine komplexe Speergarbe.

$\mathfrak{C}_i$  und  $\mathfrak{C}_r$  sind zwei eigentliche Zykeln, die aufeinander projektiv bezogen sind.<sup>1)</sup>

$\mathfrak{S}_i$  und  $\mathfrak{S}_r$  durchlaufen unabhängig voneinander zwei Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_r$  von einer komplexen Dimension.

$\mathfrak{C}_i$  und  $\mathfrak{C}_r$  sind eigentliche Zykeln.

Aus den Gleichungen (3) folgt, daß zwischen  $\mathfrak{S}_i$  und  $\mathfrak{S}_r$  eine (komplex-)synektische Beziehung hergestellt wird, wenn wir die  $X_k \{k=0, 1, 2, 3\}$  als (komplex-) synektische Funktionen eines (komplex-) dualen Parameters darstellen. Das ergibt die folgende geometrische Deutung:

Synektische Speerkongruenz.

Komplexe Speerkugel.

Komplexes Normalnetz.

Parasynektische Speerkongruenz.

Komplexer Speerquirl.

Gesamtheit der Speere einer Euklidischen Ebene.

Gewöhnliche Speerkongruenz (siehe § 10).

Die beiden Schichten werden aufeinander durch eine komplexe *eigentlich-äquilonge* Abbildung  $\Theta$  bezogen:  $\{\zeta_i\} \Theta = \zeta_r$ .

$\Theta$  ist eine komplexe eigentliche Laguerresche Transformation.

$\Theta$  ist die Umwendung an einem Speerpaar.

Die beiden Schichten werden aufeinander durch eine komplexe, *uneigentlich-äquilonge* Abbildung  $\Theta$  bezogen:  $\{\zeta_i\} \Theta = \zeta_r$ .

$\Theta$  ist eine komplexe, uneigentliche Laguerresche Transformation.

$\Theta$  ist eine komplexe Laguerresche Spiegelung.

Analytische Speertransformation:  
 $\{\zeta_i\} \Theta = \zeta_r$ .

<sup>1)</sup> Vgl. a. a. O. S. 7.

Geometrische Nachweise für die Richtigkeit der beiden gesperrt gedruckten Gegenüberstellungen kann man erbringen auf Grund der fürs komplexe Gebiet verallgemeinerten Eigenschaften (I) und (II) des § 9, die für die synektischen und parasynektischen Kongruenzen unter den gewöhnlichen Speerkongruenzen kennzeichnend sind.

Als einfaches Beispiel dafür, wie Sätze der räumlichen und ebenen Speergeometrien einander durch unsere Abbildung  $S \longleftrightarrow (\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}_r)$  zugeordnet werden, führen wir die folgenden an:

Durch jede komplexe Speerkette, die nicht in einer Minimalebene liegt, geht eine Speerkugel und ein Speerquirl hindurch (§ 5).

Sind zwei eigentliche Zyklen aufeinander projektiv bezogen, so gibt es eine eigentliche und eine uneigentliche Laguerresche Speertransformation, die diese Beziehung vermittelt.

Zum Abschlusse sei darauf hingewiesen, daß sich den in dieser Abhandlung entwickelten Untersuchungen eine ausgedehnte Anwendung und Verallgemeinerung in der geometrischen Kinematik an die Seite stellen läßt, wovon in einer folgenden Arbeit die Rede sein soll.