

DEFORMAZIONE DI UNA SFERA ELASTICA

DOVUTA AL SUO MOTO IN SENO AD UN LIQUIDO.

(Modello meccanico di un elettrone).

NOTA DI UMBERTO CISOTTI.

Si consideri un elettrone in moto rettilineo uniforme, e si supponga che la deformazione, cui eventualmente sottostà l'elettrone durante il moto, si possa riguardare infinitesima.

Si immagini, per fissare le idee, che l'elettrone in quiete abbia la forma sferica.

« In queste condizioni — insegna la cinematica — l'elettrone non può far altro che assumere forma ellissoidica (vicina in ogni caso alla forma sferica), per quanto dipendente, in modo a priori incognito, dalle circostanze del moto.

« Qualunque ipotesi su tale dipendenza, purchè la deformazione si mantenga entro limiti abbastanza ristretti, può essere ragionevolmente esperita.

« Di quà le diverse meccaniche degli elettroni » ¹⁾.

Così Abraham ha emessa l'ipotesi dell'elettrone rigido.

Lorentz ha supposto invece che l'elettrone si schiacci nel senso del moto, e precisamente detto R il raggio della sfera iniziale, essa divenga un ellissoide di rotazione avente ancora R per raggio equatoriale e $R\sqrt{1-\beta^2}$ per raggio polare (β rappresenta il rapporto tra la velocità dell'elettrone e quella della luce).

¹⁾ Levi-Civita. « Sulla massa elettromagnetica ». Rapporto presentato al primo congresso della Società italiana per il progresso delle Scienze (Parma, Settembre 1907) [*Nuovo Cimento*, Ottobre 1907; pag. 3-36; oppure *Rivista di Scienza*, 1907. Vol. II. N. IV; pag. 387-412].

Bucherer e Langevin hanno considerato elettroni incomprimibili soggetti alla contrazione lorentziana: R_1 , R_2 essendo i raggi equatoriale e polare dell'elettrone deformato, si deve avere per l'incompressibilità $R_1^2 R_2 = R^3$, essendo $\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{1 - \beta^2}$, come nell'elettrone di Lorentz.

Infine Poincaré ha considerato un tipo di legame che comprende tutti i precedenti come casi particolari ¹⁾.

Un'altra ipotesi, avente lo stesso diritto di cittadinanza di quelle ora enumerate, viene naturalmente suggerita dall'immagine meccanica di una sfera elastica che si muove in seno ad un liquido indefinito, e che si deforma in causa delle pressioni esercitate dal liquido sugli elementi della sua superficie: Tale immagine meccanica, che ora preciserò meglio, forma argomento della presente Nota.

La sfera elastica sia omogenea isotropa, di raggio R e dotata di una traslazione uniforme di velocità V (in valore assoluto); e il liquido indefinito, di densità eguale a 1, entro cui essa si muove, sia libero da forze.

Il moto della sfera provoca nella massa liquida un movimento le cui caratteristiche si sanno ben determinare.

In particolare si valutano agevolmente le pressioni che vengono esercitate, da parte del liquido, sugli elementi della superficie della sfera. Queste pressioni costituiscono un sistema staticamente nullo; ad esse però rimane subordinata una deformazione della sfera. Si consideri la *deformazione dinamica* cioè la differenza fra la deformazione effettiva e quella che si avrebbe *cacteris paribus* nel caso statico (*deformazione statica*).

Essa si manifesta in uno schiacciamento della sfera nel senso del moto, in modo preciso la sfera diviene un ellissoide rotondo: *il raggio equatoriale subisce un allungamento unitario.*

$$\varepsilon_e = \frac{9(7 - 5\sigma - 8\sigma^2)V^2}{8(7 + 5\sigma)E},$$

¹⁾ Per più diffuse notizie, illustrate da considerazioni critiche, si legga il citato rapporto di Levi-Civita.

mentre il raggio polare sottostà ad un accorciamento unitario

$$\varepsilon_p = \frac{9(2 + \sigma)V^2}{2(7 + 5\sigma)E};$$

entrambi sono proporzionali al quadrato della velocità della sfera, i coefficienti costanti dipendendo soltanto dalla natura del materiale elastico di cui è costituita la sfera stessa (E è il modulo di Young, σ il rapporto di Poisson).

Lo schiacciamento è

$$s = \frac{9(1 + \sigma)(7 - 4\sigma)V^2}{8(7 + 5\sigma)E + 9(7 - 5\sigma - 8\sigma^2)V^2}.$$

Conseguentemente si ha un aumento unitario di volume

$$\delta = \frac{9(1 - 2\sigma)V^2}{4E},$$

anch'esso proporzionale al quadrato della velocità della sfera.

Va ricordato che, in ogni caso, σ deve soddisfare alle seguenti limitazioni ⁴⁾

$$-1 < \sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Il caso limite della rigidità ($E = \infty$) da l'immagine meccanica dell'elettrone di Abraham.

Se la sfera è — o può ritenersi sensibilmente — incompressibile, essendo allora $\sigma = \frac{1}{2}$, si ha

$$\varepsilon_e = \frac{45}{152} \frac{V^2}{E}, \quad \varepsilon_p = \frac{45}{38} \frac{V^2}{E},$$

nonchè $\delta = 0$, come nell'elettrone di Bucherer e Langevin.

Non può aversi invece il modello meccanico dell'elettrone di Lorentz.

⁴⁾ Cfr. ad. es. Marcolongo. « Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici ». [Manuali Hoepli; 1904; pag. 140].

Si esige infatti perciò, $\varepsilon_e = 0$, cioè

$$8\sigma^2 + 5\sigma - 7 = 0;$$

ora le radici di questa equazione non soddisfano alla limitazione dianzi richiamata.

§ 1.

Moto rettilineo uniforme di una sfera in un liquido indefinito.

Sia C un solido di forma sferica, immerso in un liquido S indefinitamente esteso e libero da forze di massa. La sfera C sia dotata di moto rettilineo uniforme; V sia il valore assoluto della sua velocità.

Tale movimento provoca nel liquido circostante S una perturbazione avente carattere permanente (rispetto al solido) e che si rende tanto meno sensibile quanto più ci si discosta dalla sfera C .

Introduciamo una terna di assi $Oxyz$, che accompagna la sfera nel suo movimento, e aventi: l'origine nel centro O della sfera, l'asse z diretto nel senso opposto al moto, e gli assi x e y presi in modo da rendere la terna trirettangola sinistrorsa. Siano: R il raggio della sfera; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distanza del generico punto $P(x, y, z)$ dal centro O ; sarà $\rho = R$ l'equazione della superficie τ del solido in movimento. Le componenti, secondo gli assi x, y, z , della velocità della sfera sono $0, 0, -V$.

Il moto del liquido — fluido omogeneo incompressibile, la cui densità (costante) conviene assumere eguale ad uno — ha carattere permanente e, supponiamolo, *irrotazionale*.

Si è già rilevato che l'influenza del moto di C sulle particelle liquide è tanto meno sensibile quanto più ci si allontana da C ; ciò è quanto dire che la velocità comunicata da C alle molecole liquide tende a zero in punti infinitamente lontani da C .

Se si ricorre al noto artificio di imprimere a tutto il sistema (solido, liquido) una traslazione uniforme di velocità

V nel senso delle z positive, non si altera evidentemente il moto relativo delle sue parti. Allora il solido C è ridotto alla quiete, e le particelle di S a grande distanza da C scorrono con velocità limite V , nel senso delle z positive. L'aspetto del fenomeno è una corrente modificata dalla presenza della sfera immobile C .

Il problema del moto della sfera e il problema del moto della corrente sono analiticamente equivalenti. Giova riferirsi a quest'ultimo.

La sua risoluzione rientra ormai in un campo classico di questioni ¹⁾.

Il movimento in S essendo, per ipotesi, *irrotazionale* si ha un *potenziale di velocità* $\varphi(x, y, z)$, funzione dei punti di S definita, a meno di una inessenziale costante additiva, dell'espressione seguente ²⁾

$$(1) \quad \varphi = -\frac{1}{2} V R^3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} + V z, \quad (\text{per } \rho \geq R).$$

In S si ha, per ipotesi, moto permanente e irrotazionale in assenza di forze di massa. Perciò detta p la pressione, indicato con $|\Delta_1 \varphi| = \left| \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \right|$, il valore assoluto della velocità in un generico punto, e ricordando di avere assunto eguale a 1 la densità del liquido, le equazioni idrodinamiche di Eulero si compendiano nella relazione

$$(2) \quad p = p_0 - \frac{1}{2} (\Delta_1 \varphi)^2.$$

Si è chiamato p_0 la pressione (costante) del liquido quando è in quiete ($\Delta_1 \varphi = 0$) — *pressione idrostatica*.

Portando in (2) l'espressione (1) di φ si ottiene la pressione definita in ogni punto di S mediante i dati della questione: il raggio R della sfera, e la velocità V ,

¹⁾ Cfr. ad es. Maggi. « Principii della teoria matematica del movimento dei corpi ». [Milano; Hoepli; 1896; § 557].

²⁾ Cfr. Maggi, loc. cit., salvo lo scambio di z in $-z$.

$$(3) \quad p = p_0 - \frac{V^2 R^3}{2 \rho^3} \left\{ 3 \left[\frac{1}{4} \frac{R^3}{\rho^3} - 1 \right] \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{1}{4} \frac{R^3}{\rho^3} + \frac{\rho^3}{R^3} + 1 \right\}.$$

In particolare, chiamando p_τ il valore della pressione in un generico punto della superficie sferica τ , si ricava dalla precedente, ponendovi $\rho = R$,

$$(4) \quad p_\tau = p_0 - \frac{9}{8} \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) V^2.$$

OSSERVAZIONI. — Dalla (4), che caratterizza la distribuzione delle pressioni esercitate sugli elementi $d\tau$ della superficie sferica τ , scende intanto che le pressioni sono eguali, in valore assoluto, in punti opposti rispetto al centro della sfera; essendo inoltre dirette tutte verso il centro stesso, costituiscono un sistema di forze che si equilibrano. — Si ritrova in tal modo il *paradosso di d' Alembert*: per una sfera dotata di moto rettilineo uniforme in un liquido, sono nulli la risultante ed il momento risultante delle pressioni esercitate dal liquido sulla sfera.

Non è privo di interesse rilevare che vi sono soltanto due punti della superficie ($z = +R$, $z = -R$) in cui $p_\tau = p_0$ nei quali cioè la *pressione idrodinamica* coincide colla *pressione idrostatica*: essi sono il punto più avanzato (*prora*) e il punto opposto (*poppa*). — Nei punti di τ appartenenti all'equatore ($z = 0$) la pressione idrodinamica raggiunge il minimo valore $p_0 - \frac{9}{8} V^2$.

§ 2.

Deformazione statica.

La sfera C sia costituita di materiale elastico, omogeneo ed isotropo, e sia in quiete. — Naturalmente anche il liquido S, in cui è immersa la sfera, è in quiete. Poichè è allora $V = 0$, dalla (4) si ha $p_\tau = p_0$.

La sfera è in tal caso sottoposta ad un complesso di pressioni radiali, uniformemente distribuite sulla sua superficie τ . In queste condizioni la sfera elastica subisce una con-

trazione simmetrica rispetto al suo centro, si deforma cioè, in un'altra sfera di raggio $R_0 < R$, ricavabile immediatamente.

Sarà a dirsi *deformazione statica* tale deformazione subita dalla sfera elastica, dovuta soltanto alla sua immersione nel liquido in quiete.

CONTRAZIONE DELLA SFERA. — Il volume iniziale della sfera è $\frac{4}{3} \pi R^3$; dopo l'immersione il suo volume diviene $\frac{4}{3} \pi R_0^3$. — La diminuzione totale di volume è data da ¹⁾

$$\frac{4}{3} \pi (R^3 - R_0^3) = \frac{4 \pi (1 - 2 \sigma) p_0 R^3}{E},$$

dove E e σ designano costanti elastiche, dipendenti dalla natura del materiale di cui è costituita la sfera: E è il *modulo di Young*, e σ il *rapporto di Poisson*. — Chiamando δ_0 la *diminuzione per unità di volume*, cioè ponendo

$$(5) \quad \delta_0 = \frac{R^3 - R_0^3}{R^3},$$

si ha

$$(6) \quad \delta_0 = \frac{3(1 - 2 \sigma) p_0}{E}.$$

Sia

$$(7) \quad \epsilon = \frac{R - R_0}{R}$$

la *contrazione radiale unitaria*. — Poichè, com'è ben noto [e come del resto scende immediatamente da (5) e (7), trascurando le quantità d'ordine superiore al primo in ϵ] $\delta_0 = 3\epsilon$, dalla (6) si trae

$$(8) \quad \epsilon = \frac{1}{3} \delta_0 = \frac{1 - 2 \sigma}{E} p_0.$$

¹⁾ Cfr. ad es. Cesaro. « Introduzione alla teoria matematica della elasticità »- [Torino; fratelli Bocca; 1894; pag. 47 oppure pag. 69]. — È da notarsi che ivi sono assunte come costanti elastiche le quantità A e B legate alle nostre E e σ delle relazioni $A = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} E$, $B = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$.

Resta così caratterizzata in modo completo la *deformazione statica* della sfera.

§ 3.

Deformazione dinamica.

Immaginiamo ora la sfera in moto rettilineo uniforme. — Allora, come si è già notato [§ 1], essa è sottoposta sulla sua superficie τ ad un complesso di pressioni normali

$$p_{\tau} = p_0 - \frac{9}{8} \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) V^2,$$

che sono staticamente equivalenti a zero, ma non uniformemente distribuite.

A causa di queste pressioni la sfera subisce una deformazione, che mi propongo di caratterizzare. — In modo preciso, si noti che la espressione di p_{τ} si presenta come somma di due termini: uno è p_0 al quale corrisponde la *deformazione statica*, di cui ci siamo occupati nel § precedente, e l'altro è $-\frac{9}{8} \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) V^2$, che dipende essenzialmente dalle condizioni dinamiche.

La azione *dinamica* esercitata dal liquido sugli elementi di τ è rappresentata da

$$(9) \quad p_{\tau} - p_0 = -\frac{9}{8} \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right) V^2.$$

Si tratta, come si vede, di una distribuzione di *tensioni* normali: nulle a *prora* e a *poppa* ($z = +R$, $z = -R$) e che vanno aumentando, in valore assoluto, fino ad un massimo di $\frac{9}{8} V^2$, che viene raggiunto all'equatore ($z = 0$). — La corrispondente deformazione della sfera sarà a dirsi *deformazione dinamica*.

SPOSTAMENTI. — Assumiamo un sistema di coordinate cilindriche r , θ , z , essendo Oz l'asse comune ai cilindri $r = \text{costante}$. — Sieno u , $r v$, w le componenti, secondo le tan-

genti alle rispettive linee coordinate, dello spostamento del generico punto $P(r, \theta, z)$.

Per quanto si è visto la sfera è sottoposta sopra la superficie τ alle tensioni normali (9). — Dette $-F_1, -r F_2, -F_3$ le componenti di queste tensioni, si ha sopra τ

$$(10) \quad F_1 = \frac{9}{8} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) V^2 \frac{r}{R}, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = \frac{9}{8} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) V^2 \frac{z}{R};$$

ovvero, posto

$$(11) \quad \frac{z}{\rho} = \gamma, \quad \text{dove } \rho = \sqrt{r^2 + z^2},$$

e introducendo i polinomi di *Legendre* relativi al parametro γ ,

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \gamma, \quad P_2 = \frac{3\gamma^2 - 1}{2} \dots,$$

$$(12) \quad F_1 = \frac{3}{4} (1 - P_2) V^2 \frac{r}{R}, \quad F_2 = 0,$$

$$F_3 = \frac{3}{4} (1 - P_2) V^2 \frac{z}{R}, \quad \text{per } \rho = R.$$

In tali condizioni la teoria generale dell'equilibrio di una sfera elastica isotropa, sottoposta a date tensioni in superficie, porge per le componenti degli spostamenti le seguenti espressioni ¹⁾

$$(13) \quad u = (a\rho^2 + b + c\rho^2 P_2)r, \quad v = 0, \quad w = (a_1\rho^2 + b_1 + c\rho^2 P_2)z,$$

dove

$$(14) \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{3(1+\sigma)(4\sigma-7)V^2}{8(7+5\sigma)ER^2}, & b = \frac{9(7-3\sigma-6\sigma^2)V^2}{8(7+5\sigma)E} \\ b_1 + \frac{-9\sigma(3+2\sigma)V^2}{2(7+5\sigma)E}, & c = -\frac{3(1+\sigma)(7-10\sigma)V^2}{4(7+5\sigma)ER^2}, \end{cases}$$

¹⁾ Cfr. Love. « A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity » [Cambridge; University Press; 1906, art. 177], cfr. anche Lauricella « Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per date tensioni in superficie ». [Nuovo Cimento. Volume V; gennaio 1903].

essendo E e σ le solite costanti elastiche che abbiamo già avuto occasione di introdurre [cfr. § 2].

Come si vede le (13) non definiscono una deformazione *omogenea*; si presenta però la notevole circostanza che anche nel caso presente, la sfera si deforma in un ellissoide. Ciò si deve al fatto che i coefficienti di P_2 in $\frac{u}{r}$ e $\frac{w}{z}$ sono eguali.

ELLIPSOIDE DI DEFORMAZIONE DINAMICA. — Poichè, come risulta dalle (13), in tutte le sezioni meridiane si ha lo stesso comportamento, corrispondendosi i punti di un medesimo parallelo, basterà aver riguardo alla deformazione che avviene in un generico meridiano, ad esempio nel piano meridiano iniziale $\theta = 0$.

Posto allora

$$(15) \quad r = \rho \cos \psi, \quad z = \rho \sin \psi,$$

le componenti u , w , degli spostamenti dei punti di questo piano sono, per le (13),

$$(13) \quad u = \rho(a\rho^2 + b + c\rho^2 P_2) \cos \psi, \quad w = \rho(a_1\rho^2 + b_1 + c\rho^2 P_2) \sin \psi.$$

In particolare, a causa della deformazione, i punti appartenenti inizialmente al contorno $\rho = R$, si porteranno ad una distanza ρ dal centro O definita dalla relazione

$$\begin{aligned} \rho^2 = (R \cos \psi + u)^2 + (R \sin \psi + w)^2 = R^2 \left\{ \left(\cos \psi + \frac{u}{R} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sin \psi + \frac{w}{R} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

ovvero, poichè sono da trascurarsi i termini di grado superiore al primo in $\frac{u}{R}$ e $\frac{w}{R}$,

$$\rho^2 = R^2 \left(1 + 2 \frac{u}{R} \cos \psi + 2 \frac{w}{R} \sin \psi \right).$$

Da questa elevando ambo i membri alla potenza -1 si ha, colla solita approssimazione,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - 2 \frac{u}{R} \cos \psi - 2 \frac{w}{R} \sin \psi \right),$$

dove, per le (13)

$$\frac{u}{R} = (aR^2 + b + cR^2P_2)\cos\psi, \quad \frac{w}{R} = (a_1R^2 + b_1 + cR^2P_2)\sin\psi;$$

avremo quindi, sostituendo nella precedente e notando che $\gamma = \sin\psi$ e quindi $P_2 = \frac{3\sin^2\psi - 1}{2}$ e che $a_1 = -2a$,

$$(16) \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2} \{ [1 - (2a - c)R^2 - 2b]\cos^2\psi + \\ + [1 + 2(2a - c)R^2 - 2b_1]\sin^2\psi \};$$

questa è l'equazione della sezione meridiana della sfera deformata.

La (16) è l'equazione di una ellisse i cui semiassi A e B sono rispettivamente

$$A = R \{ 1 - (2a - c)R^2 - 2b \}^{-\frac{1}{2}} = R \{ 1 + \frac{1}{2}(2a - c)R^2 + b \},$$

$$B = R \{ 1 + 2(2a - c)R^2 - 2b_1 \}^{-\frac{1}{2}} = R \{ 1 - (2a - c)R^2 + b_1 \},$$

ovvero sostituendo ad a , b , b_1 , c le loro espressioni (14),

$$(17) \quad \begin{cases} A = R \left\{ 1 + \frac{9(7 - 5\sigma - 8\sigma^2)V^2}{8(7 + 5\sigma)E} \right\}, \\ B = R \left\{ 1 - \frac{9\sigma(2 + \sigma)V^2}{2(7 + 5\sigma)E} \right\}. \end{cases}$$

La sfera si deforma adunque in un ellissoide rotondo schiacciato nel senso del moto.

SCHIACCIAMENTO. — Lo schiacciamento $s = \frac{A - B}{A}$ ha per espressione

$$(18) \quad s = \frac{9(1 + \sigma)(7 - 4\sigma)V^2}{8(7 + 5\sigma)E + 9(7 - 5\sigma - 8\sigma^2)V^2}.$$

VARIAZIONI UNITARIE DEI RAGGI EQUATORIALE E POLARE.
— L'allungamento ϵ_e subito dal raggio equatoriale, riferito

all' unità di lunghezza, cioè il rapporto $\frac{A - R}{R}$, ha per espressione

$$(19) \quad \varepsilon_e = \frac{9 (7 - 5 \sigma - 8 \sigma^2) V^2}{8 (7 + 5 \sigma) E};$$

invece l' accorciamento unitario $\varepsilon_p = \frac{R - B}{R}$, del raggio polare è

$$(20) \quad \varepsilon_p = \frac{9 \sigma (2 + \sigma) V^2}{2 (7 + 5 \sigma) E}.$$

Le variazioni, riferite all' unità di lunghezza, del raggio equatoriale e del raggio polare sono entrambe proporzionali al quadrato della velocità della sfera.

VARIAZIONE DI VOLUME. — Il volume dell' ellissoide di deformazione, tenuto conto delle quantità di primo ordine soltanto, è

$$\frac{4}{3} \pi A^2 B = \frac{4}{3} \pi R^3 \left\{ 1 + \frac{9 (1 - 2 \sigma) V^2}{4 E} \right\}.$$

Chiamando δ l' aumento unitario di volume, cioè il rapporto $\frac{A^2 B - R^3}{R^3}$, si ha

$$(21) \quad \delta = \frac{9 (1 - 2 \sigma) V^2}{4 E}.$$

Anche la dilatazione unitaria di volume è proporzionale al quadrato della velocità della sfera.
