

# SULLE FORMOLE PER LA COMPOSIZIONE DI PIÙ MOVIMENTI FINITI.

Memoria del Dr. **Mattia Puglisi**, in Cefalù.

---

Adunanza del 24 giugno 1900.

---

Il Prof. R. Marcolongo nella sua Memoria \*) « *Formole per la composizione di più movimenti finiti* », ha enunciati alcuni teoremi e date le formole generali per la composizione di più rotazioni intorno ad assi concorrenti o no, e per la composizione di più moti elicoidali. Sebbene sia di volo accennato al metodo che ha servito alla ricerca, le dimostrazioni in generale mancano. E poichè la dimostrazione di alcune formole non è agevole, così in questa Nota mi propongo studiare in modo particolare il lavoro del Marcolongo, dando le dimostrazioni dei varii teoremi e delle formole, ecc.

Per agevolare la lettura del presente lavoro, riporto per intero le « *Notazioni* » che il Marcolongo premette nella sua Memoria, cercando di dare la formola generale di qualche notazione.

## Notazioni.

Ogni retta uscente dall'origine degli assi (raggio) è individuata dai tre coseni degli angoli che essa forma cogli assi; ogni altra retta (asse) è individuata da sei coordinate omogenee e cioè dai suoi coseni direttori ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) e dai suoi tre momenti ( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ) rispetto agli assi coordinati, definiti dalle:

$$\lambda = \gamma y - \beta z, \quad \mu = \alpha z - \gamma x, \quad \nu = \beta x - \alpha y,$$

---

\*) Annali di Matematica pura ed applicata, t. XXVI (1897).

dove  $x, y, z$  sono le coordinate di un punto qualunque dell'asse; tra le coordinate omogenee hanno luogo le due relazioni:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Dati  $n$  assi (raggi) distinti, che indicheremo coi simboli  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , accenniamo con

$$(k_r, k_s), \quad [k_r, k_s] \quad (r < s),$$

rispettivamente: il coseno dell'angolo formato dai due assi  $k_r$  e  $k_s$ , ed il sestuplo volume del tetraedro che ha per spigoli opposti due segmenti eguali ad uno sui due assi, cioè il momento dei due assi; per modo che:

$$(k_r, k_s) = \cos(k_r, k_s) = \alpha_r \alpha_s + \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s,$$

$$[k_r, k_s] = \alpha_r \lambda_s + \beta_r \mu_s + \gamma_r \nu_s + \alpha_s \lambda_r + \beta_s \mu_r + \gamma_s \nu_r.$$

Poniamo ancora per compendio:

$$(k_i, k_r, k_s) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix};$$

$$[k_i, k_r, k_s] = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \lambda_r & \mu_r & \nu_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \lambda_s & \mu_s & \nu_s \end{vmatrix} \quad (i < r < s)$$

Com'è noto, il determinante  $(k_i, k_r, k_s)$  dicesi seno dell'angolo triedro formato da tre raggi i cui coseni sono  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , ecc., oppure seno dell'angolo di tre assi rispettivamente paralleli ai raggi considerati in quel determinato ordine.

Ciò posto consideriamo  $2r$  assi (raggi) e con i coseni dei loro angoli due a due formiamo i prodotti  $r$  ad  $r$  in modo che in uno stesso prodotto non sia ripetuto un medesimo numero; assumiamo quindi un tal prodotto positivo o negativo secondo che la successione dei numeri presenta un numero pari o dispari di inversioni.

La somma algebrica dei prodotti così ottenuti sarà indicata con:

$$(k_1, k_2, \dots, k_{2r}).$$

Essa conterrà  $1.2.3. \dots (2r - 1)$  termini e il numero dei termini positivi supera di uno quello dei negativi.

Accenneremo invece con

$$[k_1, k_2, \dots, k_{2r}],$$

la somma algebrica dei prodotti formati con  $r - 1$  coseni e con uno dei tetraedri  $[k_r k_i]$ , seguendo le stesse norme di prima. Per esempio abbiamo :

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4) &= \cos(1\ 2)\cos(3\ 4) - \cos(1\ 3)\cos(2\ 4) + \cos(1\ 4)\cos(2\ 3), \\ [1\ 2\ 3\ 4] &= \cos(1\ 2)[3\ 4] - \cos(1\ 3)[2\ 4] + \cos(1\ 4)[2\ 3] \\ &\quad + \cos(2\ 3)[1\ 4] - \cos(2\ 4)[1\ 3] + \cos(3\ 4)[1\ 2],\end{aligned}$$

e poi in generale :

$$(1\ 2\ 3 \dots 2r) = \sum (1\ 2)(3\ 4 \dots 2r); \quad [1\ 2 \dots 2r] = \sum (1\ 2)[3\ 4 \dots 2r].$$

Consideriamo  $2r + 1$  assi e, colle stesse norme, formiamo i prodotti  $r$  ad  $r$  con  $r - 1$  coseni degli assi due a due e con uno dei seni degli assi tre a tre. La somma algebrica dei prodotti così ottenuta sarà indicata con

$$(k_1 k_2 \dots k_{2r+1}),$$

e conterrà  $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r + 1) \frac{r}{3}$  termini.

Finalmente accenneremo con

$$[k_1 k_2 \dots k_{2r+1}]$$

la somma algebrica dei prodotti formati con  $r - 1$  coseni e con una delle espressioni  $[k_i k_r k_i]$ ; con  $r - 2$  coseni, uno dei tetraedri  $[k_i k_r]$  ed uno dei seni di tre degli assi, tenendo sempre ferme le stesse convenzioni riguardo ai numeri che figurano nel prodotto e riguardo ai segni dei singoli prodotti.

Così è per esempio :

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4\ 5) &= \sin(1\ 2\ 3)\cos(4\ 5) - \sin(1\ 2\ 4)\cos(3\ 5) + \sin(1\ 2\ 5)\cos(3\ 4) \\ &\quad + \sin(1\ 3\ 4)\cos(2\ 5) - \sin(1\ 3\ 5)\cos(2\ 4) - \sin(2\ 3\ 4)\cos(1\ 5) \\ &\quad + \sin(2\ 3\ 5)\cos(1\ 4) - \sin(2\ 4\ 5)\cos(1\ 3) + \sin(3\ 4\ 5)\cos(1\ 2) \\ &\quad + \sin(1\ 4\ 5)\cos(2\ 3) = \sum (1\ 2\ 3)(4\ 5), \\ [1\ 2\ 3\ 4\ 5] &= \cos(1\ 2)[3\ 4\ 5] - \cos(1\ 3)[2\ 4\ 5] + \dots + [1\ 2](3\ 4\ 5) - \dots \\ &= \sum \cos(1\ 2)[3\ 4\ 5] + \sum [1\ 2](3\ 4\ 5);\end{aligned}$$

e poi in generale :

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4 \dots 2r + 1) &= \sum (1\ 2\ 3)(4 \dots 2r + 1); \\ [1\ 2\ 3\ 4 \dots 2r + 1] &= \sum (1\ 2)[3\ 4 \dots 2r + 1].\end{aligned}$$

### Alcune formole.

Poniamo :

$$a(n) = \alpha_n, \quad b(n) = \beta_n, \quad c(n) = \gamma_n; \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

e poi in generale :

$$\begin{aligned} a(123 \dots 2r-1) &= \alpha_1(23 \dots 2r-1) - \alpha_2(13 \dots 2r-1) + \dots \\ &\quad + \alpha_{2r-1}(12 \dots 2r-2) = \sum \alpha_i(23 \dots 2r-1), \\ a(123 \dots 2r) &= \beta_1 c(23 \dots 2r) - \beta_2 c(13 \dots 2r) + \dots \\ &\quad - \beta_{2r} c(12 \dots 2r-1) = \sum (\beta_i \gamma_2 - \beta_2 \gamma_i)(34 \dots 2r), \end{aligned}$$

e due espressioni analoghe ottenute da queste con permutazioni circolari. È palese la regola con la quale si succedono i segni.

Di guisa che :

$$\begin{aligned} a(12) &= \beta_1 c(2) - \beta_2 c(1) = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1; \\ a(123) &= \alpha_1(23) - \alpha_2(13) + \alpha_3(12) = \sum \alpha_i(23); \\ a(1234) &= \beta_1 c(234) - \beta_2 c(134) + \beta_3 c(124) - \beta_4 c(123), \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} a(1234) &= \beta_1 \{ \gamma_2(34) - \gamma_3(24) + \gamma_4(23) \} - \beta_2 \{ \gamma_1(34) - \gamma_3(14) + \gamma_4(13) \} \\ &\quad + \beta_3 \{ \gamma_1(24) - \gamma_2(14) + \gamma_4(12) \} - \beta_4 \{ \gamma_1(23) - \gamma_2(13) + \gamma_3(12) \}; \end{aligned}$$

ovvero finalmente :

$$a(1234) = \sum (\beta_i \gamma_2 - \beta_2 \gamma_i)(34);$$

e così via per  $a(12345)$ ,  $a(123456)$ , ecc.

Fra queste quantità e le altre definite nel paragrafo precedente, hanno luogo alcune relazioni; noteremo le seguenti :

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} a(12 \dots k) + \beta_{n+1} b(12 \dots k) + \gamma_{n+1} c(12 \dots k) = (12 \dots k, n+1) \\ \alpha_{n+1} (12 \dots 2r) + \beta_{n+1} c(12 \dots 2r) - \gamma_{n+1} b(12 \dots 2r) = a(12 \dots 2r, n+1) \\ \alpha_{n+1} (12 \dots 2r+1) + \gamma_{n+1} b(12 \dots 2r+1) - \beta_{n+1} c(12 \dots 2r+1) \\ \quad = a(12 \dots 2r+1, n+1). \end{cases}$$

Queste relazioni sono date dal Marcolongo senza le relative dimostrazioni.

Per dimostrare la prima formola incominciamo a considerare il caso di  $k$  pari. Indicando per brevità il primo membro di essa con  $\varphi$ , per le

notazioni precedenti, si ha :

$$\varphi = \alpha_{n+1} \sum (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (34 \dots k) + \beta_{n+1} \sum (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) (34 \dots k) \\ + \gamma_{n+1} \sum (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (34 \dots k);$$

ossia \*)

$$\varphi = \sum' \{ (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \alpha_{n+1} + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) \beta_{n+1} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \gamma_{n+1} \} (34 \dots k);$$

ovvero

$$\varphi = \sum' (12, n+1) (34 \dots k).$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla \*\*)

$$\sum' (123) (45 \dots k, n+1),$$

ed osservando che

$$\sum' (12, n+1) (34 \dots k) + \sum' (123) (45 \dots k, n+1) \\ = \sum (123) (45 \dots k, n+1),$$

si ha :

$$\varphi = \sum (123) (45 \dots k, n+1);$$

ossia finalmente per le notazioni premesse avanti :

$$\varphi = (12 \dots k, n+1).$$

Per  $k$  dispari avremo :

$$\varphi = \alpha_{n+1} \sum \alpha_i (23 \dots k) + \beta_{n+1} \sum \beta_i (23 \dots k) + \gamma_{n+1} \sum \gamma_i (23 \dots k);$$

ovvero :

$$\varphi = \sum' (\alpha_1 \alpha_{n+1} + \beta_1 \beta_{n+1} + \gamma_1 \gamma_{n+1}) (23 \dots k) = \sum' (1, n+1) (23 \dots k);$$

e finalmente per le solite notazioni :

$$\varphi = (12 \dots k, n+1).$$

\*) Con il  $\sum'$  intendiamo indicare, una volta per sempre, che la sommatoria non deve estendersi all'elemento con indice  $n+1$ , ovvero all'elemento  $n+1$ .

\*\*) Che la  $\sum' (123) (45 \dots 2r, n+1)$  sia nulla lo proveremo facendo vedere che se essa è nulla per  $2r$  lo sarà per  $2r+2$ . Infatti :

$$\sum' (123) (45 \dots 2r+2, n+1) = (2r+1, 2r+2) \sum' (123) (45 \dots 2r, n+1) \\ - (2r, 2r+2) \sum' (123) (45 \dots 2r-1, 2r+1, n+1) + \dots \\ + (12) \sum' (345) (67 \dots 2r+2, n+1).$$

Ciascuna delle sommatorie del secondo membro, per ipotesi, essendo nulla, lo sarà anche il primo membro.

Si verifica poi facilmente che  $\sum' (123) (4, n+1) = 0$ .

E così la prima formola rimane completamente dimostrata.

Dimostriamo adesso la seconda formola :

$$\alpha_{n+1}(1\ 2 \dots 2r) + \beta_{n+1}c(1\ 2 \dots 2r) - \gamma_{n+1}b(1\ 2 \dots 2r) \\ = a(1\ 2 \dots 2r, n+1).$$

Indicando al solito il primo membro con  $\varphi$  avremo :

$$\varphi = \alpha_{n+1}(1\ 2 \dots 2r) + \beta_{n+1} \sum (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)(3\ 4 \dots 2r) \\ - \gamma_{n+1} \sum (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)(3\ 4 \dots 2r);$$

aggiungendo e togliendo al secondo membro la quantità  $\alpha_{n+1} \sum_1^{2r} \alpha_i \alpha_2$ ,  
si ha :

$$\varphi = \alpha_{n+1}(1\ 2\ 3 \dots 2r) \\ + \sum' \{ \alpha_1(\alpha_2 \alpha_{n+1} + \beta_2 \beta_{n+1} + \gamma_2 \gamma_{n+1}) - \alpha_2(\alpha_1 \alpha_{n+1} + \beta_1 \beta_{n+1} + \gamma_1 \gamma_{n+1}) \} (3\ 4 \dots 2r);$$

ovvero :

$$\varphi = \alpha_{n+1}(1\ 2\ 3 \dots 2r) + \sum' \{ \alpha_1(2, n+1) - \alpha_2(1, n+1) \} (3\ 4 \dots 2r);$$

ossia :

$$\varphi = \alpha_{n+1}(1\ 2 \dots 2r) + \sum' \{ \alpha_1(2\ 3 \dots 2r, n+1) - \alpha_2(1\ 3 \dots 2r, n+1) \}$$

e finalmente :

$$\varphi = a(1\ 2 \dots 2r, n+1).$$

Passiamo alla terza formola :

$$\alpha_{n+1}(1\ 2 \dots 2r+1) + \gamma_{n+1}b(1\ 2 \dots 2r+1) \\ - \beta_{n+1}c(1\ 2 \dots 2r+1) = a(1\ 2 \dots 2r+1, n+1).$$

Indicando, anche qui, il primo membro con  $\varphi$  avremo :

$$\varphi = \alpha_{n+1} \sum (1\ 2\ 3)(4\ 5 \dots 2r+1) + \gamma_{n+1} \sum \beta_1(2\ 3 \dots 2r+1) \\ - \beta_{n+1} \sum \gamma_1(2\ 3 \dots 2r+1);$$

ovvero :

$$\varphi = \sum' \alpha_{n+1} \{ \alpha_1(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \alpha_2(\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + \alpha_3(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \} (4\ 5 \dots 2r+1) \\ + \sum' (\beta_1 \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} \gamma_1)(2\ 3 \dots 2r+1).$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla seguente :

$$\sum' \beta_{n+1} \{ \beta_1(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \beta_2(\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + \beta_3(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \} (4\ 5 \dots 2r+1) \\ + \sum' \gamma_{n+1} \{ \gamma_1(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \gamma_2(\beta_3 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_3) + \gamma_3(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) \} (4\ 5 \dots 2r+1),$$

si ha :

$$\varphi = \sum' (\beta_1 \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} \gamma_1) (23 \dots 2r + 1) \\ + \sum' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (3, n + 1) (45 \dots 2r + 1);$$

ovvero :

$$\varphi = \sum' (\beta_1 \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} \gamma_1) (23 \dots 2r + 1) \\ + \sum' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (34 \dots 2r + 1, n + 1);$$

ossia :

$$\varphi = \sum (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (34 \dots 2r + 1, n + 1);$$

e finalmente :

$$\varphi = a(123 \dots 2r + 1, n + 1).$$

Rimane così dimostrata anche la terza formola.

Poniamo inoltre :

$$a[n] = \lambda_n, \quad b[n] = \mu_n, \quad c[n] = \nu_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

e poi in generale :

$$a[12 \dots 2r - 1] = \alpha_1[23 \dots 2r - 1] - \alpha_2[13 \dots 2r - 1] + \\ \dots + \alpha_{2r-1}(12 \dots 2r - 2) + \lambda_1[23 \dots 2r - 1] \\ - \lambda_2[13 \dots 2r - 1] + \dots + \lambda_{2r-1}[12 \dots 2r - 2],$$

e due espressioni analoghe per  $b[123 \dots 2r - 1]$  e  $c[123 \dots 2r - 1]$  formate rispettivamente colle  $\beta$  e  $\mu$  e colle  $\gamma$  e  $\nu$ . Pongasi ancora :

$$a[123 \dots 2r] = \beta_1 c[23 \dots 2r] - \beta_2 c[13 \dots 2r] + \\ \dots - \beta_{2r} c[123 \dots 2r - 1] - \{\gamma_1 b[23 \dots 2r] - \gamma_2 b[13 \dots 2r] + \\ \dots - \gamma_{2r} b[123 \dots 2r - 1]\},$$

e due espressioni analoghe per  $b[12 \dots 2r]$  e  $c[123 \dots 2r]$ , coll'avvertenza di prendere metà dei termini in  $\beta, \gamma$ , che compariscono raddoppiati nel secondo membro di questa ultima relazione, quando in essa alle espressioni  $c[23 \dots 2r]$ ,  $b[23 \dots 2r]$  e simili si sostituiscono i valori dati dall'alt'a notazione. Con questa avvertenza le notazioni precedenti possono scriversi più brevemente :

$$a[123 \dots 2r - 1] = \sum \alpha_i[23 \dots 2r - 1] + \sum \lambda_i(23 \dots 2r - 1), \\ a[123 \dots 2r] = \sum (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[34 \dots 2r] \\ + \sum (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(34 \dots 2r) - \sum (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(34 \dots 2r).$$

Di guisa che :

$$\begin{aligned}
a[12] &= \beta_1 c[2] - \beta_2 c[1] - \{\gamma_1 b[2] - \gamma_2 b[1]\} \\
&= \{\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1\} - \{\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1\}, \\
a[123] &= \sum \alpha_i [23] + \sum \lambda_i (23), \\
a[1234] &= \beta_1 c[234] - \beta_2 c[134] + \beta_3 c[124] - \beta_4 c[123] \\
&\quad - \{\gamma_1 b[234] - \gamma_2 b[134] + \gamma_3 b[124] - \gamma_4 b[123]\},
\end{aligned}$$

dove sostituendo alle espressioni  $c[234]$ ,  $b[234]$  e simili i loro valori, e tenendo presente l'avvertenza fatta avanti, otteniamo facilmente:

$$\begin{aligned}
a[1234] &= \sum (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) [34] + \sum (\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) (34) \\
&\quad - \sum (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) (34);
\end{aligned}$$

e così via per  $a[12345]$ ,  $a[123456]$ .

Posto ciò, hanno luogo le seguenti relazioni:

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} &a[12 \dots r] \alpha_{n+1} + b[12 \dots r] \beta_{n+1} + c[12 \dots r] \gamma_{n+1} \\ &+ a(12 \dots r) \lambda_{n+1} + b(12 \dots r) \mu_{n+1} + c(12 \dots r) v_{n+1} \\ &= [123 \dots r, n+1], \end{aligned} \right.$$

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} &[123 \dots 2r-1] \alpha_{n+1} + b[123 \dots 2r-1] \gamma_{n+1} \\ &- c[123 \dots 2r-1] \beta_{n+1} + (123 \dots 2r-1) \lambda_{n+1} \\ &+ b(123 \dots 2r-1) v_{n+1} - c(123 \dots 2r-1) \mu_{n+1} \\ &= a[12 \dots 2r-1, n+1], \end{aligned} \right.$$

ed inoltre:

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} &[123 \dots 2r] \alpha_{n+1} + c[123 \dots 2r] \beta_{n+1} - b[123 \dots 2r] \gamma_{n+1} \\ &+ (123 \dots 2r) \lambda_{n+1} + c(123 \dots 2r) \mu_{n+1} - b(123 \dots 2r) v_{n+1} \\ &= a[123 \dots 2r, n+1]. \end{aligned} \right.$$

Per la dimostrazione della (II), indicando con  $\varphi$  il primo membro di essa, nel caso di  $r$  dispari si ha:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \alpha_{n+1} \sum \alpha_i [23 \dots r] + \alpha_{n+1} \sum \lambda_i (23 \dots r) + \beta_{n+1} \sum \beta_i [23 \dots r] \\
&\quad + \beta_{n+1} \sum \mu_i (23 \dots r) + \gamma_{n+1} \sum \gamma_i [23 \dots r] + \gamma_{n+1} \sum v_i (23 \dots r) \\
&\quad + \lambda_{n+1} \sum \alpha_i (23 \dots r) + \mu_{n+1} \sum \beta_i (23 \dots r) + v_{n+1} \sum v_i (23 \dots r),
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sum' (\alpha_i \alpha_{n+1} + \beta_i \beta_{n+1} + \gamma_i \gamma_{n+1}) [23 \dots r] \\
&\quad + \sum' (\alpha_{n+1} \lambda_i + \beta_{n+1} \mu_i + \gamma_{n+1} v_i + \lambda_{n+1} \alpha_i + \mu_{n+1} \beta_i + v_{n+1} \gamma_i) (23 \dots r),
\end{aligned}$$

ovvero:



$$\varphi = \sum' (I, n+1) [2\ 3 \dots r] + \sum' [I, n+1] (2\ 3 \dots r),$$

e finalmente :

$$\varphi = [I\ 2\ 3 \dots r, n+1].$$

Per  $r$  pari si ha :

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha_{n+1} \sum (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) [3\ 4 \dots r] + \alpha_{n+1} \sum (\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) (3\ 4 \dots r) \\ & - \alpha_{n+1} \sum (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) (3\ 4 \dots r) + \beta_{n+1} \sum (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) [3\ 4 \dots r] \\ & + \beta_{n+1} \sum (\gamma_1 \lambda_2 - \gamma_2 \lambda_1) (3\ 4 \dots r) - \beta_{n+1} \sum (\alpha_1 v_2 - \alpha_2 v_1) (3\ 4 \dots r) \\ & + \gamma_{n+1} \sum (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [3\ 4 \dots r] + \gamma_{n+1} \sum (\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1) (3\ 4 \dots r) \\ & - \gamma_{n+1} \sum (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) (3\ 4 \dots r) + \lambda_{n+1} \sum (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (3\ 4 \dots r) \\ & + \mu_{n+1} \sum (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) (3\ 4 \dots r) + v_{n+1} \sum (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (3\ 4 \dots r), \end{aligned}$$

ossia :

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum' \{ \alpha_{n+1} (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + \beta_{n+1} (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) + \gamma_{n+1} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \} [3\ 4 \dots r] \\ & + \sum' \{ \alpha_{n+1} (\beta_1 v_2 - \gamma_1 \mu_2) + \beta_{n+1} (\gamma_1 \lambda_2 - \alpha_1 v_2) + \gamma_{n+1} (\alpha_1 \mu_2 - \beta_1 \lambda_2) \\ & + \alpha_{n+1} (\gamma_2 \mu_1 - \beta_2 v_1) + \beta_{n+1} (\alpha_2 v_1 - \gamma_2 \lambda_1) + \gamma_{n+1} (\beta_2 \lambda_1 - \alpha_2 \mu_1) \\ & + \lambda_{n+1} (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + \mu_{n+1} (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) + v_{n+1} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \} (3\ 4 \dots r), \end{aligned}$$

ovvero ancora :

$$\varphi = \sum' (I\ 2, n+1) [3\ 4 \dots r] + \sum' [I\ 2, n+1] (3\ 4 \dots r).$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla \*)

$$\sum' (I\ 2\ 3) [4 \dots r, n+1] + \sum' [I\ 2\ 3] (4 \dots r, n+1),$$

\*) Che la  $\sum' (I\ 2\ 3) [4 \dots r, n+1] + \sum' [I\ 2\ 3] (4 \dots r, n+1)$ , nel caso di  $r$  pari sia nulla, lo proveremo facendo vedere che se essa è nulla per  $r$ , lo sarà anche per  $r+2$ . Infatti

$$\begin{aligned} & \sum' (I\ 2\ 3) [4 \dots r+2, n+1] + \sum' [I\ 2\ 3] (4 \dots r+2, n+1) \\ = & (r+1, r+2) \left\{ \sum' (I\ 2\ 3) [4 \dots r, n+1] + \sum' [I\ 2\ 3] (4 \dots r, n+1) \right\} \\ & - (r, r+2) \left\{ \sum' (I\ 2\ 3) [4 \dots r-1, r+1, n+1] \right. \\ & + \sum' [I\ 2\ 3] (4 \dots r-1, r+1, n+1) \left. \right\} + \dots + (I\ 2) \left\{ \sum' (3\ 4\ 5) [6 \dots r+1, n+1] \right. \\ & \left. + \sum' [3\ 4\ 5] (6 \dots r+1, n+1) \right\}. \end{aligned}$$

Ciascuna delle quantità comprese fra le  $\{ \}$  essendo nulla, per ipotesi, lo sarà anche il primo membro.

Si verifica facilmente che

$$\sum' (I\ 2\ 3) [4, n+1] + \sum' [I\ 2\ 3] (4, n+1) = 0.$$

si ha:

$$\varphi = \sum' \{ (1 \ 2, n+1) [3 \dots r] + [1 \ 2, n+1] (3 \dots r) + (1 \ 2 \ 3) [4 \dots r, n+1] \\ + [1 \ 2 \ 3] (4 \dots r, n+1) \},$$

e finalmente

$$\varphi = [1 \ 2 \dots r, n+1].$$

Rimane così dimostrata la formola (II).

Passiamo adesso alla formola (III). Indicando anche qui il primo membro con  $\varphi$  si ha:

$$\begin{aligned} \varphi &= [1 \ 2 \dots 2r-1] \alpha_{n+1} + (1 \ 2 \dots 2r-1) \lambda_{n+1} \\ &+ \gamma_{n+1} \sum \beta_i [2 \ 3 \dots 2r-1] + \gamma_{n+1} \sum \mu_i (2 \ 3 \dots 2r-1) \\ &- \beta_{n+1} \sum \gamma_i [2 \ 3 \dots 2r-1] - \beta_{n+1} \sum \nu_i (2 \ 3 \dots 2r-1) \\ &+ \nu_{n+1} \sum \beta_i (2 \ 3 \dots 2r-1) - \mu_{n+1} \sum \gamma_i (2 \ 3 \dots 2r-1), \end{aligned}$$

ovvero:

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \sum' (\beta_i \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} \gamma_i) [2 \ 3 \dots 2r-1] \\ &+ \sum' (\beta_i \nu_{n+1} - \nu_i \beta_{n+1}) (2 \ 3 \dots 2r-1) \\ &- \sum' (\gamma_i \mu_{n+1} - \gamma_{n+1} \mu_i) (2 \ 3 \dots 2r-1) \\ &+ [1 \ 2 \dots 2r-1] \alpha_{n+1} + (1 \ 2 \dots 2r-1) \lambda_{n+1}. \end{aligned} \right.$$

Si ha intanto:

$$\begin{aligned} &\alpha_{n+1} [1 \ 2 \dots 2r-1] + \lambda_{n+1} (1 \ 2 \dots 2r-1) \\ &= \alpha_{n+1} \sum [1 \ 2 \ 3] (4 \ 5 \dots 2r-1) + \alpha_{n+1} \sum (1 \ 2 \ 3) [4 \ 5 \dots 2r-1] \\ &\quad + \lambda_{n+1} \sum (1 \ 2 \ 3) (4 \ 5 \dots 2r-1), \end{aligned}$$

ovvero indicando il primo membro con  $k$ :

$$\begin{aligned} k &= \sum' \{ \alpha_{n+1} [1 \ 2 \ 3] + \lambda_{n+1} (1 \ 2 \ 3) \} (4 \ 5 \dots 2r-1) \\ &\quad + \alpha_{n+1} \sum (1 \ 2 \ 3) [4 \ 5 \dots 2r-1], \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} k &= \sum' \left\{ \alpha_{n+1} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_{n+1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_{n+1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{n+1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right\} (4 \ 5 \dots 2r-1) + \sum' \alpha_{n+1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} [4 \ 5 \dots 2r-1]. \end{aligned}$$

Aggiungendo al secondo membro la quantità nulla seguente:

$$\begin{aligned}
 & \sum' \left\{ \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \mu_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \mu_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + \mu_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right\} (45 \dots 2r-1) \\
 & + \sum' \left\{ \gamma_{n+1} \begin{vmatrix} \nu_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_{n+1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \nu_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_{n+1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \nu_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \right. \\
 & \quad \left. + \nu_{n+1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right\} (45 \dots 2r-1) \\
 & + \sum' \beta_{n+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} [45 \dots 2r-1] + \sum' \gamma_{n+1} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} [45 \dots 2r-1],
 \end{aligned}$$

e sviluppando i determinanti e sommando convenientemente si ha facilmente:

$$\begin{aligned}
 k = & \sum' \{ \sum' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) [3, n+1] + \sum' (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) (3, n+1) \\
 & - \sum' (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) (3, n+1) \} (45 \dots 2r-1) \\
 & + \sum' \{ \sum' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (3, n+1) \} [45 \dots 2r-1],
 \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
 k = & \sum' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) [3, n+1] (45 \dots 2r-1) \\
 & + \sum' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (3, n+1) [45 \dots 2r-1] \\
 & + \sum' (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) (3, n+1) (45 \dots 2r-1) \\
 & - \sum' (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) (3, n+1) (45 \dots 2r-1).
 \end{aligned}$$

Essendo:

$$\begin{aligned}
 & [3, n+1] (45 \dots 2r-1) + (3, n+1) [45 \dots 2r-1] \\
 & = [34 \dots 2r-1, n+1],
 \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 k = & \sum' (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) [34 \dots 2r-1, n+1] \\
 & + \sum' (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) (34 \dots 2r-1, n+1) \\
 & - \sum' (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) (34 \dots 2r-1, n+1).
 \end{aligned}$$

Sostituendo questo valore di  $k$  nella (a) ed osservando che:

$$\begin{aligned} \sum'(\beta_1 \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} \gamma_1)[2 \ 3 \dots 2r-1] + \sum'(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[3 \ 4 \dots 2r-1, n+1] \\ = \sum(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[3 \ 4 \dots 2r-1, n+1], \\ \sum'(\beta_1 \nu_{n+1} - \nu_1 \beta_{n+1})(2 \ 3 \dots 2r-1) + \sum'(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(3 \ 4 \dots 2r-1, n+1) \\ = \sum(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(3 \ 4 \dots 2r-1, n+1), \\ \sum'(\gamma_1 \mu_{n+1} - \gamma_{n+1} \mu_1)(2 \ 3 \dots 2r-1) + \sum'(\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(3 \ 4 \dots 2r-1, n+1) \\ = \sum(\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(3 \ 4 \dots 2r-1, n+1), \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)[3 \ 4 \dots 2r-1, n+1] \\ + \sum(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1)(3 \ 4 \dots 2r-1, n+1) \\ - \sum(\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)(3 \ 4 \dots 2r-1, n+1), \end{aligned}$$

ossia finalmente:

$$\varphi = a[1 \ 2 \dots 2r-1, n+1].$$

Dimostriamo infine la formola (IV). Indicando al solito il primo membro con  $\varphi$  si ha:

$$\begin{aligned} \varphi = [1 \ 2 \dots 2r] \alpha_{n+1} + (1 \ 2 \dots 2r) \lambda_{n+1} + \beta_{n+1} \sum(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)[3 \ 4 \dots 2r] \\ + \beta_{n+1} \sum(\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1)(3 \ 4 \dots 2r) - \beta_{n+1} \sum(\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1)(3 \ 4 \dots 2r) \\ - \gamma_{n+1} \sum(\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)[3 \ 4 \dots 2r] - \gamma_{n+1} \sum(\gamma_1 \lambda_2 - \gamma_2 \lambda_1)(3 \ 4 \dots 2r) \\ + \gamma_{n+1} \sum(\alpha_1 \nu_2 - \alpha_2 \nu_1)(3 \ 4 \dots 2r) + \mu_{n+1} \sum(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)(3 \ 4 \dots 2r) \\ - \nu_{n+1} \sum(\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)(3 \ 4 \dots 2r). \end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro la quantità:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} \sum \alpha_1 \alpha_2 [3 \ 4 \dots 2r] + \alpha_{n+1} \sum \alpha_1 \lambda_2 (3 \ 4 \dots 2r) \\ + \alpha_{n+1} \sum \alpha_2 \lambda_1 (3 \ 4 \dots 2r) + \lambda_{n+1} \sum \alpha_1 \alpha_2 (3 \ 4 \dots 2r), \end{aligned}$$

e sommando convenientemente si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi = [1 \ 2 \dots 2r] \alpha_{n+1} + (1 \ 2 \dots 2r) \lambda_{n+1} \\ + \sum' \{ \alpha_1 (\beta_2 \beta_{n+1} + \gamma_2 \gamma_{n+1} + \alpha_2 \alpha_{n+1}) - \alpha_2 (\beta_1 \beta_{n+1} + \gamma_1 \gamma_{n+1} + \alpha_1 \alpha_{n+1}) \} [3 \ 4 \dots 2r] \\ + \sum' \{ \lambda_1 (\alpha_2 \alpha_{n+1} + \beta_2 \beta_{n+1} + \gamma_2 \gamma_{n+1}) - \lambda_2 (\alpha_1 \alpha_{n+1} + \beta_1 \beta_{n+1} + \gamma_1 \gamma_{n+1}) \} (3 \ 4 \dots 2r) \\ + \sum' \{ \alpha_1 (\alpha_2 \lambda_{n+1} + \beta_2 \mu_{n+1} + \gamma_2 \nu_{n+1} + \alpha_{n+1} \lambda_2 + \beta_{n+1} \mu_2 + \gamma_{n+1} \nu_2) \\ - \alpha_2 (\alpha_1 \lambda_{n+1} + \beta_1 \mu_{n+1} + \gamma_1 \nu_{n+1} + \alpha_{n+1} \lambda_1 + \beta_{n+1} \mu_1 + \gamma_{n+1} \nu_1) \} (3 \ 4 \dots 2r); \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}\varphi = & \alpha_{n+1} [1 \ 2 \dots 2r] + \sum' \{ \alpha_1(2, n+1) - \alpha_2(1, n+1) \} [3 \ 4 \dots 2r] \\ & + \sum' \{ \lambda_1(2, n+1) - \lambda_2(1, n+1) + \alpha_1[2, n+1] \\ & - \alpha_2[1, n+1] \} (3 \ 4 \dots 2r) + \lambda_{n+1}(1 \ 2 \dots 2r).\end{aligned}$$

Possiamo scrivere ancora :

$$\begin{aligned}\varphi = & \alpha_{n+1} [1 \ 2 \dots 2r] + \sum' \{ \alpha_1(2, n+1) [3 \ 4 \dots 2r] + \alpha_1[2, n+1] (3 \ 4 \dots 2r) \\ & - \alpha_2(1, n+1) [3 \ 4 \dots 2r] - \alpha_2[1, n+1] (3 \ 4 \dots 2r) \} \\ & + \sum' \{ \lambda_1(2, n+1) - \lambda_2(1, n+1) \} (3 \ 4 \dots 2r) + \lambda_{n+1}(1 \ 2 \dots 2r);\end{aligned}$$

ovvero :

$$\begin{aligned}\varphi = & \{ \alpha_{n+1} [1 \ 2 \dots 2r] + \sum' \alpha_1[2 \ 3 \dots 2r, n+1] \} \\ & + \{ \lambda_{n+1}(1 \ 2 \dots 2r) + \sum' \lambda_1(2 \ 3 \dots 2r, n+1) \};\end{aligned}$$

e finalmente :

$$\varphi = \sum \alpha_i [2 \ 3 \dots 2r, n+1] + \sum \lambda_i (2 \ 3 \dots 2r, n+1) = a(1 \ 2 \dots 2r, n+1).$$

### Composizione di più rotazioni finite intorno ad assi concorrenti.

Anche qui mi valgo delle notazioni del Marcolongo.

Due rotazioni eguali e dello stesso senso effettuate intorno ad assi paralleli si diranno equipollenti. Per esprimere che la rotazione  $2\omega$  è effettuata intorno ad un asse di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ , oppure intorno ad un raggio i cui coseni sono  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , scriveremo brevemente :

$$2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu) \quad \text{oppure} \quad 2\omega(\alpha, \beta, \gamma).$$

Parimente per indicare che un moto elicoidale di parametri  $2\tau, 2\omega$ , cioè tale che la traslazione è  $2\tau$  e la rotazione  $2\omega$ , è effettuato intorno ad un asse  $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \tau)$ , scriveremo :

$$2\tau, 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu);$$

e così ancora per indicare che la traslazione  $2\tau$  è effettuata in una direzione i cui coseni sono  $(a, b, c)$  scriveremo :

$$2\tau(a, b, c).$$

Consideriamo la rotazione  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ ; diciamo  $x, y, z$  le coordinate di un punto, distante di uno dall'origine, prima della rotazione e poniamo :

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - \zeta} = \frac{1 + \zeta}{x - iy}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

$$l = \alpha \operatorname{tang} \omega, \quad m = \beta \operatorname{tang} \omega, \quad n = \gamma \operatorname{tang} \omega;$$

$$l_r = \alpha_r \operatorname{tang} \omega_r, \quad m_r = \beta_r \operatorname{tang} \omega_r, \quad n_r = \gamma_r \operatorname{tang} \omega_r.$$

Dopo la rotazione  $x, y, \zeta$ ,  $\zeta$ , diventano rispettivamente  $x', y', \zeta', \zeta'$ ; è noto che:

$$(1) \quad \zeta' = \frac{(1 + in)\zeta + i(l + im)}{1 - in + i(l - im)\zeta}.$$

Siano ora da comporre  $n$  rotazioni

$$2 \omega_r (\alpha_r, \beta_r, \gamma_r) \quad (r = 1, 2, 3 \dots n)$$

e poniamo

$$\begin{aligned} \cos \omega_r &= c_r, & \sin \omega_r &= s_r; \\ a_r &= c_r + i\gamma_r s_r, & d_r &= c_r - i\gamma_r s_r; \\ b_r &= i(\alpha_r + i\beta_r)s_r, & e_r &= i(\alpha_r - i\beta_r)s_r. \end{aligned}$$

Diciamo infine  $A_n, B_n, D_n, E_n$ , le quantità analoghe relative alla rotazione  $2 \omega (\alpha, \beta, \gamma)$  risultante in quelle  $n$  date.

Per effetto della prima rotazione  $\zeta$  diventa  $\zeta'$  e per la (1):

$$\zeta' = \frac{(1 + in_1)\zeta + i(l_1 + im_1)}{1 - in_1 + i(l_1 - im_1)\zeta}$$

ossia, sostituendo i valori di  $l_1, m_1, n_1$  e tenendo presente le ultime notazioni:

$$\zeta' = \frac{a_1 \zeta + b_1}{d_1 + e_1 \zeta}.$$

Alla sua volta  $\zeta'$  per effetto della seconda rotazione  $2 \omega_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  diventa

$$\zeta'' = \frac{a_2 \zeta' + b_2}{d_2 + e_2 \zeta'} = \frac{(a_2 a_1 + b_2 e_1) \zeta + (b_2 d_1 + a_2 b_1)}{(d_2 d_1 + e_2 b_1) + (d_2 e_1 + e_2 a_1) \zeta}.$$

D'altra parte la  $\zeta$  per effetto della rotazione  $2 \omega (\alpha, \beta, \gamma)$ , risultante delle due rotazioni  $2 \omega_1, 2 \omega_2$ , darà:

$$\zeta_1 = \frac{A_2 \zeta + B_2}{D_2 + E_2 \zeta}.$$

Dovendosi avere  $\zeta'' = \zeta_1$ , si hanno le seguenti relazioni:

$$(a) \quad \begin{cases} a_2 a_1 + b_2 e_1 = A_2, & d_2 d_1 + e_2 b_1 = D_2, \\ a_2 b_1 + b_2 d_1 = B_2, & d_2 e_1 + e_2 a_1 = E_2, \end{cases}$$

dalle quali si ottiene subito :

$$(b) \quad \begin{vmatrix} A_2 & E_2 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

L'applicazione successiva della trasformazione (1) conduce facilmente alle seguenti formole :

$$(c) \quad \begin{cases} A_n = a_n A_{n-1} + b_n E_{n-1}, & D_n = d_n D_{n-1} + e_n B_{n-1}, \\ B_n = a_n B_{n-1} + b_n D_{n-1}, & E_n = d_n E_{n-1} + e_n A_{n-1}, \end{cases}$$

e quindi :

$$\begin{vmatrix} A_n & E_n \\ B_n & D_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_n & e_n \\ b_n & d_n \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\begin{vmatrix} a_{n+1} & e_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} \end{vmatrix}$ , tenendo presente la legge di formazione delle relazioni (c), si vede facilmente che la formola precedente, essendo vera per  $n$  rotazioni, lo è anche per  $n + 1$ .

Possiamo enunciare quindi il

« TEOREMA I. — Le quantità  $A_n, B_n, D_n, E_n$  dipendono dalle  $a_r, b_r, d_r, e_r$  in modo che

$$\begin{vmatrix} A_n & E_n \\ B_n & D_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_n & e_n \\ b_n & d_n \end{vmatrix},$$

« avvertendo di eseguire il prodotto del secondo membro nell'ordine stabilito, moltiplicando le linee del primo determinante per le colonne del secondo; poi le linee del determinante prodotto dei primi due, per le colonne del terzo e così di seguito ».

Consideriamo le formole (a) del teorema precedente.

Nella prima di esse,  $A_2 = a_2 a_1 + b_2 e_1$ , sostituendo ad  $A_2, a_2, a_1, b_2, e_1$  i loro valori avremo facilmente :

$$\begin{aligned} \cos \omega + i \gamma \sin \omega &= \{c_1 c_2 - s_1 s_2 (\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \alpha_2)\} \\ &+ i \{\gamma_1 s_1 c_2 + \gamma_2 c_1 s_2 - (\beta_2 \alpha_1 - \alpha_2 \beta_1) s_1 s_2\}, \end{aligned}$$

dalla quale :

$$\cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (12)$$

$$\gamma \sin \omega = \gamma_1 s_1 c_2 - \gamma_2 c_1 s_2 - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s_1 s_2.$$

Dalla seconda formola :

$$B_2 = a_2 b_1 + b_2 d_1,$$

sostituendo si ottiene :

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{sen} \omega + i \beta \operatorname{sen} \omega &= \alpha_1 c_2 s_1 - \beta_1 \gamma_2 s_1 s_2 + \alpha_2 c_1 s_2 + \beta_2 \gamma_1 s_1 s_2 \\ &+ i(\beta_1 c_2 s_1 + \gamma_2 \alpha_1 s_1 s_2 - \alpha_2 \gamma_1 s_1 s_2 + \beta_2 c_1 s_2), \end{aligned}$$

dalla quale :

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{sen} \omega &= c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2, \\ \beta \operatorname{sen} \omega &= c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 - (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2) s_1 s_2. \end{aligned}$$

Si ricaverebbero le medesime relazioni dalle altre due formole delle (a).

Si ha quindi il

« TEOREMA II. — A due rotazioni  $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  « si può sostituire una rotazione unica  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma)$  tale che :

$$\cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (12),$$

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 \mp (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2, \\ \beta \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 \mp (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) s_1 s_2, \\ \gamma \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \gamma_1 + c_1 s_2 \gamma_2 \mp (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s_1 s_2, \end{cases}$$

« in cui è da tenere il segno —, se le rotazioni sono effettuate nell'ordine 1, 2; il segno + se nell'ordine inverso ».

Dopo ciò dimostriamo il

« TEOREMA III. — A più rotazioni  $2\omega_r(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ , ( $r=1, 2, \dots, n$ ) « si può sostituire una rotazione unica  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ ; ed è :

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \omega = c_1 c_2 \dots c_n - \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n (12) \\ + \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n (1234) - \dots + \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n (123) \\ - \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_n (12345) + \dots \pm s_1 s_2 \dots s_n (12 \dots n), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha \operatorname{sen} \omega = \sum s_1 c_2 c_3 \dots c_n a(1) - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n a(123) + \dots \\ - \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n a(12) + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_n a(1234) - \dots \\ \pm s_1 s_2 \dots s_n a(12 \dots n), \end{cases}$$

« e due analoghe che si ottengono con permutazioni circolari. Nell'ultimo termine delle formole precedenti è da ritenersi il segno +, se  $n=4h$ , oppure  $4h+1$ ; il segno — negli altri casi. Le rotazioni si intendono effettuate nell'ordine 1, 2,  $\dots, n$  » \*).

\*) Coll'espressione abbreviata  $\sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n$  intendiamo la somma :

$s_1 s_2 c_3 \dots c_n (12) + s_1 s_3 c_4 \dots c_n (13) + \dots + s_{n-1} s_n c_1 c_2 \dots c_{n-2} (n-1, n)$ ,  
e così per tutte le altre.



Ammesse vere queste relazioni per  $n$  rotazioni col sussidio delle formole (2) e colle relazioni (I), dimostriamo adesso che esse sono vere per  $n + 1$ .

Infatti

$$\cos \omega' = c c_{n+1} - s s_{n+1} (\alpha \alpha_{n+1} + \beta \beta_{n+1} + \gamma \gamma_{n+1}).$$

Sostituendo a  $c$ ,  $s\alpha$ ,  $s\beta$ ,  $s\gamma$  i loro valori dati dalle (3), (4) e sommando convenientemente si ottiene:

$$\begin{aligned} \cos \omega' &= c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1} \\ &- \{ \sum' s_1 s_{n+1} c_2 \dots c_n (\alpha_1 \alpha_{n+1} + \beta_1 \beta_{n+1} + \gamma_1 \gamma_{n+1}) + \sum' s_1 s_2 c_3 \dots c_n c_{n+1} (1\ 2) \} + \dots \\ &+ \{ \sum' s_1 s_2 s_3 s_{n+1} c_4 \dots c_n [\alpha_{n+1} a(1\ 2\ 3) + \beta_{n+1} b(1\ 2\ 3) + \gamma_{n+1} c(1\ 2\ 3)] \\ &\quad + \sum' s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_n c_{n+1} (1\ 2\ 3\ 4) \} - \dots \\ &+ \{ \sum' s_1 s_2 s_{n+1} c_3 \dots c_n [\alpha_{n+1} a(1\ 2) + \beta_{n+1} b(1\ 2) + \gamma_{n+1} c(1\ 2)] \\ &\quad + \sum' s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n c_{n+1} (1\ 2\ 3) \} \\ &- \{ \sum' s_1 s_2 s_3 s_4 s_{n+1} c_5 \dots c_n [\alpha_{n+1} a(1\ 2\ 3\ 4) + \beta_{n+1} b(1\ 2\ 3\ 4) + \gamma_{n+1} c(1\ 2\ 3\ 4)] \\ &\quad + \sum' s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \dots c_n c_{n+1} (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \} + \dots \\ &\mp s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} [\alpha_{n+1} a(1\ 2 \dots n) + \beta_{n+1} b(1\ 2 \dots n) + \gamma_{n+1} c(1\ 2 \dots n)] \\ &\pm s_1 s_2 \dots s_n c_{n+1} (1\ 2 \dots n). \end{aligned}$$

Per le formole (I) ed osservando che:

$$\begin{aligned} &\sum' s_1 s_2 \dots s_k c_{k+1} \dots c_n s_{n+1} (1\ 2 \dots k, n+1) \\ &+ \sum' s_1 s_2 s_3 \dots s_{k+1} c_{k+2} \dots c_n c_{n+1} (1\ 2 \dots k+1) \\ &= \sum s_1 s_2 \dots s_{k+1} c_{k+2} \dots c_{n+1} (1\ 2 \dots k+1), \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \cos \omega' &= c_1 c_2 \dots c_{n+1} - \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_{n+1} (1\ 2) \\ &+ \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_{n+1} (1\ 2\ 3\ 4) - \dots + \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_{n+1} (1\ 2\ 3) \\ &- \sum s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \dots c_{n+1} (1\ 2\ 3\ 4\ 5) + \dots \pm s_1 s_2 \dots s_{n+1} (1\ 2 \dots n+1). \end{aligned}$$

Per le formole poi che danno i coseni direttori avremo:

$$\alpha' \sin \omega' = c_{n+1} \alpha s + c \alpha_{n+1} s_{n+1} - (\beta \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} \gamma) s s_{n+1}.$$

Sostituendo a  $c$ ,  $\alpha s$ ,  $\beta s$ ,  $\gamma s$  i loro valori e sommando convenientemente si ottiene:

$$\begin{aligned}
\alpha' \operatorname{sen} \omega' = & \left\{ \sum' s_1 c_2 c_3 \dots c_n c_{n+1} a(1) + c_1 c_2 \dots c_n s_{n+1} \alpha_{n+1} \right\} \\
& - \left\{ \sum' s_1 s_2 s_{n+1} c_3 \dots c_n [\alpha_{n+1}(12) + \beta_{n+1} c(12) - \gamma_{n+1} b(12)] \right. \\
& \quad \left. + \sum' s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n c_{n+1} a(123) \right\} + \dots \\
& - \left\{ \sum' s_1 s_{n+1} c_2 c_3 \dots c_n [\gamma_{n+1} b(1) - \beta_{n+1} c(1)] + \sum' s_1 s_2 c_3 \dots c_n c_{n+1} a(12) \right\} \\
& + \left\{ \sum' s_1 s_2 s_3 s_4 s_{n+1} c_5 \dots c_n [\alpha_{n+1}(1234) + \beta_{n+1} c(1234) - \gamma_{n+1} b(1234)] \right. \\
& \quad \left. + \sum' s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \dots c_n c_{n+1} a(12345) \right\} - \dots \\
& \pm s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} [\alpha_{n+1}(12 \dots n) + \beta_{n+1} c(12 \dots n) - \gamma_{n+1} b(12 \dots n)].
\end{aligned}$$

Per le formole (I) ed osservando che :

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} b(r) - \beta_{n+1} c(r) &= a(r, n+1), \\
\sum' s_1 s_2 \dots s_k c_{k+1} \dots c_n s_{n+1} a(12 \dots k, n+1) \\
&+ \sum' s_1 s_2 \dots s_{k+1} c_{k+2} \dots c_n c_{n+1} a(12 \dots k+1) \\
&= \sum s_1 s_2 \dots s_{k+1} c_{k+2} \dots c_{n+1} a(12 \dots k+1),
\end{aligned}$$

si ha finalmente :

$$\begin{aligned}
\alpha' \operatorname{sen} \omega' = & \sum s_1 c_2 c_3 \dots c_{n+1} a(1) - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_{n+1} a(123) + \dots \\
& - \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_{n+1} a(12) + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_{n+1} a(1234) - \dots \\
& \pm s_1 s_2 \dots s_{n+1} a(12 \dots n+1).
\end{aligned}$$

Le formole date essendo vere per due rotazioni, lo saranno quindi per tre, per un numero qualunque di rotazioni; e così il teorema rimane completamente dimostrato.

L'ampiezza e l'asse della rotazione risultante dipendono, a parità di altre condizioni, dall'ordine con cui si compongono le rotazioni singole; infatti, i primi due termini del valore di  $\cos \omega$  non dipendono dall'ordine di composizione, tutti gli altri dipendono da questo ordine. Così per esempio per  $n=3$ , qualunque sia l'ordine con cui si compongono le rotazioni,  $\cos \omega$  non può avere che due valori soli cioè :

$$c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3(23) - c_2 s_3 s_1(13) - c_3 s_1 s_2(12) \pm s_1 s_2 s_3(123).$$

Supponendo le rotazioni infinitesime, si ottengono formole note.

### Composizione di due rotazioni finite intorno ad assi non concorrenti.

Premettiamo i seguenti teoremi:

« TEOREMA IV. — Ad una rotazione  $2\omega(\alpha, \beta, \dots \nu)$  si può sostituire una rotazione equipollente  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$  seguita da una traslazione  $2\tau(a, b, c)$  in cui, detta  $\rho$  la distanza tra i due assi, è:

$$\tau = \rho \sin \omega,$$

$$(5) \quad \begin{cases} \rho a = \sin \omega \{ \beta(\nu - \nu') - \gamma(\mu - \mu') \} + \cos \omega (\lambda - \lambda'), \\ \rho b = \sin \omega \{ \gamma(\lambda - \lambda') - \alpha(\nu - \nu') \} + \cos \omega (\mu - \mu'), \\ \rho c = \sin \omega \{ \alpha(\mu - \mu') - \beta(\lambda - \lambda') \} + \cos \omega (\nu - \nu'). \end{cases}$$

« La direzione della traslazione è normale agli assi di rotazione ».

Infatti i coseni direttori della normale  $\varphi$  al piano dei due assi, come è noto, sono proporzionali a:

$$(y - y')\gamma - (z - z')\beta, \quad (z - z')\alpha - (x - x')\gamma, \quad (x - x')b - (y - y')\alpha;$$

ovvero a:

$$\lambda - \lambda', \quad \mu - \mu', \quad \nu - \nu',$$

dove con  $x, y, z$ , e  $x', y', z'$ , indichiamo le coordinate dei punti d'incontro di  $\rho$  rispettivamente con gli assi  $2\omega(\alpha, \beta, \dots \nu)$ ,  $2\omega(\alpha, \beta, \dots \nu')$ .

Sapendo dalla Meccanica che la traslazione  $2\tau$  forma col piano dei due assi ovvero con  $\rho$  un angolo uguale a  $90^\circ - \omega$ , ed osservando che

$$\sqrt{(\lambda - \lambda')^2 + (\mu - \mu')^2 + (\nu - \nu')^2} = \rho,$$

fra i coseni direttori di  $\rho$ ,  $\varphi$ , dell'asse  $2\omega$  e della traslazione  $2\tau$  passano le relazioni:

$$a \frac{(x - x')}{\rho} + b \frac{(y - y')}{\rho} + c \frac{(z - z')}{\rho} = \sin \omega,$$

$$a \frac{(\lambda - \lambda')}{\rho} + b \frac{(\mu - \mu')}{\rho} + c \frac{(\nu - \nu')}{\rho} = \cos \omega,$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Osservando che il determinante dei coefficienti di  $a, b, c$  è uguale a  $\pm 1$  a seconda della direzione della normale  $\varphi$ , dal sistema precedente si ricava subito:

$$a = \operatorname{sen} \omega \left\{ \beta \frac{(\nu - \nu')}{\rho} - \gamma \frac{(\mu - \mu')}{\rho} \right\} + \cos \{ (y - y')\gamma - (z - z')\beta \},$$

ossia

$$\rho a = \operatorname{sen} \omega \{ \beta (\nu - \nu') - \gamma (\mu - \mu') \} + \cos \omega (\lambda - \lambda'),$$

e due analoghe.

« TEOREMA V. — Ad una rotazione  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$  e ad una « traslazione  $2\tau(a, b, c)$  si può sostituire un moto elicoidale

$$2\tau_1, 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu'),$$

« in cui :

$$(6) \quad \tau_1 = \tau(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda' \operatorname{sen} \omega = \lambda \operatorname{sen} \omega \pm \tau(\gamma b - \beta c) \operatorname{sen} \omega + \tau a \cos \omega - \tau_1 \alpha \cos \omega, \\ \mu' \operatorname{sen} \omega = \mu \operatorname{sen} \omega \pm \tau(\alpha c - \gamma a) \operatorname{sen} \omega + \tau b \cos \omega - \tau_1 \beta \cos \omega, \\ \nu' \operatorname{sen} \omega = \nu \operatorname{sen} \omega \pm \tau(\beta a - \alpha b) \operatorname{sen} \omega + \tau c \cos \omega - \tau_1 \gamma \cos \omega. \end{cases}$$

« È da assumere il segno  $+$ , se nei movimenti componenti precede la « rotazione; il segno  $-$ , se precede la traslazione ».

Infatti decomponiamo la traslazione  $2\tau$  in due, l'una  $2\tau_1$  lungo l'asse  $2\omega$ , l'altra  $2\tau_2(\xi, \eta, \zeta)$  normale, la quale insieme alla rotazione  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$  dà luogo ad una rotazione equivalente  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ , e quindi, pel teorema precedente, alle formole :

$$(a) \quad \rho \xi = \operatorname{sen} \omega \{ \beta (\nu - \nu') - \gamma (\mu - \mu') \} + \cos \omega (\lambda - \lambda'),$$

e due analoghe.

Indicando con  $\theta$  l'angolo che la direzione  $2\tau(a, b, c)$  forma con l'asse  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$  si ha subito :

$$\tau_1 = \tau \cos \theta = \tau(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Indicando con  $m, n, p$  i coseni della normale  $\varphi$  al piano delle direzioni  $2\tau(a, b, c)$ ,  $2\tau_1(\alpha, \beta, \gamma)$ , per la Geometria Analitica, si hanno le relazioni :

$$m = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} (\beta c - \gamma b), \quad n = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} (\gamma a - \alpha c), \quad p = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} (\alpha b - \beta a).$$

E quindi i coseni direttori della componente  $2\tau_2(\xi, \eta, \zeta)$ , normale alla  $\varphi$  e a  $2\tau_1$  sono date da :

$$\xi = \beta p - \gamma n, \quad \eta = \gamma m - \alpha p, \quad \zeta = \alpha n - \beta m.$$

Sostituendo nella prima di queste relazioni i valori di  $p$  ed  $n$  si ha :

$$\xi = \{\beta(\alpha b - \beta a) - \gamma(\gamma a - \alpha c)\} \frac{1}{\sin \theta}.$$

Sostituendo questo valore di  $\xi$  nella (a) e tenendo presente che

$$\sin \theta = \frac{\tau_2}{\tau},$$

$$\beta(\alpha b - \beta a) - \gamma(\gamma a - \alpha c) = \alpha \cos \theta - a,$$

si ha facilmente :

$$\rho \frac{\tau}{\tau_2} (\alpha \cos \theta - a) = \sin \omega \{\beta(v - v') - \gamma(\mu - \mu')\} + \cos \omega (\lambda - \lambda'),$$

ovvero essendo

$$\tau_2 = \rho \sin \omega, \quad \tau \cos \theta = \tau_1 :$$

$$\tau_1 \alpha - \tau a = \sin^2 \omega \{\beta(v - v') - \gamma(\mu - \mu')\} + (\lambda - \lambda') \sin \omega \cos \omega.$$

Parimenti si avrebbe :

$$\tau_1 \beta - \tau b = \sin^2 \omega \{\gamma(\lambda - \lambda') - \alpha(v - v')\} + (\mu - \mu') \sin \omega \cos \omega,$$

$$\tau_1 \gamma - \tau c = \sin^2 \omega \{\alpha(\mu - \mu') - \beta(\lambda - \lambda')\} + (v - v') \sin \omega \cos \omega.$$

Ponendo per brevità

$$u = \lambda - \lambda', \quad v = \mu - \mu', \quad w = v - v',$$

ed ordinando le tre relazioni precedenti rispetto ad  $u$ ,  $v$ ,  $w$  si ha :

$$u \cos \omega \sin \omega - v \gamma \sin^2 \omega + w \beta \sin^2 \omega = \tau_1 \alpha - \tau a,$$

$$u \gamma \sin^2 \omega + v \sin \omega \cos \omega - w \alpha \sin^2 \omega = \tau_1 \beta - \tau b,$$

$$-u \beta \sin^2 \omega + v \alpha \sin^2 \omega + w \sin \omega \cos \omega = \tau_1 \gamma - \tau c.$$

Da questo sistema si ricava senza difficoltà che il determinante dei coefficienti è uguale a  $\sin^3 \omega \cos \omega$ , quindi :

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{\sin^3 \omega \cos \omega} [ & (\tau_1 \alpha - \tau a) \{\sin^2 \omega \cos^2 \omega + \alpha^2 \sin^4 \omega\} \\ & + (\tau_1 \beta - \tau b) \{\gamma \sin^3 \omega \cos \omega - \alpha \beta \sin^4 \omega\} \\ & + (\tau_1 \gamma - \tau c) \{\alpha \gamma \sin^4 \omega - \beta \sin^3 \omega \cos \omega\} ], \end{aligned}$$

ossia semplificando :

$$u = [\tau_1 \alpha - \tau_1 \alpha \sin^2 \omega - \tau(b\gamma - c\beta) \sin \omega \cos \omega - \tau a \cos^2 \omega] \frac{1}{\sin \omega \cos \omega} ;$$

ovvero semplificando ancora e sostituendo ad  $u$  il suo valore:

$$\lambda' \sin \omega = \lambda \sin \omega + \tau(b\gamma - c\beta) + \tau a \cos \omega - \tau_1 \alpha \cos \omega.$$

Parimente si avrebbero i valori di  $\mu' \sin \omega$ ,  $\nu' \sin \omega$ .

Il teorema rimane così dimostrato.

Proponiamoci ora di comporre due rotazioni  $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \nu_1)$ ,  $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \dots, \nu_2)$ .

Al sistema di queste due rotazioni potremo sostituire: la rotazione  $2\omega_1$ , una rotazione  $2\omega'_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda'_2, \mu'_2, \nu'_2)$  equipollente alla seconda, intorno ad un asse parallelo passante per un punto  $(x, y, z)$  del primo, seguita da una traslazione:  $2\rho s_2(a, b, c)$ . Le  $a, b, c$  per le (5) sono date da:

$$\rho a = s_2\{\beta_2(\nu_2 - \nu'_2) - \gamma_2(\mu_2 - \mu'_2)\} + c_2(\lambda_2 - \lambda'_2)$$

e due analoghe.

Alle due rotazioni  $2\omega_1$ ,  $2\omega'_2$  possiamo sostituire una rotazione unica  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ ; l'ampiezza e i coseni direttori dell'asse sono dati, per le (2), da:

$$\cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (12),$$

$$\alpha \sin \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 \mp (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2,$$

e due analoghe.

Finalmente valendoci del teorema V troveremo gli elementi del moto elicoidale risultante.

La traslazione  $2\tau$  è quindi espressa per la (6) da:

$$\tau = \rho s_2(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

ossia:

$$\begin{aligned} \tau = s_2 \sum \{s_2[\beta_2(\nu_2 - \nu'_2) - \gamma_2(\mu_2 - \mu'_2)] \\ + c_2(\lambda_2 - \lambda'_2)\} \{c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2\} \frac{1}{\sin \omega}. \end{aligned}$$

Svolgendo la sommatoria, eseguendo i prodotti indicati e tenendo presente che

$$\nu_2 \gamma_2 + \mu_2 \beta_2 + \alpha_2 \lambda_2 = 0, \quad \nu'_2 \gamma_2 + \mu'_2 \beta_2 + \lambda'_2 \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$

si vedrebbe senza difficoltà che i coefficienti di  $s_1 s_2^2 c_2$ ,  $s_2^3 c_1$ ,  $c_1 c_2 s_2^2$  sono nulli e quindi:

$$\begin{aligned}\tau \operatorname{sen} \omega = & c_2^2 s_1 s_2 \{ \alpha_1 (\lambda_2 - \lambda'_2) + \beta_1 (\mu_2 - \mu'_2) + \gamma_1 (\nu_2 - \nu'_2) \} \\ & - s_1 s_2^3 \{ (\nu_2 - \nu'_2) [\beta_2 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) - \alpha_2 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)] \\ & + (\mu_2 - \mu'_2) [\alpha_2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) - \gamma_2 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)] \\ & + (\lambda_2 - \lambda'_2) [\gamma_2 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) - \beta_2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)] \}.\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo dentro le  $\{ \}$  del coefficiente di  $s_1 s_2^3$  la quantità :

$$(\nu_2 - \nu'_2) \gamma_1 \gamma_2^2 + (\mu_2 - \mu'_2) \beta_1 \beta_2^2 + (\lambda_2 - \lambda'_2) \alpha_1 \alpha_2^2,$$

e facendo le debite semplificazioni, si ottiene subito :

$$\begin{aligned}\tau \operatorname{sen} \omega = & c_2^2 s_1 s_2 \{ (\lambda_2 - \lambda'_2) \alpha_1 + (\mu_2 - \mu'_2) \beta_1 + (\nu_2 - \nu'_2) \gamma_1 \} \\ & + s_1 s_2^3 \{ (\nu_2 - \nu'_2) \gamma_1 + (\mu_2 - \mu'_2) \beta_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) \alpha_1 \},\end{aligned}$$

ovvero ancora :

$$\tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 \{ (\lambda_2 - \lambda'_2) \alpha_1 + (\mu_2 - \mu'_2) \beta_1 + (\nu_2 - \nu'_2) \gamma_1 \} (c_2^2 + s_2^2).$$

Aggiungendo e togliendo dentro le  $\{ \}$  la quantità  $\alpha_2 \lambda_1 + \beta_2 \mu_1 + \gamma_2 \nu_1$  si ha :

$$\begin{aligned}\tau \operatorname{sen} \omega = & s_1 s_2 \{ \alpha_2 \lambda_1 + \beta_2 \mu_1 + \gamma_2 \nu_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \beta_1 \mu_2 + \gamma_1 \nu_2 \\ & - (\nu'_2 \gamma_1 + \mu'_2 \beta_1 + \lambda'_2 \alpha_1 + \alpha_2 \lambda_1 + \beta_2 \mu_1 + \gamma_2 \nu_1) \}.\end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (\gamma_1 y - \beta_1 z), & \mu_1 &= (\alpha_1 z - \gamma_1 x), & \nu_1 &= (\beta_1 x - \alpha_1 y), \\ \lambda'_2 &= (\gamma_2 y - \beta_2 z), & \mu'_2 &= (\alpha_2 z - \gamma_2 x), & \nu'_2 &= (\beta_2 x - \alpha_2 y), \\ \lambda' &= (\gamma y - \beta z), & \mu' &= (\alpha z - \gamma x), & \nu' &= (\beta x - \alpha y),\end{aligned}$$

dove  $x, y, z$  sono le coordinate del punto d'incontro degli assi  $2 \omega_1, 2 \omega'_2, 2 \omega$ , si verifica facilmente che :

$$\nu'_2 \gamma_1 + \mu'_2 \beta_1 + \lambda'_2 \alpha_1 + \gamma_2 \nu_1 + \beta_2 \mu_1 + \alpha_2 \lambda_1 = 0;$$

e perciò otteniamo finalmente :

$$\tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 [1 \ 2].$$

Colle (7) si trovano le coordinate  $\lambda, \mu, \nu$ , dell'asse di moto elicoidale risultante. Infatti si ha :

$$(a) \tau \alpha \cos \omega + \lambda \operatorname{sen} \omega = \lambda' \operatorname{sen} \omega + \beta s_2 (\gamma b - \beta c) \operatorname{sen} \omega + \rho s_2 a \cos \omega.$$

Ora :

$$\lambda' \operatorname{sen} \omega = (\gamma y - \beta z) \operatorname{sen} \omega,$$

ossia :

$$\begin{aligned}\lambda' \operatorname{sen} \omega = & y \{ c_2 s_1 \gamma_1 + c_1 s_2 \gamma_2 - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s_1 s_2 \} \\ & - z \{ c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 - (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) s_1 s_2 \}.\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro la quantità  $\beta_1 \beta_2 x + \gamma_1 \gamma_2 x$ , si ha facilmente:

$$\lambda' \sin \omega = c_2 s_1 (y \gamma_1 - z \beta_1) + c_1 s_2 (y \gamma_2 - z \beta_2) - \{\beta_1 (\beta_2 x - \alpha_2 y) - \beta_2 (\beta_1 x - \alpha_1 y) - \gamma_1 (\alpha_2 z - \gamma_2 x) + \gamma_2 (\alpha_1 z - \gamma_1 x)\} s_1 s_2,$$

ovvero:

$$\lambda' \sin \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda'_2 - \{(\beta_1 v'_2 - \beta_2 v_1) - (\gamma_1 \mu'_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2.$$

Si ha pure:

$$\rho s_2 (\gamma b - \beta c) \sin \omega + \rho s_2 a \cos \omega = s_2 \{\rho b \cdot \gamma \sin \omega - \rho c \cdot \beta \sin \omega + \rho a \cdot \cos \omega\},$$

ossia:

$$\begin{aligned} & \rho s_2 (\gamma b - \beta c) \sin \omega + \rho s_2 a \cos \omega \\ &= s_2 [\{s_2 \gamma_2 (\lambda_2 - \lambda'_2) - s_2 \alpha_2 (v_2 - v'_2) + c_2 (\mu_2 - \mu'_2)\} \{c_2 s_1 \gamma_1 + c_1 s_2 \gamma_2 \\ & \quad - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s_1 s_2\} - \{s_2 \alpha_2 (\mu_2 - \mu'_2) - s_2 \beta_2 (\lambda_2 - \lambda'_2) \\ & \quad + c_2 (v_2 - v'_2)\} \{c_2 s_1 \beta_1 + c_1 s_2 \beta_2 - (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) s_1 s_2\} \\ & \quad + \{s_2 \beta_2 (v_2 - v'_2) - s_2 \gamma_2 (\mu_2 - \mu'_2) + c_2 (\lambda_2 - \lambda'_2)\} \{c_1 c_2 - s_1 s_2 (12)\}]. \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti, sommando convenientemente e facendo le debite semplificazioni si trova:

$$\begin{aligned} & \rho s_2 (\gamma b - \beta c) \sin \omega + \rho s_2 a \cos \omega = s_2 c_1 (\lambda_2 - \lambda'_2) \\ & + s_1 s_2^2 \{\gamma_1 (\mu_2 - \mu'_2) - \beta_1 (v_2 - v'_2)\} + s_1 s_2 c_2^2 \{\gamma_1 (\mu_2 - \mu'_2) - \beta_1 (v_2 - v'_2)\}, \end{aligned}$$

ovvero finalmente:

$$\begin{aligned} & \rho s_2 (\gamma b - \beta c) \sin \omega + \rho s_2 a \cos \omega \\ &= c_1 s_2 (\lambda_2 - \lambda'_2) + s_1 s_2 \{\gamma_1 (\mu_2 - \mu'_2) - \beta_1 (v_2 - v'_2)\}. \end{aligned}$$

Sostituendo questo valore e quello trovato per  $\lambda' \sin \omega$  nella (a), otteniamo facilmente:

$$\lambda \sin \omega + \tau \alpha \cos \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2,$$

e due analoghe.

Possiamo dunque enunciare il

« TEOREMA VI. — A due rotazioni

$$2 \omega_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, v_1), \quad 2 \omega_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, v_2)$$

« si può sostituire un moto elicoidale  $2 \tau, 2 \omega (\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, v)$  i cui « elementi sono:

$$(8) \quad \cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (12), \quad \tau \sin \omega = s_1 s_2 [12],$$



$$(9) \begin{cases} \alpha \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \alpha_2 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2, \\ \lambda \operatorname{sen} \omega + \tau \alpha \cos \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2. \end{cases}$$

« e formole analoghe ».

Inversamente possiamo sostituire ad un dato moto elicoidale, ed in infiniti modi, il sistema di due rotazioni intorno a due assi. Fissato ad arbitrio uno di questi, per esempio  $(\alpha_1 \dots \nu_1)$ , restano determinate le due rotazioni e l'altro asse. Infatti moltiplicando la prima delle (9) e le analoghe rispettivamente per  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\nu_1$ , la seconda e le analoghe rispettivamente per  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  e sommando si ottiene:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \operatorname{sen} \omega + \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega \\ & = 2c_2 s_1 (\alpha_1 \lambda_1 + \beta_1 \mu_1 + \gamma_1 \nu_1) + c_1 s_2 (\alpha_2 \lambda_1 + \beta_2 \mu_1 + \gamma_2 \nu_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \beta_1 \mu_2 + \gamma_1 \nu_2) \\ & - \{ \lambda_1 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + \mu_1 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) + \nu_1 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) + \alpha_1 (\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) \\ & + \beta_1 (\gamma_1 \lambda_2 - \gamma_2 \lambda_1) + \gamma_1 (\alpha_1 \mu_2 - \alpha_2 \mu_1) - \alpha_1 (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1) - \beta_1 (\alpha_1 \nu_2 - \alpha_2 \nu_1) \\ & - \gamma_1 (\beta_1 \lambda_2 - \beta_2 \lambda_1) \} s_1 s_2, \end{aligned}$$

ossia, osservando che il primo e terzo termine del secondo membro sono nulli:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \cos \omega \\ & + \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega = c_1 s_2 [I \ 2]. \end{aligned}$$

E per le (8) si ha facilmente:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \nu + \alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 + \gamma \nu_1) \operatorname{sen} \omega \\ & + \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega = \tau \operatorname{sen} \omega \cotg \omega_1, \end{aligned}$$

d'onde si ricava  $\omega_1$  e quindi  $c_1$  ed  $s_1$ . Le sei equazioni (9) e una delle (8) possono quindi riguardarsi come sette equazioni lineari in  $c_2, s_2 \alpha_2, \dots, s_2 \nu_2$ ; sarà quindi individuata l'altra rotazione e le coordinate dell'altro asse. Non tutte le rette possono assumersi come assi della prima rotazione; occorre escludere quelle che appartengono al complesso lineare:

$$(\alpha \lambda_1 + \dots + \gamma_1 \nu) \operatorname{sen} \omega + \tau (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) \cos \omega = 0.$$

Questi due assi di rotazione non sono rette coniugate rispetto al complesso, a meno che le rotazioni siano infinitesime.

Possiamo dunque concludere che:

« TEOREMA VII. — Si può in infiniti modi sostituire ad un dato moto « elicoidale il sistema di due rotazioni intorno a due assi; scelto ad arbitrio uno di questi, resta, in generale, determinato l'altro e le an-

« pezzi delle due rotazioni; il sestuplo volume del tetraedro che ha per « spigoli opposti due segmenti rispettivamente eguali ad  $s_1$  e  $s_2$  sui due « assi di rotazione, è costante ».

### Composizione di due o più moti elicoidali.

Supponiamo ora più generalmente di dover comporre un moto elicoidale  $2\tau_1, 2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$  con una rotazione

$$2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2).$$

Alle due rotazioni  $2\omega_1, 2\omega_2$  per il teorema VI possiamo sostituire un moto elicoidale  $2\tau', 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$  dove:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau' = s_1 s_2 [12] \frac{1}{\sin \omega}, \quad \cos \omega = c_1 c_2 - s_1 s_2 (12), \\ \alpha \sin \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1), \\ \lambda' \sin \omega + \tau' \alpha \cos \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 \\ - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2. \end{array} \right.$$

Così il sistema è ridotto all'altro  $2\tau_1, 2\tau', 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$ , e, potendo invertire le traslazioni, all'altro  $2\tau', 2\tau_1, 2\omega$ . Adesso pel teorema V, alla traslazione  $2\tau_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  ed alla rotazione  $2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu')$  possiamo sostituire un moto elicoidale  $2\tau_2, 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$  in cui

$$\tau_2 = \tau_1(\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1),$$

$$\lambda \sin \omega = \lambda' \sin \omega - \tau_1(\gamma \beta_1 - \beta \gamma_1) \sin \omega + \tau_1 \alpha_1 \cos \omega - \tau_2 \alpha \cos \omega.$$

Il sistema primitivo è dunque equivalente all'altro  $2\tau', 2\tau_2, 2\omega$ , ossia avendo  $2\tau'$  e  $2\tau_2$  la medesima direzione, all'altro  $2\tau, 2\omega$ , dove  $\tau = \tau' + \tau_2$ .

Nella espressione di  $\tau_2$  sostituendo ad  $\alpha, \beta, \gamma$  i loro valori dati dalle (a), si ottiene senza difficoltà:

$$\tau_2 = \tau_1 \{c_2 s_1 + c_1 s_2 (12)\} \frac{1}{\sin \omega},$$

e quindi

$$\tau = \tau' + \tau_2 = s_1 s_2 [12] \frac{1}{\sin \omega} + \tau_1 \{c_2 s_1 + c_1 s_2 (12)\} \frac{1}{\sin \omega},$$

ossia finalmente:

$$\tau \sin \omega = \tau_1 \{c_2 s_1 + c_1 s_2 (12)\} + s_1 s_2 [12].$$

Sostituendo nell'espressione di  $\lambda \sin \omega$  il valore di  $\lambda' \sin \omega$  dato dalle

(a), si ha :

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{sen} \omega + (\tau' + \tau_2) \alpha \cos \omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 \\ &- \{(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ &+ \tau_1 \{\gamma_1 \beta \operatorname{sen} \omega - \beta_1 \gamma \operatorname{sen} \omega + \alpha_1 \cos \omega\}, \end{aligned}$$

e finalmente sostituendo a  $\beta \operatorname{sen} \omega$ ,  $\gamma \operatorname{sen} \omega$ ,  $\cos \omega$  i loro valori, otteniamo facilmente :

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{sen} \omega + \tau \alpha \cos \omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ &+ \tau_1 \{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi il

« TEOREMA VIII. — Ad un moto elicoidale  $2 \tau_1$ ,  $2 \omega_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, v_1)$  e ad una rotazione  $2 \omega_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, v_2)$  si può « sostituire un unico moto elicoidale  $2 \tau$ ,  $2 \omega (\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, v)$ ; ed è :

$$(10) \quad \begin{cases} \tau \operatorname{sen} \omega = \tau_1 \{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1/2)\} + s_1 s_2 [1/2], \\ \lambda \operatorname{sen} \omega + \tau \alpha \cos \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ \quad + \tau_1 \{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}, \end{cases}$$

« e due formole analoghe, mentre  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sono definiti dalle stesse « formole del teorema VI ».

Supponiamo adesso di dovere comporre due moti elicoidali

$$2 \tau_1, 2 \omega_1 (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, v_1); \quad 2 \tau_2, 2 \omega_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, v_2).$$

Al sistema  $2 \tau_1$ ,  $2 \omega_1$ ;  $2 \tau_2$ ,  $2 \omega_2$  possiamo sostituire l'altro  $2 \tau_1$ ,  $2 \omega_1$ ,  $2 \omega_2$ ,  $2 \tau_2$ . Pel teorema precedente, al moto elicoidale  $2 \tau_1$ ,  $2 \omega_1$ , e alla rotazione  $2 \omega_2$  si può sostituire un moto elicoidale  $2 \tau'$ ,  $2 \omega (\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', v')$  in cui :

$$\tau' \operatorname{sen} \omega = \tau_1 \{c_2 s_1 + c_1 s_2 (1/2)\} + s_1 s_2 [1/2]$$

$$\begin{aligned} \lambda' \operatorname{sen} \omega + \tau' \alpha \cos \omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 v_2 - \beta_2 v_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ &+ \tau_1 \{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}. \end{aligned}$$

Il sistema è così ridotto all'altro  $2 \tau'$ ,  $2 \omega$ ,  $2 \tau_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ . Alla rotazione  $2 \omega (\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', v')$  ad alla traslazione  $2 \tau_2 (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ , pel teorema V possiamo sostituire un moto elicoidale  $2 \tau''$ ,  $2 \omega (\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, v)$ , in cui :

$$\tau'' = \tau_2 (\alpha \alpha_2 + \beta \beta_2 + \gamma \gamma_2),$$

$$\lambda \operatorname{sen} \omega = \lambda' \operatorname{sen} \omega + \tau_2 (\gamma \beta_2 - \beta \gamma_2) \operatorname{sen} \omega + \tau_2 \alpha_2 \cos \omega - \tau'' \alpha \cos \omega.$$

Il sistema primitivo è così ridotto all'altro

$$2\tau', \quad 2\tau'', \quad 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu),$$

ossia avendo  $\tau'$  e  $\tau''$  la medesima direzione, all'altro  $2\tau, 2\omega$ , dove  $\tau = \tau' + \tau''$ .

Nella espressione di  $\tau''$  sostituendo ad  $\alpha, \beta, \gamma$  i loro valori, si ottiene facilmente:

$$\tau'' = \tau_2 \{c_1 s_2 + c_2 s_1 (I 2)\} \frac{I}{\sin \omega},$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tau = \tau' + \tau'' &= \tau_1 \{c_2 s_1 + c_1 s_2 (I 2)\} \frac{I}{\sin \omega} + s_1 s_2 [I 2] \frac{I}{\sin \omega} \\ &+ \tau_2 \{c_1 s_2 + c_2 s_1 (I 2)\} \frac{I}{\sin \omega}; \end{aligned}$$

ossia

$$\tau \sin \omega = s_1 c_2 \{\tau_1 + \tau_2 (I 2)\} + s_2 c_1 \{\tau_1 (I 2) + \tau_2\} + s_1 s_2 [I 2].$$

Sostituendo nell'espressione di  $\lambda \sin \omega$  il valore di  $\lambda' \sin \omega$  si ha:

$$\begin{aligned} \lambda \sin \omega + (\tau' + \tau'') \alpha \cos \omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ &+ \tau_2 \{\beta_2 \gamma \sin \omega - \gamma_2 \beta \sin \omega + \alpha_2 \cos \omega\} + \tau_1 \{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}. \end{aligned}$$

Sostituendo a  $\gamma \sin \omega, \beta \sin \omega, \cos \omega$  i loro valori, si ottiene, come nel teorema precedente senza difficoltà:

$$\begin{aligned} \lambda \sin \omega + \tau \alpha \cos \omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ &+ \tau_1 \{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\} + \tau_2 \{\alpha_2 c_1 c_2 - \alpha_1 s_1 s_2 + c_2 s_1 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}, \end{aligned}$$

e quindi possiamo enunciare il

« TEOREMA IX. — A due moti elicoidali  $2\tau_1, 2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1), 2\tau_2, 2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2)$  si può sostituire un unico « moto elicoidale  $2\tau, 2\omega(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ ; ed è:

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau \sin \omega &= s_1 c_2 \{\tau_1 + \tau_2 (I 2)\} + s_2 c_1 \{\tau_1 (I 2) + \tau_2\} + s_1 s_2 [I 2], \\ \lambda \sin \omega + \tau \alpha \cos \omega &= c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2 - \{(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)\} s_1 s_2 \\ &+ \tau_1 \{\alpha_1 c_1 c_2 - \alpha_2 s_1 s_2 + c_1 s_2 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\} \\ &+ \tau_2 \{\alpha_2 c_1 c_2 - \alpha_1 s_1 s_2 + c_2 s_1 (\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2)\}. \end{aligned} \right.$$

Applicando successivamente i teoremi VI e VIII, potremo comporre tre, quattro rotazioni intorno ad assi qualunque, e stabilire le formole generali per la composizione di  $n$  rotazioni.

Ciò posto passiamo al

« TEOREMA X. — Ad  $n$  rotazioni

$$2\omega_r(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \lambda_r, \mu_r, \nu_r), \quad (r=1, 2, \dots, n),$$

« si può sostituire un unico moto elicoidale  $2\tau, 2\omega(\alpha, \beta, \dots, \nu)$ ; le  
« grandezze  $2\omega, \alpha, \beta, \gamma$  sono definite dalle formole (4); per le altre  
« valgono le formole seguenti:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau \sin \omega &= \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n [1\ 2] - \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots [1\ 2\ 3\ 4] + \dots \\ &- \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n [1\ 2\ 3] + \sum s_1 s_2 \dots s_5 c_6 \dots c_n [1\ 2\ 3\ 4\ 5] - \dots \\ &\pm s_1 s_2 \dots s_n [1\ 2 \dots n]; \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda \sin \omega + \tau \alpha \cos \omega &= \sum s_1 c_2 \dots c_n a[1] - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n a[1\ 2\ 3] + \dots \\ &- \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n a[1\ 2] + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_n a[1\ 2\ 3\ 4] - \dots \\ &\pm s_1 s_2 \dots s_n a[1\ 2 \dots n]; \end{aligned} \right.$$

« e due formole analoghe. Le rotazioni si compongono nell'ordine  
« 1, 2, ...  $n$  ».

Queste formole si provano vere per  $n+1$  rotazioni, ammettendole vere per  $n$  e tenendo presente le (II), (III) e (IV).

Infatti, componendo il moto elicoidale risultante dalla composizione delle prime  $n$  rotazioni con la rotazione  $2\omega_{n+1}(\alpha_{n+1} \dots \nu_{n+1})$ , pel teorema VIII, avremo:

$$\begin{aligned} \tau' \sin \omega' &= \tau \{ c_{n+1} s + c s_{n+1} (\alpha \alpha_{n+1} + \beta \beta_{n+1} + \gamma \gamma_{n+1}) \} \\ &+ s s_{n+1} (\lambda \alpha_{n+1} + \mu \beta_{n+1} + \nu \gamma_{n+1} + \alpha \lambda_{n+1} + \beta \mu_{n+1} + \gamma \nu_{n+1}), \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \tau' \sin \omega' &= c_{n+1} \tau s + s_{n+1} \alpha_{n+1} (\tau c \alpha + \lambda s) + s_{n+1} \beta_{n+1} (\tau c \beta + \mu s) \\ &+ s_{n+1} \gamma_{n+1} (\tau c \gamma + \nu s) + \lambda_{n+1} s_{n+1} \alpha s + \mu_{n+1} s_{n+1} \beta s + \nu_{n+1} s_{n+1} \gamma s. \end{aligned}$$

Sostituendo in luogo di  $\tau s, \tau c \alpha + \lambda s, \tau c \beta + \mu s, \tau c \gamma + \nu s$  i loro valori dati dalle (12) e (13), ed in luogo di  $\alpha s, \beta s, \gamma s$  i valori dati dalle (3), sommando convenientemente si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau' \sin \omega' &= s_{n+1} \sum' s_1 c_2 \dots c_n \{ a[1] \alpha_{n+1} + b[1] \beta_{n+1} + c[1] \gamma_{n+1} \\ &+ a(1) \lambda_{n+1} + b(1) \mu_{n+1} + c(1) \nu_{n+1} \} + c_{n+1} \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_n [1\ 2] \\ &- s_{n+1} \sum' s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n \{ a[1\ 2\ 3] \alpha_{n+1} + b[1\ 2\ 3] \beta_{n+1} + c[1\ 2\ 3] \gamma_{n+1} \\ &+ a(1\ 2\ 3) \lambda_{n+1} + b(1\ 2\ 3) \mu_{n+1} + c(1\ 2\ 3) \nu_{n+1} \} \\ &- c_{n+1} \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_n [1\ 2\ 3\ 4] + \dots \\ &- s_{n+1} \sum' s_1 s_2 c_3 c_4 c_5 \dots c_n \{ a[1\ 2] \alpha_{n+1} + b[1\ 2] \beta_{n+1} + c[1\ 2] \gamma_{n+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a(12)\lambda_{n+1} + b(12)\mu_{n+1} + c(12)v_{n+1} \} - c_{n+1} \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n [123] \\
& \quad + s_{n+1} \sum' s_1 \dots s_4 c_5 \dots c_n \{ a[1234]\alpha_{n+1} + b[1234]\beta_{n+1} \\
& \quad + c[1234]\gamma_{n+1} + a(1234)\lambda_{n+1} + b(1234)\mu_{n+1} + c(1234)v_{n+1} \} \\
& \quad + c_{n+1} \sum s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 c_6 \dots c_n [12345] - \dots \\
& \quad \pm s_1 \dots s_{n+1} \{ a[1 \dots n]\alpha_{n+1} + b[1 \dots n]\beta_{n+1} + c[1 \dots n]\gamma_{n+1} \\
& \quad + a(1 \dots n)\lambda_{n+1} + b(1 \dots n)\mu_{n+1} + c(1 \dots n)v_{n+1} \} \\
& \quad \pm s_1 \dots s_n c_{n+1} [12 \dots n],
\end{aligned}$$

ossia finalmente, tenendo presente la (II):

$$\begin{aligned}
\tau' \text{ sen } \omega' &= \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_{n+1} [12] - \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_{n+1} [1234] + \dots \\
&- \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_{n+1} [123] + \sum s_1 s_2 \dots s_5 c_6 \dots c_{n+1} [12345] - \dots \\
&\quad \pm s_1 s_2 \dots s_{n+1} [12 \dots n+1].
\end{aligned}$$

Parimente:

$$\begin{aligned}
\lambda' \text{ sen } \omega' + \tau' \alpha' \cos \omega' &= c_{n+1} s \lambda + s_{n+1} \lambda_{n+1} c \\
&- \{ (\beta v_{n+1} - \beta_{n+1} v) - (\gamma \mu_{n+1} - \mu \gamma_{n+1}) \} s s_{n+1} \\
&+ \tau \{ \alpha c c_{n+1} - s \alpha_{n+1} s_{n+1} + c s_{n+1} (\beta_{n+1} \gamma - \beta \gamma_{n+1}) \},
\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
\lambda' \text{ sen } \omega' + \tau' \alpha' \cos \omega' &= c_{n+1} (\lambda s + \tau \alpha c) + s_{n+1} \beta_{n+1} (v s + \tau \gamma c) - s_{n+1} \gamma_{n+1} (\mu s + \tau \beta c) \\
&- s_{n+1} v_{n+1} \beta s + s_{n+1} \mu_{n+1} \gamma s - \alpha_{n+1} s_{n+1} \tau s + s_{n+1} \lambda_{n+1} c.
\end{aligned}$$

Sostituendo come avanti e sommando convenientemente si ha:

$$\begin{aligned}
\lambda' \text{ sen } \omega + \tau' \alpha' \cos \omega' &= \sum s_1 c_2 \dots c_{n+1} a[1] + c_1 c_2 \dots c_n s_{n+1} \lambda_{n+1} \\
&- \sum' s_1 s_2 c_3 \dots c_n s_{n+1} \{ [12]\alpha_{n+1} + c[12]\beta_{n+1} - b[12]\gamma_{n+1} \\
&+ (12)\lambda_{n+1} + c(12)\mu_{n+1} - b(12)v_{n+1} \} - \sum' s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_{n+1} a[123] + \dots \\
&+ \sum' s_1 c_2 \dots c_n s_{n+1} \{ b[1]\gamma_{n+1} - c[1]\beta_{n+1} + b(1)v_{n+1} - c(1)\mu_{n+1} \} \\
&\quad - \sum' s_1 s_2 c_3 \dots c_{n+1} a[12] \\
&+ \sum' s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n s_{n+1} \{ [123]\alpha_{n+1} + b[123]\gamma_{n+1} - c[123]\beta_{n+1} \\
&\quad + (123)\lambda_{n+1} + b(123)v_{n+1} - c(123)\mu_{n+1} \} \\
&\quad + \sum' s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_{n+1} a[1234] - \dots \\
&\mp s_1 s_2 \dots s_{n+1} \{ [12 \dots n]\alpha_{n+1} \mp b[12 \dots n]\gamma_{n+1} \pm c[12 \dots n]\beta_{n+1} \\
&\quad + \lambda_{n+1} (12 \dots n) \mp b(12 \dots n)v_{n+1} \pm c(12 \dots n)\mu_{n+1} \} \\
&\quad \mp s_1 s_2 s_3 \dots s_n c_{n+1} a[12 \dots n];
\end{aligned}$$

ossia finalmente, tenendo presente le formole (III) e (IV), ed osser-

vando che

$$b[I]\gamma_{n+1} - c[I]\beta_{n+1} + b(I)v_{n+1} - c(I)\mu_{n+1} \\ = [I]\alpha_{n+1} + b[I]\gamma_{n+1} - c[I]\beta_{n+1} + (I)\lambda_{n+1} + b(I)v_{n+1} - c(I)\mu_{n+1},$$

perchè  $[I]\alpha_{n+1}$  e  $(I)\lambda_{n+1}$  non hanno alcuno significato, otteniamo:

$$\lambda' \sin \omega' + \tau' \alpha' \cos \omega' = \sum s_1 c_2 \dots c_{n+1} a[I] - \sum s_1 s_2 s_3 c_4 \dots c_n s_{n+1} a[I \ 2 \ 3] + \dots \\ - \sum s_1 s_2 c_3 \dots c_{n+1} [I \ 2] + \sum s_1 s_2 s_3 s_4 c_5 \dots c_{n+1} a[I \ 2 \ 3 \ 4] - \dots \mp s_1 \dots s_{n+1} a[I \ 2 \dots n + 1].$$

E così il teorema rimane completamente dimostrato.

Colle formole e coi metodi precedenti è ancora facilissima la composizione di  $n$  moti elicoidale  $2\tau_r$ ,  $2\omega_r$  ( $\alpha_r \dots v_r$ ), ( $r = 1, 2, \dots n$ ).

Cefalù, maggio 1900.

MATTIA PUGLISI.