

Über das Problem der Gitterpunkte in einem Kreise.

Von

S. Wigert in Stockholm.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich das obige Problem nach einer neuen Methode behandelt. Sie besteht in der Anwendung eines Diskontinuitätsfaktors, den Herr Helge von Koch¹⁾ früher mit großem Erfolg seinen Untersuchungen über das Primzahlproblem zugrunde gelegt hat. Zwar ist es mir nicht gelungen, durch diese Methode das schärfste bisher gewonnene Resultat²⁾ völlig zu erreichen, indem ich bei dem Reste nur die Größenordnung $x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ beweisen kann. Es ist aber kaum zu bezweifeln, daß es möglich sei, diesem Übelstande abzuhelpen. Ich bin Herrn Prof. Landau zu bleibendem Danke verpflichtet, weil er mir durch seine Ratschläge es ermöglicht hat, sowohl meine Rechnungen zu vereinfachen als auch einige schwere Inkorrektheiten in der Beweisführung zu beseitigen.

§ 1.

Ausgangsformel. Größe des Fehlers bei endlichem Wert des Parameters s .

Es sei $r(m)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (≥ 0) der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = m$. Dann ist für $x > 0$

$$\frac{1}{4} \sum_{1 \leq m \leq x} r(m) = \sum_{\substack{\mu^2 + \nu^2 \leq x \\ \mu, \nu \geq 0}} (1) - [\sqrt{x}] - 1,$$

wo $[y]$ wie gewöhnlich die größte ganze Zahl $\leq y$ bezeichnet. Ferner gilt für s reell und positiv:

¹⁾ Sur la distribution des nombres premiers, Acta Mathematica 24 (1901), S. 159–182.

²⁾ Satz von Sierpiński: Restglied $= O(x^{\frac{1}{2}})$.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-x^s} = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 1 \\ \frac{1}{e} & \text{,, } x = 1 \\ 1 & \text{,, } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Setzt man daher $\bar{r}(m) = r(m)$, wenn m keine Quadratzahl ist, sonst aber $\bar{r}(m) = r(m) + 4$, so wird für $x > 0$

$$\sum_{\substack{\mu^2 + \nu^2 \leq x \\ \mu, \nu \geq 0}} (1) = \sum_{\mu, \nu} \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{x}\right)^s} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \bar{r}(x).$$

Hier sind nun, da die Reihe $\sum_{\mu, \nu} e^{-\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{x}\right)^s}$ für $s \geq 1$ gleichmäßig konvergiert, die Operationen $\sum_{\mu, \nu}$ und \lim_s vertauschbar, so daß wir die folgende *Ausgangsformel* aufstellen können

$$(1) \quad \frac{1}{4} \sum_{m \leq x} r(m) = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{\mu, \nu} e^{-\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{x}\right)^s} - [\sqrt{x}] - 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \bar{r}(x).$$

Die wirkliche Ausführung des Grenzüberganges $s \rightarrow \infty$ ist schwierig und würde übrigens keinen Aufschluß über die gesuchte Größenordnung geben. Die formalen Rechnungen liefern (wenigstens bei nicht ganzzahligem x) in der Tat die von Herrn Hardy³⁾ gegebene Reihenentwicklung der Funktion $\sum_{m < x} r(m)$, deren Größenordnung unbekannt ist. Wir lassen daher s endlich und müssen dann untersuchen, wie groß der dabei begangene Fehler ausfällt. Man hat zunächst

$$\sum_{\substack{\mu, \nu \\ 0}} e^{-\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{x}\right)^s} = \frac{1}{4} V_s + W_s,$$

wo

$$V_s = \sum_{m=1}^{\infty} r(m) e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s}, \quad W_s = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\nu^2}{x}\right)^s}$$

Es sei nun s eine beliebig kleine, aber feste, positive Zahl < 1 , $s \geq 2$ und $x \geq 1$. Dann ist⁴⁾

³⁾ Quarterly Journal 46 (1915), S. 263–283.

⁴⁾ Wenn s fest gedacht ist, so liefert zwar die partielle Summation $\sum_{m < x} r(m) m^s = \frac{\pi x^{s+1}}{s+1} + o(x^{s+1})$. In welcher Weise aber der Ausdruck $\sum_{m < x} r(m) \left(\frac{m}{x}\right)^s - \frac{\pi x}{s+1}$ bei festem x für $s \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, habe ich nicht entscheiden können.

$$\begin{aligned}
 V_{\infty} - V_s &= \sum_{m < x} r(m) + \frac{1}{e} r(x) - \sum_{m=1}^{\infty} r(m) e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s} \\
 &= \sum_{m < x} r(m) \{1 - e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s}\} - \sum_{m > x} r(m) e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s},
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \sum_{m < x} r(m) \{1 - e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s}\} &\leq \sum_{m < x} r(m) \left(\frac{m}{x}\right)^s = O(x^e) + \sum_{m < x-1} r(m) \left(\frac{m}{x}\right)^s \\
 &= O(x^e) + O\left(x^{e-s} \int_1^x t^s dt\right) = O(x^e) + \frac{1}{s} O(x^{1+e}).
 \end{aligned}$$

Das Zeichen O bezieht sich hier wie im folgenden auf x als Veränderliche und gilt *gleichmäßig* für $s \geq 2$. Ferner wird

$$\begin{aligned}
 \sum_{m > x} r(m) e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s} &= O(x^e) + \sum_{m > x+1} r(m) e^{-\left(\frac{m}{x}\right)^s} = O(x^e) + O\left(\sum_{m > x+1} m^e \left(\frac{x}{m}\right)^s\right) \\
 &= O(x^e) + O\left(x^s \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{s-e}}\right) = O(x^e) + \frac{1}{s} O(x^{1+e}),
 \end{aligned}$$

so daß schließlich

$$V_{\infty} - V_s = O(x^e) + \frac{1}{s} O(x^{1+e}).$$

Für die Reihe W_s findet man in analoger Weise

$$W_{\infty} - W_s = O(1) + \frac{1}{s} O(\sqrt{x}),$$

und wir können also die Gleichung (1) durch die folgende ersetzen

$$(2) \quad \frac{1}{4} \sum_{m \leq x} r(m) = \sum_{\substack{0 \\ \mu, \nu}}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{x}\right)^s} - \sqrt{x} + O(x^e) + \frac{1}{s} O(x^{1+e}).$$

Um die Doppelreihe rechts zu untersuchen, bedienen wir uns einer Verallgemeinerung der Summationsformel von Euler-Maclaurin, welche im nächsten Paragraphen auseinandergesetzt werden soll.

§ 2.

Summationsformel für eine Funktion zweier Veränderlichen nebst Anwendung.

Es sei $f(\xi, \eta)$ eine reelle oder komplexe Funktion der reellen Veränderlichen ξ, η , welche für $\xi \geq 0$ nebst ihren Ableitungen $f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}$

und $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$ stetig ist. Bezeichnen wir jetzt mit $P(\xi)$ die oszillierende Funktion $\frac{1}{2} - \xi + [\xi]$, so ist bekanntlich (Formel von Euler-Maclaurin)

$$\sum_{\mu=0}^p f(\mu, \nu) = \int_0^p f(\xi, \nu) d\xi + \frac{1}{2} \{f(p, \nu) + f(0, \nu)\} - \int_0^p P(\xi) f_1(\xi, \nu) d\xi,$$

und also

$$\sum_{\nu=0}^q \sum_{\mu=0}^p f(\mu, \nu) = \int_0^p \left(\sum_{\nu=0}^q f(\xi, \nu) \right) d\xi + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\nu=0}^q f(p, \nu) + \sum_{\nu=0}^q f(0, \nu) \right\} - \int_0^p P(\xi) \left(\sum_{\nu=0}^q f_1(\xi, \nu) \right) d\xi.$$

Weil aber auch

$$\sum_{\nu=0}^q f(\xi, \nu) = \int_0^q f(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \{f(\xi, q) + f(\xi, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_2(\xi, \eta) d\eta,$$

$$\sum_{\nu=0}^q f(p, \nu) = \int_0^q f(p, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \{f(p, q) + f(p, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_2(p, \eta) d\eta,$$

$$\sum_{\nu=0}^q f(0, \nu) = \int_0^q f(0, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \{f(0, q) + f(0, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_2(0, \eta) d\eta,$$

$$\sum_{\nu=0}^q f_1(\xi, \nu) = \int_0^q f_1(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \{f_1(\xi, q) + f_1(\xi, 0)\} - \int_0^q P(\eta) f_{12}(\xi, \eta) d\eta,$$

so erhalten wir die folgende Gleichung

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q f(\mu, \nu) &= \int_0^p \int_0^q f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int_0^p f(\xi, q) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^p f(\xi, 0) d\xi - \int_0^p d\xi \int_0^q P(\eta) f_2(\xi, \eta) d\eta \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^q f(p, \eta) d\eta + \frac{1}{4} f(p, q) + \frac{1}{4} f(p, 0) - \frac{1}{2} \int_0^q P(\eta) f_2(p, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^q f(0, \eta) d\eta \\ &+ \frac{1}{4} f(0, q) + \frac{1}{4} f(0, 0) - \frac{1}{2} \int_0^q P(\eta) f_2(0, \eta) d\eta - \int_0^p P(\xi) d\xi \int_0^q f_1(\xi, \eta) d\eta \\ &- \frac{1}{2} \int_0^p P(\xi) f_1(\xi, q) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^p P(\xi) f_1(\xi, 0) d\xi + \int_0^p \int_0^q P(\xi) P(\eta) f_{12}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir nun an, die Funktion $f(\xi, \eta)$ sei $= e^{-\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\pi}\right)^s}$. Dann verschwinden rechts in der Gleichung (3) für $p \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$ diejenigen von den 16 Gliedern, welche die Nummer 2, 5, 6, 7, 8, 10, 14 tragen, während die übrig gebliebenen 9 absolut konvergent sind. Wir bekommen also die Formel

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} f(\mu, \nu) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(\xi, 0) d\xi - \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} P(\eta) f_2(\xi, \eta) d\eta \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(0, \eta) d\eta + \frac{1}{4} f(0, 0) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} P(\eta) f_2(0, \eta) d\eta - \int_0^{\infty} P(\xi) d\xi \int_0^{\infty} f_1(\xi, \eta) d\eta \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} P(\xi) f_1(\xi, 0) d\xi + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(\xi) P(\eta) f_{12}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \right.$$

und weil $f(\xi, \eta)$ eine symmetrische Funktion ist, so geht endlich (4) in

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} f(\mu, \nu) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^{\infty} f(\xi, 0) d\xi + \frac{1}{4} f(0, 0) - \int_0^{\infty} P(\xi) f_1(\xi, 0) d\xi \\ &- 2 \int_0^{\infty} P(\xi) d\xi \int_0^{\infty} f_1(\xi, \eta) d\eta + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(\xi) P(\eta) f_{12}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \right.$$

über. Es ist diese Summationsformel, von welcher wir jetzt Gebrauch machen wollen. Man hat nun

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= -\frac{2s\xi}{x} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{x} \right)^{s-1} f(\xi, \eta), \\ f_{12}(\xi, \eta) &= \frac{4\xi\eta}{x^2} \left\{ s^2 \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{x} \right)^{2s-2} - s(s-1) \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{x} \right)^{s-2} \right\} f(\xi, \eta), \end{aligned}$$

und es ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\varrho^2}{x}\right)^s} \varrho d\varrho = \frac{\pi x}{4} \int_0^{\infty} e^{-t^s} dt \\ &= \frac{\pi x}{4} \Gamma\left(1 + \frac{1}{s}\right) = \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{s} O(x), \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} f(\xi, 0) d\xi = \sqrt{x} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2s}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{s} O(\sqrt{x}),$$

$$\left| \int_0^{\infty} P(\xi) f_1(\xi, 0) d\xi \right| < \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |f_1(\xi, 0)| d\xi = \frac{1}{2}.$$

Wir betrachten ferner das Integral $\int_0^{\infty} P(\xi) d\xi \int_0^{\infty} f_1(\xi, \eta) d\eta$, welches durch Einführung von Polarkoordinaten die Form annimmt

$$\frac{\pi}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} P(\varrho \cos \theta) e^{-\left(\frac{\varrho^2}{x}\right)^s} \left(\frac{\varrho^2}{x}\right)^{s-1} \varrho^2 d\varrho = -\sqrt{x} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{2s}}} \psi\left(\omega^{\frac{1}{s}}\right) d\omega,$$

indem wir

$$(6) \quad \psi(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\sqrt{xt} \cos \theta) \cos \theta d\theta$$

gesetzt haben. Wendet man hier die für nicht ganzes y gültige Reihenentwicklung

$$P(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m y}{\pi m}$$

an, so kann die Integration in (6) gliedweise ausgeführt werden; denn die Summe $\sum_{m=1}^k \frac{\sin 2\pi m y}{\pi m}$ ist in bezug auf y und k gleichmäßig beschränkt⁵⁾. Es ist aber⁶⁾

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\pi m \sqrt{x t} \cos \theta) \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2} J_1(2\pi m \sqrt{x t}),$$

wo J_1 die Besselsche Funktion mit dem Parameter 1 bezeichnet, und man hat demnach für $t > 0$

$$(7) \quad \psi(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_1(2\pi m \sqrt{x t}), \quad |\psi(t)| < \frac{C}{\sqrt{x t}},$$

wobei unter C eine absolute Konstante verstanden wird.

Das Integral

$$- \sqrt{x} \int_0^{\infty} e^{-\omega} \omega^{\frac{1}{2s}} \psi(\omega^{\frac{1}{2}}) d\omega$$

ist in bezug auf s gleichmäßig konvergent und nähert sich für $s \rightarrow \infty$ dem Werte

$$- \sqrt{x} \psi(1) = - \frac{1}{2} \sqrt{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_1(2\pi m \sqrt{x}) = O(\sqrt[4]{x}).$$

Läßt man s endlich, so hat man jedenfalls

$$\left| \int_0^{\infty} P(\xi) d\xi \int_0^{\infty} f_1(\xi, \eta) d\eta \right| < K \sqrt[4]{x} \int_0^{\infty} e^{-t'} s t^{s-1} dt = K \sqrt[4]{x} \Gamma\left(1 + \frac{1}{4s}\right).$$

Im folgenden werden wir den genauen Wert des Integrales bei endlichem s noch zu besprechen haben.

Gehen wir jetzt zu dem letzten Doppelintegrale über. Die einfachste Abschätzung zeigt, daß es $= s O(1)$ ist, was indessen für unsere Zwecke nicht ausreicht. Wir können aber schreiben

⁵⁾ Vgl. z. B. Kneser, Math. Annalen 60 (1905), S. 402–423 und Landau, diese Zeitschr. 2 (1918), S. 350–351.

⁶⁾ Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, S. 60, Formel 8.

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty P(\xi) P(\eta) f_{12}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty P(\sqrt{x} \omega^{\frac{1}{2s}} \sin \theta) P(\sqrt{x} \omega^{\frac{1}{2s}} \cos \theta) e^{-\omega} (s\omega - s + 1) d\omega \\
&= 2 \int_0^\infty \varphi(\sqrt{x} \omega^{\frac{1}{2s}}) (s\omega - s + 1) e^{-\omega} d\omega,
\end{aligned}$$

wo $\varphi(y)$ die Funktion

$$(8) \quad \varphi(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(y \sin \theta) P(y \cos \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta$$

bezeichnet. Hier läßt sich nun wieder die Reihenentwicklung der Funktion P anwenden, und wir bekommen zunächst

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k \frac{\sin(2\pi m y \sin \theta)}{m} \sum_{n=1}^k \frac{\sin(2\pi n y \cos \theta)}{n} \sin \theta \cos \theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m,n}^k \frac{1}{mn} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\pi m y \sin \theta) \sin(2\pi n y \cos \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Die hier entstehende Reihe ist aber absolut konvergent, denn man hat⁷⁾

$$\begin{aligned}
& (\sin \theta = t) \\
& \int_0^1 \sin 2\pi m y t \sin(2\pi n y \sqrt{1-t^2}) t dt = \frac{\pi}{2} \frac{mn}{m^2 + n^2} J_2(2\pi y \sqrt{m^2 + n^2})
\end{aligned}$$

und folglich wird

$$(9) \quad \varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n}^\infty \frac{J_2(2\pi y \sqrt{m^2 + n^2})}{m^2 + n^2} = \frac{1}{8\pi} \sum_{m=1}^\infty \frac{r_1(m)}{m} J_2(2\pi y \sqrt{m}),$$

wobei $r_1(m) = r(m)$, wenn m keine Quadratzahl, sonst aber $= r(m) - 4$ ist. Ein Blick auf Gleichung (9) lehrt uns, daß $\varphi(y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ ist, und daher

$$\left| 2 \int_0^\infty \varphi(\sqrt{x} \omega^{\frac{1}{2s}}) (s\omega - s + 1) e^{-\omega} d\omega \right| < \frac{C's}{\sqrt{x}},$$

wo C' wieder eine absolute Konstante bedeutet.

⁷⁾ Landau, Wiener Berichte 124 (1915), Abt. 2a, S. 469–505, zweiter Teil, § 1, Hilfssatz 5.

Stellt man die bisher gewonnenen Resultate zusammen, so ist leicht zu sehen, daß man nur $s = x^{\frac{1}{2}}$ zu setzen braucht, um die Gleichung

$$\sum_{m \leq x} r(m) = \pi x + O(x^{\frac{1}{2} + \varepsilon})$$

herauszubekommen. Hier haben wir zwar das elementare Restglied $O(\sqrt{x})$ hinter uns gelassen, aber die Größenordnung $x^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ doch nicht erreicht. Um aber einen weiteren Schritt zu tun, geben wir dem schon betrachteten Integrale die Form

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} (s\omega - s + 1) e^{-\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} J_2(2\pi \sqrt{mx} \omega^{\frac{1}{2}}) d\omega$$

und bemerken, daß

$$\left| \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} J_2(2\pi \sqrt{mx} \omega^{\frac{1}{2}}) \right| < \frac{C'' \omega^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{3}{4}-\varepsilon}}, \quad (0 < \varepsilon' < \frac{1}{4}),$$

$$\left| \int_0^{\infty} (s\omega - s + 1) e^{-\omega} \sum_{m=k+1}^{\infty} d\omega \right| < \frac{C''}{\sqrt{x}} \frac{k^{\varepsilon'-\frac{1}{4}}}{1-\varepsilon'} \int_0^{\infty} (s\omega + s + 1) e^{-\omega} \omega^{-\frac{1}{4}} d\omega,$$

was für $k \rightarrow \infty$ verschwindet. Wir können also die Reihe gliedweise integrieren und bekommen dafür den Ausdruck⁸⁾

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{[v] [v+2]} (\pi^2 mx)^{v+1} \int_0^{\infty} (s\omega - s + 1) \omega^{\frac{v+1}{2}} e^{-\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_1(m)}{m} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{[v] [v+1]} \Gamma\left(1 + \frac{v+1}{s}\right) (\pi^2 mx)^{v+1} = \frac{\pi x}{4} \sum_{m=1}^{\infty} r_1(m) g(\pi^2 mx, s),$$

indem wir die ganze Funktion von x

$$(10) \quad g(x, s) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v x^v}{[v] [v+1]} \Gamma\left(1 + \frac{v+1}{s}\right)$$

einführen, welche für $s \rightarrow \infty$ in $\frac{1}{\sqrt{x}} J_1(2\sqrt{x})$ übergeht.

⁸⁾ Es ist leicht zu zeigen, daß im allgemeinen:

$$g_{\lambda}^{(p)}(t) = \sum_{v=p}^{\infty} \frac{(-1)^v \left(\frac{t}{2}\right)^{2v+\lambda}}{[v] [v+\lambda]} = (-1)^p \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2p+\lambda}}{[p-1]} \int_0^1 (1-v)^{p-1} \varphi_{p+\lambda}\left(\frac{t^2}{4}v\right) dv,$$

wo $\varphi_1(t) = t^{-\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{t}) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v t^v}{[v] [v+1]}$. Hieraus folgt dann: $|g_{\lambda}^{(p)}(t)| < C \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2p+\lambda}}{[p]}$
und

$$\int_0^{\infty} (s\omega - s + 1) e^{-\omega} g_p^{(p)}(2\pi \sqrt{mx} \omega^{\frac{1}{2}}) d\omega < \bar{C} s \frac{(\pi^2 mx)^{p+1}}{[p-1]} \Gamma\left(1 + \frac{p+1}{s}\right) \rightarrow 0 \text{ für } p \rightarrow \infty,$$

wodurch auch die nachstehende gliedweise Integration sich als erlaubt erweist.

Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} r_1(m) g(\pi^2 m x, s)$ ist übrigens absolut konvergent, denn wir haben sowohl

$$(11) \quad \left| g(x, s) \right| < \frac{1}{x} \left| \int_0^{\infty} (s\omega - s + 1) e^{-\omega} J_2(2\sqrt{x}\omega^{\frac{1}{2s}}) d\omega \right| < \frac{K's}{x^{\frac{1}{4}}},$$

als auch

$$(11^*) \quad g(x, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} x^{\nu}}{[\nu] [\nu+1]} \int_0^{\infty} \omega^{\frac{\nu+1}{s}} e^{-\omega} d\omega \\ = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \omega^{\frac{1}{2s}} e^{-\omega} J_1(2\sqrt{x}\omega^{\frac{1}{2s}}) d\omega = O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right).$$

Gehen wir nun zur Gleichung (7) zurück, so zeigt es sich sofort, daß

$$-2 \int_0^{\infty} P(\xi) d\xi \int_0^{\infty} f_1(\xi, \eta) d\eta = \pi x \sum_{m=1}^{\infty} g(\pi^2 m^2 x, s),$$

und nach der Definition von $r_1(m)$ sind wir damit zu der folgenden Formel gelangt

$$(12) \quad \sum_{m \leq x} r(m) = \pi x + \pi x \sum_{m=1}^{\infty} r(m) g(\pi^2 m x, s) + O(x^{\epsilon}) + \frac{1}{s} O(x^{1+\epsilon}).$$

Unter Benutzung der beiden Relationen

$$\sum_{m \leq x} \frac{r(m)}{m^{\frac{s}{4}}} = O(x^{\frac{1}{4}}), \quad \sum_{m > x} \frac{r(m)}{m^{\frac{s}{4}}} = O(x^{-\frac{1}{4}}),$$

welche durch partielle Summation leicht zu beweisen sind, findet man dann

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| x \sum_{m \leq \frac{s^2}{x}} r(m) g(\pi^2 m x, s) \right| < A x^{\frac{1}{4}} \sum_{m \leq \frac{s^2}{x}} \frac{r(m)}{m^{\frac{s}{4}}} = \sqrt{s} O(1), \\ \left| x \sum_{m > \frac{s^2}{x}} r(m) g(\pi^2 m x, s) \right| < A s x^{-\frac{1}{4}} \sum_{m > \frac{s^2}{x}} \frac{r(m)}{m^{\frac{s}{4}}} = \sqrt{s} O(1), \end{array} \right.$$

und die Annahme $s = x^{\frac{1}{2}}$ liefert also

$$\sum_{m \leq x} r(m) = \pi x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}),$$

w. z. b. w.

Stockholm, im Mai 1919.

(Eingegangen am 8. Juli 1919.)