

14.

Über den Werth der Reihen

$R_n = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \text{etc. in infin.}$ und

$S_n = 1^n - 3^n + 5^n - \text{etc. in infin.}$

(Von Herrn Th. Clausen zu München.)

1. Es ist

$$1. \quad \begin{cases} z(1+z)^{-1} = z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - \text{etc.} = Z_0, \\ z \frac{\partial \cdot z(1+z)^{-1}}{\partial z} = z - 2z^2 + 3z^3 - 4z^4 + 5z^5 - \text{etc.} = Z_1, \\ z \frac{\partial z \partial z(1+z)^{-1}}{\partial z^2} = z - 2^2 z^2 + 3^2 z^3 - 4^2 z^4 + 5^2 z^5 - \text{etc.} = Z_2, \\ \text{etc.} \\ z \frac{\partial Z_{n-1}}{\partial z} = z - 2^n z^2 + 3^n z^3 - 4^n z^4 + 5^n z^5 - \text{etc.} = Z_n. \end{cases}$$

Setzt man $z = y - 1$, so wird $z(1+z)^{-1} = 1 - \frac{1}{y}$ und $\partial z = \partial y$; folglich:

$$2. \quad \begin{cases} Z_0 = 1 - \frac{1}{y}, \\ Z_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}, \\ Z_2 = -\frac{1}{y} + 3\frac{1}{y^2} - 2\frac{1}{y^3}, \\ Z_3 = \frac{1}{y} - 7\frac{1}{y^2} + 12\frac{1}{y^3} - 6\frac{1}{y^4}. \end{cases}$$

Wenn man $z = 1$ oder $y = 2$ setzt, so verwandeln sich Z_0, Z_1, Z_2 resp. in R_0, R_1, R_2 ; man hat demnach

$$R_0 = \frac{1}{2}; \quad R_1 = \frac{1}{4}; \quad R_2 = 0; \quad R_3 = -\frac{1}{8}.$$

Aus den Gleichungen (2.) sieht man, daß der allgemeine Ausdruck die Form haben muß:

$$3. \quad Z_n = \pm \frac{1}{y} \mp a^{(n,2)} \frac{1}{y^2} \pm a^{(n,3)} \frac{1}{y^3} \mp a^{(n,4)} \frac{1}{y^4} \pm \text{etc.}$$

und daß

$$4. \quad \begin{cases} a^{(n, n+1)} = 1.2.3.4 \dots n, \\ a^{(n, i)} = 0, \end{cases}$$

wenn $i > n+1$. Die Gleichung (3.) giebt hieraus

$$Z_{n+1} = (y-1) \frac{\partial Z_n}{\partial y} = \mp \frac{1}{y} \pm (2a^{(n,2)} + 1) \frac{1}{y^2} \mp (3a^{(n,3)} - 2a^{(n,2)}) \frac{1}{y^3} + \text{etc.},$$

folglich ist:

$$5. \quad \begin{cases} a^{(n+1, 2)} = 2a^{(n, 2)} + 1, & a^{(n+1, 3)} = 3a^{(n, 3)} + 2a^{(n, 2)}, \\ a^{(n+1, 4)} = 4a^{(n, 4)} + 3a^{(n, 3)}, & \dots \dots a^{(n+1, i+1)} = (i+1)a^{(n, i+1)} + ia^{(n, i)}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt: $\frac{a^{(n+1, 2)}}{2^{n+1}} = \frac{a^{(n, 2)}}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$; folglich ist

$$\frac{a^{(n, 2)}}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n; \text{ also}$$

$$6. \quad a^{(n, 2)} = 2^n - 1.$$

Die zweite der Gleichungen (5.) giebt: $\frac{a^{(n+1, 3)}}{3^{n+1}} = \frac{a^{(n, 3)}}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$; folglich eben so:

$$\frac{a^{(n, 3)}}{3^n} = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right], \text{ oder}$$

$$7. \quad a^{(n, 3)} = 3^n - 2 \cdot 2^n + 1.$$

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$\frac{a^{(n+1, 4)}}{4^{n+1}} = \frac{a^{(n, 4)}}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 3\left(\frac{2}{4}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1},$$

folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{a^{(n, 4)}}{4^n} &= \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n - 3\left[\frac{2}{4} + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{4}\right)^n\right] \\ &\quad + 3\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right], \end{aligned}$$

oder:

$$8. \quad a^{(n, 4)} = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1.$$

Die Gleichungen (6., 7., 8.) lassen vermuthen, daß allgemein

$$9. \quad a^{(n, i)} = i^n - (i-1)(i-1)^n + \frac{(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2}(i-2)^n - \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(i-3)^n + \text{etc.}$$

sei. Unter dieser Voraussetzung erhält man aus der letztern der Gleichungen (5.)

$$\frac{a^{(n+1, i+1)}}{(i+1)^{n+1}} = \frac{a^{(n, i+1)}}{(i+1)^n} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^{n+1} - \frac{i}{1} \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{n+1} + \frac{i \cdot i-1}{1 \cdot 2} \left(\frac{i-2}{i+1}\right)^{n+1} - \text{etc.}, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^{(n, i+1)}}{(i+1)^n} &= \frac{i}{i+1} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 + \left(\frac{i}{i+1}\right)^3 + \dots + \left(\frac{i}{i+1}\right)^n \\ &\quad - i \left[\frac{i-1}{i+1} + \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2 + \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^3 + \dots + \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n\right] \\ &\quad + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} \left[\frac{i-2}{i+1} + \left(\frac{i-2}{i+1}\right)^2 + \left(\frac{i-2}{i+1}\right)^3 + \dots + \left(\frac{i-2}{i+1}\right)^n\right] \\ &\quad - \text{etc.} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{a^{(n, i+1)}}{(i+1)^n} = i \left[1 - \left(\frac{i}{i+1}\right)^n\right] - \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} \left[1 - \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n\right] + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left[1 - \left(\frac{i-2}{i+1}\right)^n\right] - \text{etc.}$$

da aber $(1-1)^i = 1 - i + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} - \text{etc.} = 0$ ist, so erhält man endlich:

$$a^{(n, i+1)} = (i+1)^n - i \cdot 2^n + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}(i-1)^n - \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(i-2)^n + \text{etc.}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt: $\frac{a^{(n+1,3)}}{3^{n+1}} = \frac{a^{(n,3)}}{3^n} + (2n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$, also ist

$$\frac{a^{(n,3)}}{3^n} = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + (2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n;$$

um diese Reihe summiren zu können, und zugleich einige nachfolgende, bemerke ich, daß

$$14. \begin{cases} x + x^2 + x^3 \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}, \\ (1+a)x + (2+a)x^2 + (3+a)x^3 + \dots + (n+a)x^n = \\ \frac{x^2 - x^{n+2}}{(1-x)^2} + \frac{(1+a)x - (n+1+a)x^{n+1}}{1-x}, \\ (1+a)(1+a')x + (2+a)(2+a')x^2 + \dots + (n+a)(n+a')x^n = \\ 2 \frac{x^3 - x^{n+3}}{(1-x)^3} + \frac{(3+a+a')x^2 - (2n+3+a+a')x^{n+2}}{(1-x)^2} + \frac{(1+a)(1+a')x - (n+1+a)(n+1+a')x^{n+1}}{1-x}; \end{cases}$$

man erhält also:

$$15. \quad n^{(n,3)} = 3^n - (n+1).$$

Es ist ferner $\frac{a^{(n+1,5)}}{5^{n+1}} = \frac{a^{(n,5)}}{5^n} + \frac{2n-1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \frac{(2n-1)(n+1)}{5^{n+1}}$, demnach

$$\begin{aligned} \frac{a^{(n,5)}}{5^n} &= \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^3 \dots (n - \frac{3}{2}) \left(\frac{3}{5}\right)^n \right] \\ &\quad - 2 \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot 3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \dots (n - \frac{3}{2}) n \left(\frac{1}{5}\right)^n \right], \end{aligned}$$

woraus man durch Hülfe der Gleichungen (14.) erhält:

$$16. \quad a^{(n,5)} = 5^n - (n+1)3^n + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}.$$

Dieser Ausdruck deutet auf das allgemeine Gesetz der Coëfficienten

$$17. \quad a^{(n,2\mu+1)} = (2\mu+1)^n - (n+1)(2\mu-1)^n + \frac{n+1 \cdot n}{2 \cdot 2} (2\mu-3)^n \dots \pm \frac{n+1 \cdot n \dots n-\mu+2}{1 \cdot 2 \dots \mu},$$

und in der That wird der allgemeinen Bedingungs-Gleichung in (13.) dadurch Genüge gethan. Setzt man in (12.) statt φ , $\frac{\pi}{2} - \varphi$, und also statt $\partial \varphi$, $-\partial \varphi$, so verändern bloß die M mit ungeradem Index die Zeichen. Es wird also für den Werth von $\varphi = \frac{\pi}{4}$, wodurch $M_{2\mu+1}$ in $S_{2\mu+1}$ übergeht,

$$S_{2\mu+1} = -S_{2\mu+1},$$

folglich $S_{2\mu+1} = 0$. Ferner ist $a^{(n,2\mu+1)} = \pm a^{(n,2n-2\mu+1)}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Substituirt man noch hierin $\varphi = \frac{\pi}{4}$, so erhält man:

$$18. \quad 2^{2n} S_{2n} = 1 - a^{(2n,3)} + a^{(2n,5)} - \text{etc.} \dots \pm a^{(2n,n-1)} \mp \frac{1}{2} a^{(2n,n+1)}.$$

München, den 23. Januar 1831.