ÜBER DIE APPROXIMATION EINER STETIGEN FUNKTION DURCH EINE GANZE RATIONALE FUNKTION.

Von **Edmund Landau** (Berlin).

Adunanza del 26 gennajo 1908.

Einleitung.

Bekanntlich hat Weierstrass [1]) zuerst den Satz bewiesen:

(*A*). *Wenn eine für* $a \leqq x \leqq b$ *stetige reelle Funktion* $f(x)$ *und eine positive Grösse* δ *gegeben ist, so gibt es eine ganze rationale Funktion* $G(x)$ *derart, dass für* $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - G(x)| < \delta$$

ist.

Weierstrass hat auch den entsprechenden Satz für Funktionen mehrerer Variabeln bewiesen. Seitdem sind für diese Sätze eine Reihe anderer Beweise veröffentlicht worden [2]). Ich werde in § 1 für den Fall einer Variabeln und in § 2 für den Fall mehrerer Variabeln eine neue Beweisanordnung angeben, welche der ursprünglichen Weierstrass'schen am ähnlichsten, aber in einem wesentlichen Punkte einfacher ist. Auf den von mir benutzten Diskontinuitätsfaktor bin ich bei einem anderen, leichteren Problem durch die kürzlich veröffentlichte Korrespondenz von Hermite und Stieltjes [3]) aufmerksam geworden. Stieltjes machte in einem Briefe vom 12. September 1893 eine kurze, jenen Faktor erwähnende Andeutung über den Beweis eines Satzes, welchen Herr Lerch [4]) schon vordem — ohne dass es Stieltjes bekannt war — aus dem

[1]) *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen* [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1885, S. 633-639, 789-805]; *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente* [*Mathematische Werke*, Bd. III (1903), S. 1-37]. Derjenige Teil der Arbeit, welcher den Satz für mehrere Variable beweist, ist erst in den Werken (Bd. III) als N° 2 auf S. 27-37 gedruckt worden.

[2]) Die genaueren Literaturangaben und eine vergleichende Darstellung dieser Beweise siehe in Herrn Borel's Buch: *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (Paris, 1905), S. 50-66.

[3]) *Correspondance d'*Hermite *et de* Stieltjes, Bd. II (Paris, 1905), S. 337-339.

[4]) *O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících* [Rozpravy české Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze, II. Kl., Bd. I (1892), No. 33, S. 1-7], S. 6-7. Herr Lerch hat seine damalige Untersuchung in der Arbeit wiederaufgenommen und fortgesetzt: *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'*Abel [Acta Mathematica, Bd. XXVII (1903), S. 339-351].

WEIERSTRASS'schen gefolgert hatte [5]); im § 3 werde ich in STIELTJES' Sinn diesen direkten Beweis genauer ausführen.

§ 1.

Es sei $f(x)$ eine für $a \leqq x \leqq b$ definierte reelle stetige Funktion und $\delta > 0$. Der WEIERSTRASS'sche Satz sagt aus: Es gibt eine ganze rationale Funktion $G(x)$ derart, dass für $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x) - G(x)| < \delta \tag{1}$$

ist.

Beim Beweise darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass $0 < a < b < 1$ ist [6]). Ferner darf angenommen werden, dass $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ definiert und stetig ist [7]).

Ich behaupte, dass alsdann für $a \leqq x \leqq b$ bei ganzzahligem [8]), ins Unendliche wachsendem n die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{\int_0^1 f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} = f(x) \tag{2}$$

besteht und dass der Ausdruck

$$\frac{\int_0^1 f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} \tag{3}$$

sich im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmässig für $n = \infty$ dem Grenzwert $f(x)$ nähert.

Damit ist dann offenbar der WEIERSTRASS'sche Satz bewiesen. Denn für festes n ist der Ausdruck (3) eine ganze rationale Funktion von x, da der Integrand eine ganze rationale Funktion von x mit stetigen Funktionen von z als Koeffizienten ist [9]); für jedes hinreichend grosse n erfüllt also die durch (3) definierte Funktion $G(x)$ die Relation (1).

Ich beweise nun folgendermassen die Gleichung (2) und zwar, wie erforderlich, ihre gleichmässige Giltigkeit für $a \leqq x \leqq b$.

---

[5]) Übrigens war STIELTJES nicht zu den schönen Anwendungen gelangt, welche Herr LERCH von diesem Satze gemacht hat.

[6]) Denn durch eine Substitution

$$x = A + By$$

lässt sich dies stets erreichen.

[7]) Denn man kann ja $f(x) = f(a)$ für $0 \leqq x < a$ und $f(x) = f(b)$ für $b < x \leqq 1$ definieren.

[8]) Ein Blick auf den folgenden Beweis zeigt, dass auch das stetig ins Unendliche wachsende n diese Eigenschaften hat; doch brauche ich das nicht.

[9]) Bei dem WEIERSTRASS'schen Beweise seines Satzes war der Integrand für jeden Wert des Parameters eine ganze transzendente Funktion von x, und es bedurfte einiger besonderer Überlegungen, um festzustellen, dass das Integral eine ganze transzendente Funktion von x ist (welche alsdann durch eine ganze rationale Funktion approximiert wird).

Es ist [10]) für $n \geqq 1$

$$(4) \quad \int_0^1 (1-u^2)^n du \geqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-u^2)^n du \geqq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n du = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

und, wenn $0 < \varepsilon < 1$ ist,

$$\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du \leqq \int_\varepsilon^1 (1-\varepsilon^2)^n du < (1-\varepsilon^2)^n,$$

also in Verbindung mit (4)

$$\frac{\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} < \sqrt{n}(1-\varepsilon^2)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

$$(5) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du}{\int_0^1 (1-u^2)^n du} = 0.$$

Man wähle nun g so, dass für $0 \leqq x \leqq 1$

$$(6) \quad |f(x)| \leqq g$$

ist.

$\delta > 0$ sei eine beliebig gegebene positive Grösse. Zu beweisen ist: Es existiert ein von x unabhängiges $\nu = \nu(\delta)$ derart, dass für $a \leqq x \leqq b$ und alle $n \geqq \nu$

$$(7) \quad \left| \frac{\int_0^1 f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} - f(x) \right| < \delta$$

ist [11]).

Man wähle, was wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ möglich ist, ein positives $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ so, dass

$$0 < a-\varepsilon < b+\varepsilon < 1$$

ist und dass für

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq x' \leqq 1, \qquad |x-x'| \leqq \varepsilon$$

die Beziehung

$$(8) \quad |f(x)-f(x')| < \frac{\delta}{2}$$

besteht. Dann ist für $a \leqq x \leqq b$

$$0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 1,$$

[10]) Die bekannten Tatsachen, dass

$$\int_0^1 (1-u^2)^n du = \frac{2.4 \ldots 2n}{3.5 \ldots (2n+1)}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1-u^2)^n du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ist, gebrauche ich nicht.

[11]) Übrigens würde es für meinen Zweck genügen, zu konstatieren, dass (7) für ein $n = n(\delta)$ erfüllt ist.

also

$$I = \int_0^1 f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz$$

$$= \int_0^{x-\varepsilon} f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz + \int_{x+\varepsilon}^1 f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz$$

(9) $$= I_1 + I_2 + I_3 .$$

Hierin ist nach (6) zunächst

(10) $$|I_1| \leqq \int_0^{x-\varepsilon} g\left(1-(z-x)^2\right)^n dz = g\int_\varepsilon^x (1-u^2)^n du < g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$

(11) $$|I_3| \leqq \int_{x+\varepsilon}^1 g\left(1-(z-x)^2\right)^n dz = g\int_\varepsilon^{1-x} (1-u^2)^n du < g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du.$$

Ferner ist

$$I_2 - 2f(x)\int_0^1 (1-u^2)^n du$$

$$= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)\left(1-(z-x)^2\right)^n dz - 2f(x)\int_0^\varepsilon (1-u^2)^n du - 2f(x)\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)(1-u^2)^n du - f(x)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-u^2)^n du - 2f(x)\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(f(x+u)-f(x)\right)(1-u^2)^n du - 2f(x)\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$

also mit Rücksicht auf (6) und (8)

$$\left|I_2 - 2f(x)\int_0^1 (1-u^2)^n du\right| < \frac{\delta}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1-u^2)^n du + 2g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du$$

$$= \delta\int_0^\varepsilon (1-u^2)^n du + 2g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du$$

(12) $$< \delta\int_0^1 (1-u^2)^n du + 2g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du.$$

Aus (9), (10), (11) und (12) folgt

$$\left|I - 2f(x)\int_0^1 (1-u^2)^n du\right| \leqq |I_1| + |I_3| + \left|I_2 - 2f(x)\int_0^1 (1-u^2)^n du\right|$$

$$< g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du + g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du + \delta\int_0^1 (1-u^2)^n du + 2g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du$$

$$= \delta\int_0^1 (1-u^2)^n du + 4g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$

(13) $$\left|\frac{I}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} - f(x)\right| < \frac{\delta}{2} + 2g\frac{\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du}{\int_0^1 (1-u^2)^n du}.$$

Die rechte Seite von (13) ist von x unabhängig und nach (5) ist für alle $n \geqq \nu(\delta)$ ihr zweites Glied $< \frac{\delta}{2}$, also

$$\left|\frac{I}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} - f(x)\right| < \delta,$$

womit (7), also (2) gleichmässig, also der Weierstrass'sche Satz (A) bewiesen ist.

WEIERSTRASS legte seinem Beweise die Identität zu Grunde:

$$\lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x),$$

in der $f(x)$ eine für jedes reelle x definierte, reelle und stetige Funktion bezeichnet, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat, und in der k eine positive Grösse ist. WEIERSTRASS betonte ausdrücklich, dass diese Identität [12]) bekannt war; neu war, dass sie den « WEIERSTRASS'schen Satz » (A) liefert.

Ebenso ist die von mir benutzte Identität

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\int_0^1 f(z)(1-(z-x)^2)^n dz}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} = f(x)$$

nicht neu; z. B. entwickelt STIELTJES in seinem Briefe an HERMITE vom 27. November 1891 [13]) im Anschluss an LAPLACE eine Formel, welche sie als ganz speziellen Fall enthält. Dagegen ist mir in der Literatur nicht die Bemerkung begegnet, dass (2) für $a \leqq x \leqq b$, wo $0 < a < b < 1$ ist, gleichmässig gilt und infolgedessen zum Beweise des WEIERSTRASS'schen Satzes benutzt werden kann. Diese Tatsache hervorzuheben und in einer für Vorlesungszwecke handlichen Form darzustellen war der Zweck des § 1.

§ 2.

Dieselbe Methode gestattet, den WEIERSTRASS'schen Satz für Funktionen mehrerer Variabeln zu beweisen, d. h. den Satz:

(B). *Die reelle Funktion $f(x_1, \ldots, x_\rho)$ sei für $a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \ldots, a_\rho \leqq x_\rho \leqq b_\rho$ stetig. Dann gibt es nach Annahme einer positiven Grösse δ eine ganze rationale Funktion $G(x_1, \ldots, x_\rho)$ derart, dass für $a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \ldots, a_\rho \leqq x_\rho \leqq b_\rho$*

$$|f(x_1, \ldots, x_\rho) - G(x_1, \ldots, x_\rho)| < \delta$$

ist.

Zum Beweise ist es hinreichend nachzuweisen: Es gibt eine ganze rationale Funktion von x_1

$$(14) \qquad \varphi_m(x_2, \ldots, x_\rho)x_1^m + \cdots + \varphi_1(x_2, \ldots, x_\rho)x_1 + \varphi_0(x_2, \ldots, x_\rho),$$

deren Koeffizienten für $a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \ldots, a_\rho \leqq x_\rho \leqq b_\rho$ definierte stetige reelle Funktionen von $x_2, \ldots, x_\rho$ sind, derart, dass für

$$(15) \qquad a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \ldots, a_\rho \leqq x_\rho \leqq b_\rho$$

$$(16) \qquad \left| f(x_1, \ldots, x_\rho) - \sum_{\lambda=0}^{m} \varphi^\lambda(x_2, \ldots, x_\rho) x_1^\lambda \right| < \delta$$

---

[12]) Er stellt ihr eine Klasse analoger Identitäten zur Seite.

[13]) Vergl. S. 185-186 des in Anm. [3]) zitierten Bandes.

ist; denn die wiederholte Anwendung dieser Reduktion gestattet, die gegebene Funktion durch eine ganze rationale Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ zu approximieren.

Ferner darf ich annehmen, dass $0 < a_1 < b_1 < 1$ ist und dass $f(x_1, \ldots, x_\rho)$ für

(17) $$0 \leqq x_1 \leqq 1, \qquad a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \ldots, a_\rho \leqq x_\rho \leqq b_\rho$$

definiert, reell und stetig ist.

Ich setze

$$I = \int_0^1 f(z, x_2, \ldots, x_\rho)\left(1 - (z - x_1)^2\right)^n dz$$

und werde nachweisen, dass im Gebiete (15) für $n \geqq \nu = \nu(\delta)$

(18) $$\left|\frac{I}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} - f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)\right| < \delta$$

ist; damit wird offenbar (16), also der WEIERSTRASS'sche Satz (B) bewiesen sein, da bei festem $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{I}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du}$$

von der Gestalt (14) ist.

g sei so gewählt, dass im Gebiete (17)

(19) $$|f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)| \leqq g$$

ist. Ein positives $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ sei, was wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)$ im Gebiete (17) möglich ist, so gewählt, dass

$$0 < a_1 - \varepsilon < b_1 + \varepsilon < 1$$

ist und dass für

$$0 \leqq x_1 \leqq 1,\ 0 \leqq x_1' \leqq 1,\ |x_1 - x_1'| \leqq \varepsilon,\ a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \ldots, a_\rho \leqq x_\rho \leqq b_\rho$$
$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_\rho) - f(x_1', x_2, \ldots, x_\rho)| < \frac{\delta}{2}$$

ist.

Dann ist für $a_1 \leqq x_1 \leqq b_1$

$$0 < x_1 - \varepsilon < x_1 + \varepsilon < 1,$$

$$\begin{aligned} I = & \int_0^{x_1-\varepsilon} f(z, x_2, \ldots, x_\rho)\left(1-(z-x_1)^2\right)^n dz + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(z, x_2, \ldots, x_\rho)\left(1-(z-x_1)^2\right)^n dz \\ & + \int_{x_1+\varepsilon}^1 f(z, x_2, \ldots, x_\rho)\left(1-(z-x_1)^2\right)^n dz \\ & = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Hierin ist nach (19)

$$|I_1| \leqq \int_0^{x_1-\varepsilon} g\left(1-(z-x_1)^2\right)^n dz < g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$
$$|I_3| \leqq \int_{x_1+\varepsilon}^1 g\left(1-(z-x_1)^2\right)^n dz < g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$

$$I_2-2f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\int_0^1 (1-u^2)^n du = \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(z, x_2, \dots, x_\rho)\big(1-(z-x_1)^2\big)^n dz$$
$$-2f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\int_0^\varepsilon (1-u^2)^n du - 2f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du$$
$$=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\big(f(x_1+u, x_2, \dots, x_\rho)-f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\big)(1-u^2)^n du - 2f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$
$$\left|I_2 - 2f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\int_0^1 (1-u^2)^n du\right| < \delta\int_0^1 (1-u^2)^n du + 2g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du.$$

Also ist

$$\left|I - 2f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\int_0^1 (1-u^2)^n du\right| < \delta\int_0^1 (1-u^2)^n du + 4g\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du,$$
$$\left|\frac{I}{2\int_0^1 (1-u^2)^n du} - f(x_1, x_2, \dots, x_\rho)\right| < \frac{\delta}{2} + 2g\frac{\int_\varepsilon^1 (1-u^2)^n du}{\int_0^1 (1-u^2)^n du},$$

was für $n \geqq \nu(\delta)$ kleiner als δ ist. Damit ist (18), also der allgemeine WEIERSTRASS'sche Satz (B) bewiesen.

§ 3.

Herr LERCH hat aus dem WEIERSTRASS'schen Satze (A) die Folgerung gezogen und von ihr wichtige Anwendungen gemacht:

(C). *Eine für* [14] $0 \leqq x \leqq 1$ *stetige reelle Funktion* $\chi(x)$ *erfülle für alle ganzzahligen* $\nu \geqq 0$ *die Gleichung*

$$\int_0^1 x^\nu \chi(x)\, dx = 0. \tag{20}$$

Dann ist identisch

$$\chi(x) = 0.$$

Herr LERCH bewies [15] dies so: Wäre $\chi(x)$ nicht identisch 0, so wäre

$$\int_0^1 |\chi(x)|\, dx > 0,$$

also eine Zahl δ so wählbar, dass

$$0 < \delta < \frac{\int_0^1 (\chi(x))^2 dx}{\int_0^1 |\chi(x)|\, dx} \tag{21}$$

ist. Eine ganze rationale Funktion $G(x)$ werde nun so gewählt, dass für $0 \leqq x \leqq 1$

$$|\chi(x) - G(x)| < \delta$$

ist, d. h.

$$\chi(x) = G(x) + \vartheta\delta,$$

---

[14]) Natürlich ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, das Intervall $(a \dots b)$ gleich $(0 \dots 1)$ anzunehmen, was im § 3 geschieht.

[15]) Vergl. die in Anm. [4]) zitierten Abhandlungen, S. 6-7 bezw. S. 346-347.

wo

$$|\vartheta| = |\vartheta(x)| < 1$$

ist. Die Voraussetzung (20) heisst, modern ausgedrückt: $\chi(x)$ ist zu x^ν für jedes $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ orthogonal. $\chi(x)$ ist also zu jeder ganzen rationalen Funktion orthogonal; speziell ist

$$\int_0^1 \chi(x)\, G(x)\, dx = 0,$$

also

$$\int_0^1 (\chi(x))^2 dx = \int_0^1 \chi(x)\big(G(x) + \vartheta\delta\big) dx$$

$$= \delta \int_0^1 \chi(x)\vartheta dx \leqq \delta \int_0^1 |\chi(x)||\vartheta| dx < \delta \int_0^1 |\chi(x)| dx,$$

$$\frac{\int_0^1 (\chi(x))^2 dx}{\int_0^1 |\chi(x)| dx} < \delta,$$

was der Relation (21) widerspricht.

STIELTJES [16]) deutet nun einen direkteren Beweis des Satzes (C) an, indem er darauf aufmerksam macht, dass [17]), wenn ξ eine Zahl zwischen 0 und 1 ist und

$$\chi(\xi) > 0$$

ist, das Integral

(22) $$\int_0^1 \left(1 - (x - \xi)^2\right)^n \chi(x)\, dx$$

für hinreichend grosse ganzzahlige n positiv ist, während es nach (20) 0 sein müsste. Streng durchgeführt lautet dieser STIELTJES'sche Beweis des Satzes (C) etwa folgendermassen.

Wäre nicht identisch

$$\chi(x) = 0,$$

so gäbe es eine positive Zahl p und ein Intervall $(\xi - \varepsilon \ldots \xi + \varepsilon)$ derart, dass

$$0 < \xi - \varepsilon < \xi + \varepsilon < 1$$

und für $\xi - \varepsilon \leqq x \leqq \xi + \varepsilon$

$$\chi(x) > p$$

ist. Es sei $g > 0$ so gewählt, dass für $0 \leqq x \leqq 1$

$$\chi(x) > -g$$

---

[16]) Vergl. die in Anm. [3]) zitierte Stelle.

[17]) Ich ändere die Bezeichnungen der Einheitlichkeit wegen.

ist. Dann ist

$$\int_0^1 \left(1-(x-\xi)^2\right)^n \chi(x)dx$$

$$=\int_0^{\xi-\varepsilon} \left(1-(x-\xi)^2\right)^n \chi(x)dx+\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \left(1-(x-\xi)^2\right)^n \chi(x)dx+\int_{\xi+\varepsilon}^1 \left(1-(x-\xi)^2\right)^n \chi(x)dx$$

$$>-g\int_0^{\xi-\varepsilon} (1-\varepsilon^2)^n dx+p\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \left(1-(x-\xi)^2\right)^n dx-g\int_{\xi+\varepsilon}^1 (1-\varepsilon^2)^n dx$$

$$>-2g(1-\varepsilon^2)^n+2p\int_0^{\varepsilon}(1-u^2)^n du$$

$$>-2g(1-\varepsilon^2)^n+2p\int_0^1(1-u^2)^n du-2p\int_{\varepsilon}^1(1-u^2)^n du$$

$$>2p\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-u^2)^n du-2g(1-\varepsilon^2)^n-2p(1-\varepsilon^2)^n$$

$$> 2p\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-(2g+2p)(1-\varepsilon^2)^n. \tag{23}$$

Die rechte Seite von (23) ist für hinreichend grosses n positiv; also wäre bei passender Wahl einer ganzen positiven Zahl n

$$\int_0^1 \left(1-(x-\xi)^2\right)^n \chi(x)dx > 0,$$

während das Integral (22) nach Voraussetzung 0 ist.

Übrigens hat kürzlich Herr PHRAGMÉN [18]) einen einfachen Beweis von (C) angegeben, welcher auch den WEIERSTRASS'schen Satz nicht benutzt, sondern sich auf einen — von Herrn VON KOCH bei anderen Untersuchungen eingeführten — transzendenten Diskontinuitätsfaktor stützt; doch ist die Anwendung des STIELTJES'schen rationalen Diskontinuitätsfaktors noch einfacher als jene Beweisanordnung.

STIELTJES gab a. a. O. [19]) noch einen anderen, viel transzendenteren Beweis von (C) an, welcher sich auf einen Satz HERMITE's aus der Theorie der Funktionen komplexen Argumentes stützt.

Berlin, den 11. Januar 1908.

EDMUND LANDAU.

[18]) *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions* [Acta Mathematica, Bd. XXVIII (1904), S. 351-368], S. 361-363.

[19]) Vergl. die in Anm. [3]) zitierte Stelle.