ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 210. Nr. 5031. 15.

Die Ellipsoidhypothese in den Spezialbewegungen der Fixsterne.

Erweiterung der *Schwarzschild*schen Hypothese auf das dreiachsige Ellipsoid. Von *J. Lense.*

Einleitung. Problemstellung.

Die Annahme, daß die Spezialbewegungen der Fixsterne das Gesetz der zufälligen Fehler oder *Maxwell*sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz befolgen, wurde nach den *Kapteyn*schen Untersuchungen von *A. S. Eddington* [1]) durch seine sogenannte Zweischwarmhypothese ersetzt, nach der das System der Fixsterne aus zwei Schwärmen besteht, die einander wie zwei Gase durchdringen, wobei in jedem Schwarm die Spezialgeschwindigkeiten nach dem *Maxwell*schen Gesetz verteilt sind. Dieser dualistischen Ansicht stellte *K. Schwarzschild* [2]) eine unitarische Hypothese gegenüber, welche die Gesetzmäßigkeiten in den Eigenbewegungen der Fixsterne ebenso gut darstellt wie die *Eddington*sche. *Schwarzschild* setzt die Anzahl der Sterne, deren Spezialgeschwindigkeitskomponenten zwischen U und $U+dU$, V und $V+dV$, W und $W+dW$ liegen, nach dem verallgemeinerten *Maxwell*schen Gesetz gleich

$$dN = K e^{-AU^2-BV^2-CW^2}\, dU\, dV\, dW$$

und sucht aus reinen Abzählungen der Sterne nach dem Positionswinkel ihrer Eigenbewegung die in diesem Ansatz vorkommenden Konstanten zu bestimmen, wobei er noch die vereinfachende Annahme $B = C$ macht, also das Geschwindigkeitsverteilungsellipsoid $AU^2+BV^2+CW^2 = 1$ von vornherein als Rotationsellipsoid voraussetzt.

Im folgenden soll der Versuch gemacht werden, mit Hilfe desselben Materials die Konstanten im Falle des dreiachsigen Ellipsoids zu ermitteln. Die Hypothese des dreiachsigen Ellipsoids wurde allerdings schon von *C. V. L. Charlier* [3]) und seinen Schülern *S. D. Wicksell* [4]) und *W. Gyllenberg* [5]) behandelt, aber unter Zugrundelegung eines gänzlich verschiedenen Materials. Diese Astronomen betrachten nämlich die Sterngeschwindigkeiten als Kollektivmaßgegenstände und setzen daher die Anzahl der Sterne mit den Geschwindigkeitskomponenten U, V, W gleich

$$dN = K e^{-A(U-U_0)^2-B(V-V_0)^2-C(W-W_0)^2}\, dU\, dV\, dW + \text{höhere Glieder}$$

wobei U_0, V_0, W_0 die Mittel sämtlicher Geschwindigkeitskomponenten U, V, W, d. h. die Komponenten der negativen Sonnengeschwindigkeit bedeuten. Nach dieser Auffassung wäre also die Ellipsoidhypothese eine erste Näherung in der allgemeinen statistischen Theorie der Eigenbewegungen der Fixsterne. Ein weiterer, wichtiger Unterschied zwischen der *Charlier*schen und der vorliegenden Arbeit liegt in der Verwendung des zugrunde liegenden Materials an Eigenbewegungen. *Charlier* verwendet die Eigenbewegungen in beiden Koordinaten, Rektaszension und Deklination, während wir im folgenden nur die *Eddington*schen Abzählungen der Sterne nach dem Positionswinkel ihrer Eigenbewegung, also nur die Richtungen der Eigenbewegungen, benutzen wollen, um die *Schwarzschild*schen Grundlagen vollständig beizubehalten.

I. Verteilungsfunktion der Spezialgeschwindigkeiten.

Wir setzen also die Anzahl der Sterne, deren Spezialgeschwindigkeiten, auf ein bestimmtes, vorläufig noch unbekanntes Koordinatensystem bezogen, zwischen U_1 und U_1+dU_1, V_1 und V_1+dV_1, W_1 und W_1+dW_1 liegen, gleich

$$dN = K e^{-A_1 U_1^2 - B_1 V_1^2 - C_1 W_1^2}\, dU_1\, dV_1\, dW_1\,. \qquad (1)$$

Unsere Aufgabe ist es, die Lage dieses Koordinatensystems gegenüber dem gebräuchlichen astronomischen und ebenso die Konstanten K, A_1, B_1, C_1 zu bestimmen. Zu diesem Zwecke transformieren wir den Ausdruck (1) mittels der Gleichungen der Koordinatentransformation auf das gewöhnliche astronomische Koordinatensystem, dessen X-Achse nach dem Frühlingspunkt, dessen Y-Achse nach dem um 90° davon abstehenden Punkt des Äquators und dessen Z-Achse nach dem Nordpol weist. Wir erhalten in diesem zweiten Koordinatensystem

$$dN = K e^{-f}\, dU_2\, dV_2\, dW_2 \qquad (2)$$

wobei $f = A_2 U_2^2 + B_2 V_2^2 + C_2 W_2^2 + 2D_2 V_2 W_2 + 2E_2 W_2 U_2 + 2F_2 U_2 V_2$ und die Richtungskosinus der Winkel zwischen den Achsen der beiden Systeme durch die Tabelle

$$\begin{array}{c|ccc} & U_2 & V_2 & W_2 \\ \hline U_1 & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ V_1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ W_1 & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{array} \qquad (3)$$

gegeben sind. Wenn wir also mit *Schwarzschild* die Fläche

$$A_1 U_1^2 + B_1 V_1^2 + C_1 W_1^2 = 1$$

als Geschwindigkeitsellipsoid bezeichnen, so brauchen wir nur das Ellipsoid $f = 1$ auf seine Hauptachsen zu reduzieren, um sofort die Größen A_1, B_1, C_1 und die Lage des ersten Koordinatensystems gegenüber dem zweiten zu erhalten. Die weitere Aufgabe besteht daher darin, die Konstanten der Gleichung $f = 1$ zu berechnen.

Zu dem Ende greifen wir, wie *Eddington* und *Schwarzschild*, auf der Sphäre sieben Regionen heraus, die Polkalotte

[1]) *A. S. Eddington.* The Systematic Motion of the Stars, Monthly Notices of the Roy. Astr. Society Bd. 67, S. 34, 1907.
[2]) *K. Schwarzschild.* Über die Eigenbewegungen der Fixsterne, Göttinger Nachrichten 1907, S. 614.
[3]) *C. V. L. Charlier.* Studies in Stellar Statistics, Meddelanden från Lunds Astr. Obs., Serie II Nr. 8, 1912 und Nr. 9, 1913.
[4]) *S. D. Wicksell.* The general characteristics of the frequency function of stellar movements as derived from the proper motions of the stars, Medd. från Lunds Astr. Obs., Serie II Nr. 12, 1915.
[5]) *W. Gyllenberg.* Stellar velocity distribution as derived from observations in the line of sight, Medd. från Lunds Astr. Obs., Serie II Nr. 13, 1915.

bis zu $\delta = +70°$ und die nach Rektaszensionsstunden in sechs gleiche Teile geteilte Zone von $\delta = +70°$ bis zu $\delta = +38°$. Die Mittelpunkte dieser Regionen, die wir mit A, B, C, D, E, F, G bezeichnen, sind also

$$\begin{array}{llll} A: & \delta = +90° & & \\ B:\ \alpha = 0°, & \delta = +54° & E:\ \alpha = 180°, & \delta = +54° \\ C:\ \alpha = 60°, & \delta = +54° & F:\ \alpha = 240°, & \delta = +54° \\ D:\ \alpha = 120°, & \delta = +54° & G:\ \alpha = 300°, & \delta = +54° \end{array}$$

In jeder dieser Regionen hat *Eddington* die Sterne des Groombridge-Kataloges nach dem Positionswinkel ihrer Eigenbewegung abgezählt. Für jede Region transformieren wir nun das zweite Koordinatensystem in das folgende dritte: die X-Achse soll parallel zum Äquator weisen und zwar positiv im Sinne wachsender Rektaszension, die Y-Achse darauf normal (positiv gegen den Nordpol) und die Z-Achse im Visionsradius zum Mittelpunkt der betreffenden Region. Die Positionswinkel wollen wir von der positiven X-Achse zur positiven Y-Achse hin zählen, also, von der Erde aus gesehen, positiv im Sinne des Uhrzeigers. In der Region A werden die Richtungen der X- und Y-Achse unbestimmt; die positive X-Achse soll daher per definitionem parallel zum Stundenkreis $\alpha = 90°$ und die positive Y-Achse parallel zum Stundenkreis $\alpha = 180°$ weisen. *Eddington* und *Schwarzschild* zählen die Positionswinkel ebenfalls von der positiven X-Achse an, aber entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Die hier gewählte Orientierung des dritten Koordinatensystems stimmt mit der von *Wicksell* und *Gyllenberg* benutzten überein.

Die Richtungskosinus der Winkel zwischen den einzelnen Achsen der Systeme sind gegeben durch

$$\begin{array}{c|ccc} & U_3 & V_3 & W_3 \\ \hline U_2 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ V_2 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ W_2 & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{array} \tag{4}$$

wobei, wenn α und δ Rektaszension und Deklination des Mittelpunktes der betreffenden Region sind, die Gleichungen gelten

$$\begin{array}{lll} \gamma_{11} = -\sin\alpha & \gamma_{12} = -\cos\alpha\sin\delta & \gamma_{13} = \cos\alpha\cos\delta \\ \gamma_{21} = \cos\alpha & \gamma_{22} = -\sin\alpha\sin\delta & \gamma_{23} = \sin\alpha\cos\delta \\ \gamma_{31} = 0 & \gamma_{32} = \cos\delta & \gamma_{33} = \sin\delta \end{array}$$

Der Exponent von e wird jetzt

$$f = A_3 U_3^2 + B_3 V_3^2 + C_3 W_3^2 + 2 D_3 V_3 W_3 + 2 E_3 W_3 U_3 + 2 F_3 U_3 V_3 \,. \tag{5}$$

Dabei sind die Spezialgeschwindigkeitskomponenten

$$U_3 = \varrho \cos\delta\, \Delta\alpha \qquad V_3 = \varrho\, \Delta\delta \qquad W_3 = \Delta\varrho$$

die wirklichen linearen Geschwindigkeitskomponenten in Rektaszension, Deklination und Radiusvektor.

In der folgenden Tabelle sind die numerischen Werte der γ für die oben erwähnten sieben Regionen angegeben. Dabei wurden die Richtungskosinus der Region A direkt nach der Definition der Achsen dieses Gebietes bestimmt, weil für den Mittelpunkt, den Nordpol, α unbestimmt wird.

	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{21}	γ_{22}	γ_{23}	γ_{31}	γ_{32}	γ_{33}
A	0.000	−1.000	0.000	+1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	+1.000
B	0.000	−0.809	+0.588	+1.000	0.000	0.000	0.000	+0.588	+0.809
C	−0.866	−0.404	+0.294	+0.500	−0.700	+0.509	0.000	+0.588	+0.809
D	−0.866	+0.404	−0.294	−0.500	−0.700	+0.509	0.000	+0.588	+0.809
E	0.000	+0.809	−0.588	−1.000	0.000	0.000	0.000	+0.588	+0.809
F	+0.866	+0.404	−0.294	−0.500	+0.700	−0.509	0.000	+0.588	+0.809
G	+0.866	−0.404	+0.294	+0.500	+0.700	−0.509	0.000	+0.588	+0.809

II. Verteilung bezüglich des Positionswinkels der Eigenbewegungen.

Da wir im folgenden nur Beobachtungen von Bewegungen normal zum Visionsradius verwerten wollen, so haben wir die Gleichung

$$dN = K e^{-f}\, dU_3\, dV_3\, dW_3$$

wobei f durch (5) gegeben ist, über alle Radialgeschwindigkeiten W_3 von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren. Dies ergibt

$$\begin{aligned} dN_1 &= K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f}\, dW_3 \cdot dU_3\, dV_3 \\ &= K \sqrt{(\pi/C_3)} \cdot e^{-(a U_3^2 - 2c U_3 V_3 + b V_3^2)}\, dU_3\, dV_3 \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} C_3\, a &= A_3\, C_3 - E_3^2 \\ C_3\, b &= B_3\, C_3 - D_3^2 \\ C_3\, c &= D_3 E_3 - C_3 F_3 \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Es handelt sich also darum, a, b, c für jede Region aus den Beobachtungen zu ermitteln, da die Kenntnis der Größen A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3 zur Berechnung von A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 notwendig ist.

Jetzt müssen wir darauf Rücksicht nehmen, daß das Bezugsystem, von dem aus wir die Fixsternbewegungen betrachten, selbst in Bewegung ist und uns daher nicht die absoluten Bewegungen der Sterne, die sogenannten Spezialbewegungen, sondern nur ihre Eigenbewegungen, d. h. ihre relativen Geschwindigkeiten bezüglich des Sonnensystems, gegeben sind. Dieses bewegt sich, wie aus genauen spektroskopischen Beobachtungen bekannt ist, mit einer Geschwindigkeit $h = 20$ km/sec gegen einen bestimmten Punkt der Sphäre, den sogenannten Apex. Wenn also χ den Winkelabstand des Sterns vom Apex, r und ϑ Größe und Positionswinkel seiner Eigenbewegung bedeuten, so ist die Komponente der Sonnengeschwindigkeit normal zum Visionsradius

$$\omega = h \sin\chi \tag{8}$$

und daher, wenn ϑ_0 ihr Positionswinkel ist,

$$\begin{aligned} U_3 &= r\cos\vartheta + \omega\cos\vartheta_0 \\ V_3 &= r\sin\vartheta + \omega\sin\vartheta_0 \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir führen diese Ausdrücke in die Formel (6) ein, indem wir ω und ϑ_0 als Konstante betrachten, was darin seine Rechtfertigung findet, daß Gleichung (6) nur für eine unendlich kleine Umgebung des Punktes (α, δ) strenge gilt. Es folgt

$$dN_1 = K \sqrt{(\pi/C_3)} \cdot e^{-(\Phi r^2 + 2\Gamma \omega r + \Phi_0 \omega^2)}\, r\, dr\, d\vartheta \tag{10}$$

Dabei bedeutet

$$\begin{aligned} \Phi &= a\cos^2\vartheta - 2c\cos\vartheta\sin\vartheta + b\sin^2\vartheta \\ \Phi_0 &= a\cos^2\vartheta_0 - 2c\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0 + b\sin^2\vartheta_0 \\ \Gamma &= (a\cos\vartheta - c\sin\vartheta)\cos\vartheta_0 + (-c\cos\vartheta + b\sin\vartheta)\sin\vartheta_0 \end{aligned} \tag{11}$$

Weil das der Abhandlung zugrunde gelegte Material nur Sternabzählungen nach dem Positionswinkel enthält, so ist der Ausdruck (10) noch einmal zu integrieren, und zwar über alle r von 0 bis ∞, sodaß wir mit Verwendung der Substitution $x = r\sqrt{\Phi} + \omega\cdot\Gamma/\sqrt{\Phi}$ und der Bezeichnung

$$\xi = \omega\cdot\Gamma/\sqrt{\Phi} \tag{12}$$

erhalten

$$\begin{aligned} dN_2 &= K\cdot\sqrt{(\pi/C_3)}\int_0^\infty e^{-f}\, r\, dr\, d\vartheta \\ &= K\cdot\sqrt{(\pi/C_3)}\cdot {}^1\!/_2(e^{-\Phi_0\omega^2}/\Phi)\times \\ &\quad\times\left(1+2\xi e^{\xi^2}\int_0^\xi e^{-x^2}dx - \sqrt{\pi}\cdot\xi e^{\xi^2}\right)d\vartheta \end{aligned} \tag{13}$$

Jetzt führen wir noch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} A &= K\cdot\sqrt{(\pi/C_3)}\cdot e^{-\Phi_0\omega^2}\, d\vartheta \\ M(\xi) &= 1+2\xi e^{\xi^2}\int_0^\xi e^{-x^2}dx \\ N'(\xi) &= \sqrt{\pi}\cdot\xi e^{\xi^2} \end{aligned} \tag{14}$$

ein und erhalten daher für die der Beobachtung zugängliche Größe

$$dN_2 = {}^1\!/_2(A/\Phi)\cdot(M-N')\,. \tag{15}$$

dN_2 bedeutet die Anzahl der Sterne in einer unendlich kleinen Umgebung des Punktes (α, δ), deren Eigenbewegungen einen Positionswinkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ haben, wenn für ω und ϑ_0 die Werte im Punkte (α, δ) gewählt werden. Wir hätten also zur Erzielung möglichster Strenge die Sphäre in sehr kleine Gebiete teilen sollen und könnten jetzt die Formel (15) strenge auf jedes Gebiet anwenden, wenn (α, δ) seinen Mittelpunkt bedeutet. Dabei würde aber die Sternzahl in jedem Gebiete so klein ausfallen, daß die folgenden Rechnungen zu ungenauen Resultaten führen oder sogar praktisch undurchführbar würden. Der Möglichkeit ihrer praktischen Durchführung wegen haben wir mit *Eddington* und *Schwarzschild* die früher erwähnte Einteilung gewählt und wollen daher die Formel auf Gebiete anwenden, die in Hinblick auf die Genauigkeit der folgenden Rechnungen nicht mehr als unendlich klein zu bezeichnen sind.

Eddington wählte $d\vartheta = 10°$, teilte also den Vollkreis in 36 Teile und zählte darnach für jede Region die Sterne ab. Gemäß der früheren Festsetzung über die Zählung der Positionswinkel ergibt sich aus diesen Abzählungen folgende Tafel:

ϑ	A	B	C	D	E	F	G
5°	47	60	8	5	5	4	37
15	39	42	6	6	6	5	40
25	29	27	6	5	6	5	46
35	21	18	7	5	5	6	48
45	15	13	7	5	4	6	46
55	12	10	6	5	5	7	38
65	11	8	5	5	5	8	34
75	9	8	5	5	5	11	32
85	7	6	4	5	6	11	29
95	7	7	4	6	6	12	25
105	9	6	4	8	6	17	20
115	9	6	6	8	8	19	19
125°	7	7	6	7	8	26	18
135	7	5	7	6	10	29	17
145	10	10	8	8	14	27	20
155	11	16	9	10	20	21	20
165	13	15	10	15	32	16	22
175	12	18	10	15	38	14	24
185	14	18	11	16	33	14	27
195	12	20	12	19	25	9	28
205	14	22	14	22	20	9	27
215	11	26	14	27	18	7	33
225	13	25	13	30	15	10	35
235	9	26	12	37	11	10	34
245	10	20	14	35	7	11	32
255	10	20	16	30	6	10	33
265	11	19	23	20	6	12	34
275	12	25	27	16	5	13	31
285	12	28	35	12	6	14	29
295	14	30	38	12	7	14	30
305	15	31	43	9	6	14	28
315	18	37	42	8	6	10	27
325	20	47	34	7	6	9	28
335	27	54	24	5	5	6	34
345	39	65	15	5	5	5	39
355	49	67	11	4	5	4	39
Gesamtzahl der Sterne	585	862	516	443	381	425	1103

Die Zahlen in den Spalten A, B, C, D, E, F, G bedeuten die Anzahl der Sterne, deren Eigenbewegungen Positionswinkel zwischen $\vartheta - 5°$ und $\vartheta + 5°$ haben.

III. Berechnung gewisser Hilfsgrößen.

Um nun für jede Region a, b, c zu bestimmen, verwenden wir folgenden, von *Schwarzschild* herrührenden Kunstgriff: Bei einer Vermehrung von ϑ um 180° bleiben Φ und M ungeändert, während ξ, Γ und N' ihre Zeichen wechseln. Wenn also dN_2' den Wert von dN_2 für $\vartheta + 180°$ bedeutet, so gilt

$$\begin{aligned} dN_2 &= {}^1\!/_2(A/\Phi)\cdot(M-N') \\ dN_2' &= {}^1\!/_2(A/\Phi)\cdot(M+N') \end{aligned} \tag{16}$$

daher

$$\begin{aligned} dN_2'+dN_2 &= A\cdot M/\Phi \\ dN_2'-dN_2 &= A\cdot N'/\Phi \end{aligned}$$

also $\quad (dN_2'-dN_2)/(dN_2'+dN_2) = N'/M = N(\xi)\,.$

Da dN_2 und dN_2' Beobachtungsgrößen sind, so läßt sich aus dieser Gleichung mit Hilfe einer von *Schwarzschild* konstruierten Tafel für N ξ und aus dieser Größe mittels einer ähnlichen Tafel M für jeden Positionswinkel berechnen.

Wir setzen nun

$$\varrho^2 = (1/M)\cdot(dN_2'+dN_2) \tag{17}$$

und $\quad x = \varrho\cos\vartheta \quad y = \varrho\sin\vartheta\,.$

Dann liegen die für jeden Positionswinkel ϑ berechneten Punkte (x, y) gemäß (11) auf der Ellipse

$$a'x^2 - 2c'xy + b'y^2 = 1 \tag{18}$$

wenn wir noch

$$a = a'A \quad b = b'A \quad c = c'A \tag{19}$$

einführen; denn nach (16) und (17) ist

$$\varrho^2\,\Phi = A\,. \tag{20}$$

Die Einführung von $\sigma = \varrho/\xi$ (21)

und $x' = \sigma \cos \vartheta \quad y' = \sigma \sin \vartheta$

liefert uns Punkte (x', y'), die nach (11) auf der Geraden

$$(a'x - c'y)\,\omega \sqrt{\Delta} \cdot \cos \vartheta_0 + (-c'x + b'y)\,\omega \sqrt{\Delta} \cdot \sin \vartheta_0 = 1 \qquad (22)$$

liegen, weil $\sigma \Gamma \omega = \sqrt{\Delta}$ nach (12), (19), (20) und (21).

Die für jede Region auf diese Weise berechneten Koordinaten x, y und x', y' sind in der folgenden Tafel enthalten.

ϑ	x	y	x'	y'
		A		
5°	+6.98	+0.61	− 20.5	− 1.8
15	+6.20	+1.86	− 18.7	− 5.0
25	+5.73	+2.68	− 28.6	− 13.4
35	+4.50	+3.15	− 25.0	− 17.5
45	+3.75	+3.75	− 93.8	− 93.8
55	+2.62	+3.74	− 32.8	− 46.8
65	+1.94	+4.15	− 58.7	− 138.3
75	+1.13	+4.21	+ 37.7	+ 140.3
85	+0.36	+4.16	+ 2.7	+ 31.3
95	−0.37	+4.26	− 2.4	+ 27.8
105	−1.18	+4.42	− 14.8	+ 55.2
115	−2.00	+4.29	− 16.7	+ 35.8
125	−2.56	+3.66	− 11.6	+ 16.6
135	−3.30	+3.30	− 12.2	+ 12.2
145	−4.32	+3.03	− 21.6	+ 15.2
155	−5.26	+2.45	− 21.0	+ 9.8
165	−6.33	+1.70	− 20.2	+ 5.4
175	−6.75	+0.55	− 17.2	+ 1.5
		B		
5	+7.89	+0.69	− 22.5	− 2.0
15	+7.28	+1.95	− 34.6	− 9.3
25	+6.35	+2.96	− 105.8	− 49.3
35	+5.38	+3.77	+ 53.8	+ 37.7
45	+4.24	+4.24	+ 9.4	+ 9.4
55	+3.21	+4.58	+ 11.6	+ 16.6
65	+2.10	+4.50	+ 8.1	+ 17.3
75	+1.28	+4.79	+ 4.9	+ 18.5
85	+0.39	+4.52	+ 1.2	+ 14.1
95	−0.43	+4.97	− 1.2	+ 13.7
105	−1.27	+4.75	− 3.0	+ 11.0
115	−2.10	+4.51	− 5.0	+ 11.2
125	−2.99	+4.27	− 7.1	+ 10.2
135	−3.45	+3.45	− 6.1	+ 6.1
145	−5.19	+3.64	− 12.0	+ 8.4
155	−6.79	+3.16	− 20.0	+ 9.3
165	−7.36	+1.97	− 18.0	+ 4.8
175	−8.08	+0.70	− 21.8	+ 1.9
		C		
5	+4.30	+0.38	+ 47.8	+ 4.2
15	+3.94	+1.18	+ 19.7	+ 5.9
25	+3.84	+1.79	+ 15.9	+ 7.4
35	+3.61	+2.53	+ 18.0	+ 12.6
45	+3.08	+3.08	+ 17.0	+ 17.0
55	+2.34	+3.34	+ 11.7	+ 16.7
65°	+1.70	+3.64	+ 5.9	+ 12.6
75	+1.07	+3.98	+ 3.2	+ 12.1
85	+0.35	+3.96	+ 0.6	+ 7.4
95	−0.37	+4.28	− 0.7	+ 8.1
105	−1.17	+4.38	− 2.0	+ 7.3
115	−2.20	+4.71	− 4.3	+ 9.2
125	−3.04	+4.35	− 5.6	+ 7.9
135	−3.97	+3.97	− 7.9	+ 7.9
145	−4.56	+3.19	− 11.4	+ 8.0
155	−4.81	+2.24	− 17.2	+ 8.4
165	−4.76	+1.27	− 39.6	+ 11.0
175	−4.56	+0.40	− 152.0	+ 13.3
		D		
5	+4.10	+0.36	+ 12.5	+ 1.1
15	+4.38	+1.17	+ 13.6	+ 3.6
25	+3.98	+1.86	+ 9.5	+ 4.4
35	+3.66	+2.56	+ 7.8	+ 5.4
45	+3.32	+3.32	+ 6.6	+ 6.6
55	+2.80	+3.99	+ 5.0	+ 7.1
65	+2.04	+4.39	+ 3.8	+ 8.2
75	+1.21	+4.53	+ 2.4	+ 9.1
85	+0.38	+4.31	+ 1.0	+ 11.1
95	−0.38	+4.35	− 1.4	+ 16.1
105	−1.06	+3.95	− 8.8	+ 33.0
115	−1.73	+3.71	− 14.4	+ 30.9
125	−2.28	+3.26	− 32.6	+ 46.6
135	−2.64	+2.64	− 33.0	+ 33.0
145	−3.18	+2.23	+ 79.5	− 55.6
155	−3.38	+1.58	+ 16.9	− 7.9
165	−3.92	+1.05	+ 12.7	− 3.4
175	−3.80	+0.33	+ 10.3	− 0.9
		E		
5	+4.79	+0.42	+ 9.0	+ 0.8
15	+4.62	+1.24	+ 11.6	+ 3.1
25	+4.14	+1.93	+ 12.4	+ 5.7
35	+3.45	+2.42	+ 9.6	+ 6.7
45	+2.70	+2.70	+ 7.3	+ 7.3
55	+2.18	+3.12	+ 9.9	+ 14.2
65	+1.45	+3.12	+ 14.6	+ 31.2
75	+0.86	+3.21	+ 17.4	+ 64.1
85	+0.30	+3.45	∞	∞
95	−0.29	+3.30	+ 5.8	− 66.2
105	−0.90	+3.34	∞	∞
115	−1.64	+3.51	+ 41.0	− 87.8
125°	−2.12	+3.03	+ 23.6	− 38.7
135	−2.77	+2.77	+ 19.8	− 19.8
145	−3.47	+2.43	+ 14.5	− 10.2
155	−3.92	+1.83	+ 10.1	− 4.7
165	−4.58	+1.22	+ 8.8	− 2.4
175	−4.87	+0.43	+ 8.6	− 0.7
		F		
5	+3.76	+0.33	+ 10.6	+ 0.9
15	+3.51	+0.94	+ 20.7	+ 5.5
25	+3.29	+1.54	+ 19.4	+ 9.1
35	+2.95	+2.10	+ 73.6	+ 51.6
45	+2.77	+2.77	+ 19.8	+ 19.8
55	+2.35	+3.35	+ 23.4	+ 33.5
65	+1.82	+3.91	+ 20.2	+ 43.4
75	+1.21	+4.42	− 40.3	− 147.3
85	+0.42	+4.78	+ 14.0	+ 159.3
95	−0.44	+4.98	− 22.0	+ 249.0
105	−1.44	+5.39	+ 24.0	− 89.8
115	−2.40	+5.15	+ 26.7	− 57.2
125	−3.55	+5.04	+ 19.6	− 28.0
135	−4.05	+4.05	+ 13.5	− 13.5
145	−4.22	+2.96	+ 10.6	− 7.4
155	−4.18	+1.95	+ 12.0	− 5.6
165	−3.84	+1.03	+ 10.1	− 2.7
175	−3.76	+0.33	+ 10.8	− 0.9
		G		
5	+7.90	+0.69	− 87.7	− 7.7
15	+7.89	+2.11	− 78.9	− 21.1
25	+7.61	+3.55	− 50.7	− 23.7
35	+7.31	+5.12	− 66.5	− 46.6
45	+6.34	+6.34	− 79.3	− 79.3
55	+4.88	+6.96	− 162.3	− 231.7
65	+3.44	+7.36	− 171.8	− 368.3
75	+2.09	+7.80	+ 209.0	+ 780.0
85	+0.69	+7.91	+ 13.8	+ 158.2
95	−0.65	+7.42	− 9.4	+ 106.0
105	−1.79	+6.70	− 16.3	+ 60.9
115	−2.92	+6.25	− 22.4	+ 48.0
125	−3.50	+5.47	− 29.6	+ 42.2
135	−4.62	+4.62	− 35.6	+ 35.6
145	−5.62	+3.94	− 62.4	+ 43.7
155	−6.54	+3.05	− 43.6	+ 20.3
165	−7.36	+1.97	− 46.0	+ 12.3
175	−7.82	+0.68	− 55.8	+ 4.0

Der Ausgleich der Ellipsen- und Geradengleichungen mittels der Methode der kleinsten Quadrate liefert für die sieben Regionen folgende Werte von a', b', c', $\omega\sqrt{\Delta}$ und ϑ_0:

	a'	b'	c'	$\omega\sqrt{\Delta}$	ϑ_0
A	+0.0211	+0.0553	−0.0011	1.79	170°1
B	+0.0151	+0.0444	+0.0006	2.86	147.6
C	+0.0439	+0.0492	−0.0092	1.96	101°0
D	+0.0603	+0.0516	+0.0120	2.20	50.0
E	+0.0418	+0.0872	0.0000	1.37	2.6
F	+0.0656	+0.0385	−0.0188	0.37	338.1
G	+0.0165	+0.0179	+0.0044	1.01	175.2

IV. Bestimmung des Apex.

Die jetzt bekannten Positionswinkel ϑ_0 des Apex erlauben uns, den Apex nach der *Bessel-Kobold*schen Methode zu bestimmen. Im allgemeinen werden sich die durch diese Positionswinkel auf der Sphäre bestimmten größten Kreise, die sich im Apex schneiden sollten, nicht genau in einem Punkte schneiden. Wir wählen daher als Apex einen Punkt der Sphäre von der Eigenschaft, daß die Quadratsumme der Sinus seiner Abstände von den größten Kreisen ein Minimum ist. Wir bestimmen also für jeden größten Kreis seinen Pol $\Pi(a, d)$ nach den Formeln

$$\begin{aligned} \sin d &= \cos\delta\cos\vartheta_0 \\ \cos d\cos(\alpha-a) &= -\sin\delta\cos\vartheta_0 \\ \cos d\sin(\alpha-a) &= \sin\vartheta_0 \end{aligned} \tag{23}$$

und dann den Apex $A(A, D)$ aus der Bedingung

$$\begin{aligned} &\Sigma\sin^2 A A' = \Sigma\cos^2 \Pi A \\ &= \Sigma[\sin d\sin D + \cos d\cos D\cos(A-a)]^2 = \text{Min.} \end{aligned} \tag{24}$$

Das *Harzer*sche Verfahren löst dieses Problem in folgender Weise: Wir setzen

$$\begin{array}{llll} \cos D\cos A = X & \cos d\cos a = x & A = \Sigma x^2 & D = \Sigma yz \\ \cos D\sin A = Y & \cos d\sin a = y & B = \Sigma y^2 & E = \Sigma zx \\ \sin D = Z & \sin d = z & C = \Sigma z^2 & F = \Sigma xy \end{array} \tag{25}$$

wobei die Summen über alle sieben Regionen zu erstrecken sind. Dann gilt

$$\Sigma(xX + yY + zZ)^2 = \text{Min.} \tag{26}$$

mit der Nebenbedingung $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Die Lösung ist daher nach der *Lagrange*schen Multiplikatorenmethode gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (A-\lambda)X + FY + EZ &= 0 \\ FX + (B-\lambda)Y + DZ &= 0 \\ EX + DY + (C-\lambda)Z &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

wenn λ eine passend gewählte Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

ist. Die Aufgabe ist daher identisch mit der Bestimmung der Hauptachsen eines Ellipsoids, dessen Gleichung

$$A\mathfrak{x}^2 + B\mathfrak{y}^2 + C\mathfrak{z}^2 + 2D\mathfrak{y}\mathfrak{z} + 2E\mathfrak{z}\mathfrak{x} + 2F\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 1$$

lautet. Dieses Ellipsoid wurde von *S. Oppenheim* Momentenellipsoid genannt.

Die Durchführung der Rechnung ergibt folgende Werte von a, d, x, y, z:

	a	d	x	y	z
A	350°1	0°0	+0.985	−0.172	0.000
B	321.8	−29.8	+0.682	−0.536	−0.496
C	339.0	−6.4	+0.928	−0.356	−0.112
D	355.8	+22.2	+0.924	−0.068	+0.378
E	3.2	+36.0	+0.807	+0.045	+0.587
F	33.6	+33.0	+0.699	+0.464	+0.545
G	294.1	−35.8	+0.331	−0.740	−0.585

Weil α für A unbestimmt wird, so wurde der Pol für diese Region nicht aus den Formeln (23), sondern direkt aus seiner Definition bestimmt, und zwar so, daß er, wie bei allen übrigen Regionen, auf der linken Seite des entsprechenden größten Kreises liegt, wobei die Orientierung dieser Kreise der angenommenen Zählung der Positionswinkel entsprechend gewählt wurde.

Die kubische Determinantengleichung (28) lautet

$$\lambda^3 - 6.99\lambda^2 + 11.07\lambda - 0.80 = 0\,.$$

Aus ihr ergeben sich folgende drei Punkte:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 4.60 & \lambda_2 = 2.32 & \lambda_3 = 0.07 \\ A_1 = 168°5 & A_2 = 86°6 & A_3 = 253°0 \\ D_1 = -5.2 & D_2 = +49.5 & D_3 = +40.9\,. \end{array}$$

Der dritte Punkt ist der Apex; seine Koordinaten kommen den richtigen ($A = 270°$, $D = +30°$) ziemlich nahe. *Schwarzschild* erhielt bei graphischer Durchführung dieser Methode

$$A = 259° \quad D = +41°.$$

Die Bedeutung der beiden anderen Punkte soll am Schlusse der Abhandlung besprochen werden.

Die Kenntnis des Apex gestattet uns jetzt, die unbekannte Konstante Δ für jede Region zu ermitteln. Der Winkelabstand χ des Mittelpunktes der Region vom Apex ergibt sich nämlich aus der Gleichung

$$\cos\chi = \sin\delta\sin D + \cos\delta\cos D\cos(A-\alpha) \tag{29}$$

daher ω aus (8) $\omega = h\sin\chi$ ($h = 20$ km/sec ist bekannt aus spektroskopischen Messungen), also endlich Δ aus den bekannten Werten von $\omega\sqrt{\Delta}$ und ω. Die folgende Tafel enthält die Werte von χ, ω, Δ für alle Regionen.

	A	B	C	D	E	F	G
χ	49°1	70°7	90°3	82°1	51°7	17°1	35°6
ω	15.12	18.88	20.00	19.82	15.70	5.88	11.64
Δ	0.0141	0.0229	0.0096	0.0123	0.0076	0.0040	0.0076.

V. Berechnung der Konstanten des Verteilungsellipsoids.

Jetzt können wir an die Berechnung der Größen A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 schreiten. Wir wollen im folgenden mit den großen lateinischen Buchstaben die Elemente, mit den großen deutschen die entsprechenden Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$$

bezeichnen. Der Stellenzeiger soll sich auf das Koordinatensystem beziehen. Nach dieser Festsetzung ist also

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A} = BC - D^2 & \mathfrak{D} = EF - AD \\ \mathfrak{B} = CA - E^2 & \mathfrak{E} = FD - BE \\ \mathfrak{C} = AB - F^2 & \mathfrak{F} = DE - CF \end{array} \tag{30}$$

und zwar gelten diese Gleichungen entsprechend den beiden Koordinatensystemen II und III für die Stellenzeiger 2 und 3.

Die Gleichungen (7) lassen sich jetzt schreiben

$$C_3 a = \mathfrak{B}_3 \qquad C_3 b = \mathfrak{A}_3 \qquad C_3 c = \mathfrak{F}_3\,. \tag{31}$$

Weil Δ als orthogonale Invariante in beiden Koordinatensystemen denselben Wert hat, so ergibt sich aus bekannten Determinantensätzen und den Gleichungen (19) und (31)

$$\Delta C_3 = \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{F}_3{}^2 = C_3{}^2(ab - c^2)$$

folglich $\quad C_3 = \Delta/(ab - c^2) = \Delta/[\Delta^2(a'b' - c'^2)]$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_3 &= (\Delta/\Delta)\cdot b'/(a'b' - c'^2) \\ \mathfrak{B}_3 &= (\Delta/\Delta)\cdot a'/(a'b' - c'^2) \\ \mathfrak{F}_3 &= (\Delta/\Delta)\cdot c'/(a'b' - c'^2)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Die Größen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_3' &= (1/\Delta)\cdot b'/(a'b' - c'^2) = \mathfrak{A}_3/\Delta \\ \mathfrak{B}_3' &= (1/\Delta)\cdot a'/(a'b' - c'^2) = \mathfrak{B}_3/\Delta \\ \mathfrak{F}_3' &= (1/\Delta)\cdot c'/(a'b' - c'^2) = \mathfrak{F}_3/\Delta \end{aligned} \tag{33}$$

sind also für alle Regionen bekannt.

Aus den Transformationsformeln (4) und (5) folgt, wenn wir noch

$$\mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2/\Delta \quad \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2/\Delta \quad \mathfrak{C}_2' = \mathfrak{C}_2/\Delta \quad \mathfrak{D}_2' = \mathfrak{D}_2/\Delta \quad \mathfrak{E}_2' = \mathfrak{E}_2/\Delta \quad \mathfrak{F}_2' = \mathfrak{F}_2/\Delta \text{ einführen,} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_3' &= \gamma_{11}^2\mathfrak{A}_2' + \gamma_{21}^2\mathfrak{B}_2' + \gamma_{31}^2\mathfrak{C}_2' + 2\gamma_{21}\gamma_{31}\mathfrak{D}_2' + 2\gamma_{31}\gamma_{11}\mathfrak{E}_2' + 2\gamma_{11}\gamma_{21}\mathfrak{F}_2' \\
\mathfrak{B}_3' &= \gamma_{12}^2\mathfrak{A}_2' + \gamma_{22}^2\mathfrak{B}_2' + \gamma_{32}^2\mathfrak{C}_2' + 2\gamma_{22}\gamma_{32}\mathfrak{D}_2' + 2\gamma_{32}\gamma_{12}\mathfrak{E}_2' + 2\gamma_{12}\gamma_{22}\mathfrak{F}_2' \\
\mathfrak{F}_3' &= \gamma_{11}\gamma_{12}\mathfrak{A}_2' + \gamma_{21}\gamma_{22}\mathfrak{B}_2' + \gamma_{31}\gamma_{32}\mathfrak{C}_2' + (\gamma_{21}\gamma_{32}+\gamma_{31}\gamma_{22})\mathfrak{D}_2' + (\gamma_{31}\gamma_{12}+\gamma_{11}\gamma_{32})\mathfrak{E}_2' + (\gamma_{11}\gamma_{22}+\gamma_{21}\gamma_{12})\mathfrak{F}_2
\end{aligned} \tag{35}$$

Um diese Gleichungen nach den sechs Unbekannten $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{C}_2'$, $\mathfrak{D}_2'$, $\mathfrak{E}_2'$, $\mathfrak{F}_2'$ auflösen zu können, brauchen wir die Werte von $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{B}_3'$, $\mathfrak{C}_3'$ für zwei Regionen. Wir verwenden aber lieber alle sieben Regionen und gleichen die 21 Gleichungen mit den sechs Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate aus. Die 21 Gleichungen lauten:

$$\begin{array}{c|rrrrrrcl}
 & & +\mathfrak{B}_2' & & & & & = & +3350 \\
A & +\mathfrak{A}_2' & & & & & & = & +1280 \\
 & & & & & & -\mathfrak{F}_2' & = & -67 \\
\hline
 & & +\mathfrak{B}_2' & & & & & = & +2890 \\
B & +0.652\,\mathfrak{A}_2' & & +0.345\,\mathfrak{C}_2' & & -0.950\,\mathfrak{E}_2' & & = & +982 \\
 & & & & +0.588\,\mathfrak{D}_2' & & -0.809\,\mathfrak{F}_2' & = & +39 \\
\hline
 & +0.750\,\mathfrak{A}_2' & +0.250\,\mathfrak{B}_2' & & & & -0.866\,\mathfrak{F}_2' & = & +2380 \\
C & +0.163\,\mathfrak{A}_2' & +0.490\,\mathfrak{B}_2' & +0.345\,\mathfrak{C}_2' & -0.823\,\mathfrak{D}_2' & -0.475\,\mathfrak{E}_2' & +0.565\,\mathfrak{F}_2' & = & +2120 \\
 & +0.350\,\mathfrak{A}_2' & -0.350\,\mathfrak{B}_2' & & +0.294\,\mathfrak{D}_2' & -0.509\,\mathfrak{E}_2' & +0.404\,\mathfrak{F}_2' & = & -446 \\
\hline
 & +0.750\,\mathfrak{A}_2' & +0.250\,\mathfrak{B}_2' & & & & +0.866\,\mathfrak{F}_2' & = & +1410 \\
D & +0.163\,\mathfrak{A}_2' & +0.490\,\mathfrak{B}_2' & +0.345\,\mathfrak{C}_2' & -0.823\,\mathfrak{D}_2' & +0.475\,\mathfrak{E}_2' & -0.565\,\mathfrak{F}_2' & = & +1650 \\
 & -0.350\,\mathfrak{A}_2' & +0.350\,\mathfrak{B}_2' & & -0.294\,\mathfrak{D}_2' & -0.509\,\mathfrak{E}_2' & +0.404\,\mathfrak{F}_2' & = & +328 \\
\hline
 & & +\mathfrak{B}_2' & & & & & = & +3160 \\
E & +0.652\,\mathfrak{A}_2' & & +0.345\,\mathfrak{C}_2' & & +0.950\,\mathfrak{E}_2' & & = & +1510 \\
 & & & & -0.588\,\mathfrak{D}_2' & & -0.809\,\mathfrak{F}_2' & = & 0 \\
\hline
 & +0.750\,\mathfrak{A}_2' & +0.250\,\mathfrak{B}_2' & & & & -0.866\,\mathfrak{F}_2' & = & +4420 \\
F & +0.163\,\mathfrak{A}_2' & +0.490\,\mathfrak{B}_2' & +0.345\,\mathfrak{C}_2' & +0.823\,\mathfrak{D}_2' & +0.475\,\mathfrak{E}_2' & +0.565\,\mathfrak{F}_2' & = & +7580 \\
 & +0.350\,\mathfrak{A}_2' & -0.350\,\mathfrak{B}_2' & & -0.294\,\mathfrak{D}_2' & +0.509\,\mathfrak{E}_2' & +0.404\,\mathfrak{F}_2' & = & -2160 \\
\hline
 & +0.750\,\mathfrak{A}_2' & +0.250\,\mathfrak{B}_2' & & & & +0.866\,\mathfrak{F}_2' & = & +8540 \\
G & +0.163\,\mathfrak{A}_2' & +0.490\,\mathfrak{B}_2' & +0.345\,\mathfrak{C}_2' & +0.823\,\mathfrak{D}_2' & -0.475\,\mathfrak{E}_2' & -0.565\,\mathfrak{F}_2' & = & +7850 \\
 & -0.350\,\mathfrak{A}_2' & +0.350\,\mathfrak{B}_2' & & +0.294\,\mathfrak{D}_2' & +0.509\,\mathfrak{E}_2' & +0.404\,\mathfrak{F}_2' & = & +2090
\end{array}$$

Aus ihnen folgen die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
4.642\,\mathfrak{A}_2' + 0.580\,\mathfrak{B}_2' + 0.775\,\mathfrak{C}_2' &= 16830 \\
0.580\,\mathfrak{A}_2' + 4.696\,\mathfrak{B}_2' + 0.676\,\mathfrak{C}_2' &= 24760 \\
0.775\,\mathfrak{A}_2' + 0.676\,\mathfrak{B}_2' + 0.654\,\mathfrak{C}_2' &= 7490 \\
3.734\,\mathfrak{D}_2' &= 10650 \\
3.732\,\mathfrak{E}_2' &= 220 \\
7.234\,\mathfrak{F}_2' &= 2830
\end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2' &= 2400 & \mathfrak{D}_2' &= 2840 \\
\mathfrak{B}_2' &= 4370 & \mathfrak{E}_2' &= 59 \\
\mathfrak{C}_2' &= 4080 & \mathfrak{F}_2' &= 391\,.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{F}_2 & \mathfrak{E}_2 \\ \mathfrak{F}_2 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{D}_2 \\ \mathfrak{E}_2 & \mathfrak{D}_2 & \mathfrak{C}_2 \end{vmatrix} = \Delta^2\,.$$

Wenn wir daher

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2' & \mathfrak{F}_2' & \mathfrak{E}_2' \\ \mathfrak{F}_2' & \mathfrak{B}_2' & \mathfrak{D}_2' \\ \mathfrak{E}_2' & \mathfrak{D}_2' & \mathfrak{C}_2' \end{vmatrix} \tag{36}$$

einführen, so folgt aus bekannten Determinantensätzen und (34)

$$\Delta\Delta' = 1$$

also

$$\begin{aligned}
\Delta' A_2 &= \mathfrak{B}_2'\mathfrak{C}_2' - \mathfrak{D}_2'^2 & \Delta' D_2 &= \mathfrak{E}_2'\mathfrak{F}_2' - \mathfrak{A}_2'\mathfrak{D}_2' \\
\Delta' B_2 &= \mathfrak{C}_2'\mathfrak{A}_2' - \mathfrak{E}_2'^2 & \Delta' E_2 &= \mathfrak{F}_2'\mathfrak{D}_2' - \mathfrak{B}_2'\mathfrak{E}_2' \\
\Delta' C_2 &= \mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_2' - \mathfrak{F}_2'^2 & \Delta' F_2 &= \mathfrak{D}_2'\mathfrak{E}_2' - \mathfrak{C}_2'\mathfrak{F}_2'\,.
\end{aligned} \tag{37}$$

Damit sind die Konstanten A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 der Gleichung des Geschwindigkeitsverteilungsellipsoids im System II gefunden. Wir erhalten

$$\Delta' = 228 \cdot 10^8$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta' A_2 &= +97 \cdot 10^5 & \Delta' D_2 &= -68 \cdot 10^5 \\
\Delta' B_2 &= +98 \cdot 10^5 & \Delta' E_2 &= +8 \cdot 10^5 \\
\Delta' C_2 &= +103 \cdot 10^5 & \Delta' F_2 &= -14 \cdot 10^5\,.
\end{aligned}$$

VI. Bestimmung der Hauptachsen des Verteilungsellipsoids.

Die Reduktion der Ellipsoidgleichung auf die Hauptachsen geschieht mittels der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_2 - \varkappa & F_2 & E_2 \\ F_2 & B_2 - \varkappa & D_2 \\ E_2 & D_2 & C_2 - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{38}$$

deren Wurzeln $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die reziproken Hauptachsenquadrate oder die Größen A_1, B_1, C_1 sind. Die Richtungskosinus ε_{11}, ε_{12}, ε_{13} der ersten Hauptachse sind durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(A_2 - \varkappa_1)\,\varepsilon_{11} + F_2\,\varepsilon_{12} + E_2\,\varepsilon_{13} &= 0 \\
F_2\,\varepsilon_{11} + (B_2 - \varkappa_1)\,\varepsilon_{12} + D_2\,\varepsilon_{13} &= 0 \\
E_2\,\varepsilon_{11} + D_2\,\varepsilon_{12} + (C_2 - \varkappa_1)\,\varepsilon_{13} &= 0 \\
\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 &= 1
\end{aligned} \tag{39}$$

gegeben, die der zweiten Hauptachse durch

$$\begin{aligned}
(A_2 - \varkappa_2)\,\varepsilon_{21} + F_2\,\varepsilon_{22} + E_2\,\varepsilon_{23} &= 0 \\
F_2\,\varepsilon_{21} + (B_2 - \varkappa_2)\,\varepsilon_{22} + D_2\,\varepsilon_{23} &= 0 \\
E_2\,\varepsilon_{21} + D_2\,\varepsilon_{22} + (C_2 - \varkappa_2)\,\varepsilon_{23} &= 0 \\
\varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{23}^2 &= 1
\end{aligned}$$

und die der dritten durch

$$\begin{aligned}
(A_2 - \varkappa_3)\,\varepsilon_{31} + F_2\,\varepsilon_{32} + E_2\,\varepsilon_{33} &= 0 \\
F_2\,\varepsilon_{31} + (B_2 - \varkappa_3)\,\varepsilon_{32} + D_2\,\varepsilon_{33} &= 0 \\
E_2\,\varepsilon_{31} + D_2\,\varepsilon_{32} + (C_2 - \varkappa_3)\,\varepsilon_{33} &= 0 \\
\varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{32}^2 + \varepsilon_{33}^2 &= 1\,.
\end{aligned}$$

Aus den ε erhalten wir die Richtungen (α_1, δ_1), (α_2, δ_2), (α_3, δ_3) der Hauptachsen mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \cos\delta_1\cos\alpha_1 = \varepsilon_{11} & \cos\delta_2\cos\alpha_2 = \varepsilon_{21} & \cos\delta_3\cos\alpha_3 = \varepsilon_{31} \\ \cos\delta_1\sin\alpha_1 = \varepsilon_{12} & \cos\delta_2\sin\alpha_2 = \varepsilon_{22} & \cos\delta_3\sin\alpha_3 = \varepsilon_{32} \\ \sin\delta_1 = \varepsilon_{13} & \sin\delta_2 = \varepsilon_{23} & \sin\delta_3 = \varepsilon_{33}. \end{array}$$

Jetzt ist noch die Konstante K zu bestimmen. Zu diesem Zwecke integrieren wir die Gleichung (1) über alle Geschwindigkeitskomponenten U_1, V_1, W_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ und erhalten, wenn N die Gesamtzahl der beobachteten Fixsterne bedeutet,

$$N = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}N = K\pi^{3/2}/\sqrt{(A_1 B_1 C_1)}$$

daher

$$K = N\sqrt{(A_1 B_1 C_1)} \cdot \pi^{-3/2} \tag{40}$$

oder, wenn $\varphi(U_1, V_1, W_1) = K e^{-A_1 U_1^2 - B_1 V_1^2 - C_1 W_1^2}$ die relative Häufigkeitsfunktion bedeutet und deshalb $N = 1$ zu setzen ist,

$$K = \sqrt{(A_1 B_1 C_1/\pi^3)}\,.$$

Wir erhalten

$$\varkappa^3 - 131 \cdot 10^{-5}\varkappa^2 + 475 \cdot 10^{-9}\varkappa - 439 \cdot 10^{-13} = 0, \text{ daher}$$

$$\begin{array}{lll} A_1 = 763 \cdot 10^{-6} & B_1 = 408 \cdot 10^{-6} & C_1 = 147 \cdot 10^{-6}. \\ 1/\sqrt{A_1} = 36.2 & 1/\sqrt{B_1} = 49.5 & 1/\sqrt{C_1} = 82.6 \text{ km/sec} \\ \alpha_1 = 286^\circ\!.3 & \alpha_2 = 189^\circ\!.9 & \alpha_3 = 84^\circ\!.0 \\ \delta_1 = +45.6 & \delta_2 = +10.7 & \delta_3 = +42.5 \end{array}$$

und wegen $N = 4315$ $K = 0.00525$
oder für $N = 1$ $K = 0.00000121$.

Damit ist das zu Beginn des vorliegenden Aufsatzes gestellte Problem vollständig gelöst.

Bevor wir die Bedeutung der erhaltenen Resultate besprechen, wollen wir ein paar Bemerkungen über die Genauigkeit der durchgeführten Rechnungen machen. Mit Rücksicht darauf, daß die vorliegende Arbeit eine Erweiterung der *Schwarzschild*schen Hypothese bringen sollte und sich daher ganz an das *Schwarzschild*sche Material anschloß, wurde die Rechnung mit derselben Genauigkeit wie in der *Schwarzschild*schen Abhandlung, also im allgemeinen mit drei geltenden Ziffern durchgeführt.

Infolge der Verwendung der *Schwarzschild*schen Tafeln für M und N wurde die Größe ξ nur bis auf zwei Dezimalstellen, daher $\sigma = \varrho/\xi$ mit einer geringeren Genauigkeit als ϱ erhalten; folglich sind die Koordinaten x', y' der Geraden ungenauer als die der Ellipsen. Dies ist deutlich aus einer graphischen Darstellung der mitgeteilten Zahlenwerte zu ersehen. Weil aber die Geraden zur Berechnung des Apex und der Ellipsoidkonstanten verwendet werden mußten, so sind mit derselben Ungenauigkeit alle weiteren Rechnungen der Arbeit behaftet.

Daraus erklärt sich die Abweichung des erhaltenen Apex vom wahren und teilweise auch die der Gleichungen (35) für die sieben Regionen untereinander. Mit Rücksicht auf die manchmal ziemlich große Verschiedenheit derjenigen rechten Seiten der Gleichungen, welche gemäß der linken Seite eigentlich gleich sein sollten, ist die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate kaum berechtigt. Vielleicht ist aber auch aus dieser großen Verschiedenheit, die ja fast nicht mehr durch die Ungenauigkeit von ξ erklärt werden kann, zu schließen, daß das Verteilungsellipsoid nicht in allen Teilen des Raumes dasselbe, mithin die unserer ganzen Rechnung zugrunde liegende Annahme desselben Ellipsoids in allen Teilen des Raumes nicht richtig ist. In diesem Falle wären selbstverständlich die einzelnen Regionen getrennt zu behandeln und daher die Berechnung der sechs Ellipsoidkonstanten unmöglich, weil dazu nur drei Gleichungen in jeder Region zu Gebote ständen.

Bedeutung der erhaltenen Resultate.

Die drei Hauptachsen des Ellipsoids der Geschwindigkeitsverteilung bestimmen drei Punkte der Sphäre, deren Bedeutung wir jetzt besprechen wollen.

Vergleichen wir zuerst unsere Resultate mit den *Schwarzschild*schen, so sehen wir, daß der Vertex in dem Sinne, wie ihn *Schwarzschild* definiert, im Fall des dreiachsigen Ellipsoids überhaupt nicht existiert. Denn nach *Schwarzschild* ist der Vertex der Schnittpunkt der Richtungen der großen Achsen der Ellipse

$$aU^2 - 2cUV + bV^2 = 1$$

der sogenannten *Schwarzschild*schen Geschwindigkeitsellipse, auf der Sphäre. Nun läßt sich allgemein beweisen, daß diese Richtungen einander dann und nur dann in einem Punkte schneiden, wenn das Geschwindigkeitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, und daß in diesem Fall die Richtung zum Schnittpunkt mit der Richtung der Rotationsachse des Ellipsoids identisch ist. Die Geschwindigkeitsellipse hat, nebenbei bemerkt, auch eine geometrische Bedeutung. Legt man nämlich an das Geschwindigkeitsellipsoid einen Tangentialzylinder derart, daß seine Achse mit dem Visionsradius zusammenfällt, so ist der Normalschnitt dieses elliptischen Zylinders die Geschwindigkeitsellipse.

Unsere drei Hauptachsenrichtungen stimmen ferner ziemlich schlecht mit den drei analogen Richtungen, die *Wicksell* und *Gyllenberg* gefunden haben, überein. *Wicksell* erhielt nämlich die Richtungen

I	II	III
$\alpha_1 = 274^\circ$	$\alpha_2 = 189^\circ$	$\alpha_3 = 339^\circ$
$\delta_1 = -12$	$\delta_2 = +24$	$\delta_3 = +62$

also I identisch mit dem *Schwarzschild*schen Vertex ($\alpha = 273^\circ$, $\delta = -6^\circ$) und II mit dem Pol der Milchstraße ($\alpha = 191^\circ$, $\delta = +27^\circ$), während in der vorliegenden Abhandlung I mit dem Apex und II mit dem Pol der Milchstraße übereinstimmt.

Die Ursachen dürften wahrscheinlich in den folgenden beiden Tatsachen zu suchen sein. Die Berechnung des Vertex erfolgt in der *Schwarzschild*schen Arbeit nur mit Hilfe der Ellipsen (18), während im Fall des dreiachsigen Ellipsoids zur Bestimmung der drei Hauptachsenrichtungen auch die bedeutend ungenauer bestimmbaren Geraden (22) herangezogen werden müssen. Im Fall des Rotationsellipsoids sind also genauere Resultate zu erwarten als beim dreiachsigen, sodaß I wahrscheinlich auch in diesem Fall bei einer genaueren Rechnung mit dem *Schwarzschild*schen Vertex identisch wird.

Ferner ist ein Unterschied in der Behandlung des vorliegenden Themas vorhanden, auf den wir schon in der Einleitung aufmerksam gemacht haben, indem die beiden Schüler *Charlier*s dessen statistische Untersuchungen fortgesetzt, während wir die *Schwarzschild*sche Hypothese erweitert haben.

Charlier setzt nämlich nach den Lehrsätzen der Kollektivmaßlehre die Häufigkeitsfunktion der Spezialgeschwindigkeiten

$$\varphi(U,V,W) = (2\pi)^{-3/2}(1/\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\cdot e^{-\frac{1}{2}U^2/\sigma_1^2-\frac{1}{2}V^2/\sigma_2^2-\frac{1}{2}W^2/\sigma_3^2} + \text{höhere Glieder.}$$

Darin ist

$$N\sigma_1^2 = \Sigma U^2 \quad N\sigma_2^2 = \Sigma V^2 \quad N\sigma_3^2 = \Sigma W^2$$

also sind σ_1, σ_2, σ_3 die Streuungen der drei Geschwindigkeitskomponenten. Vergleichen wir diesen Ansatz mit unserem

$$\varphi(U,V,W) = \sqrt{A_1 B_1 C_1/\pi^3}\cdot e^{-A_1U^2-B_1V^2-C_1W^2}$$

so ist also

$$\sigma_1 = 1/\sqrt{2A_1} = 25.6$$

$$\sigma_2 = 1/\sqrt{2B_1} = 35.1 \qquad \sigma_3 = 1/\sqrt{2C_1} = 58.5$$

während *Wicksell* $\sigma_1 = 29$, $\sigma_2 = 17$, $\sigma_3 = 19$ erhielt.

Vom Standpunkt der Kollektivmaßlehre würde also unser Ansatz folgende Bedeutung haben:

1) Die Sterne bewegen sich im Fixsternsystem so, daß sich ihre Geschwindigkeitskomponenten nach den drei Koordinatenachsen eines beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystems im Mittel aufheben.

2) Die Quadratmittel der Geschwindigkeitskomponenten $\sigma_1^2 = \Sigma U^2/N$, $\sigma_2^2 = \Sigma V^2/N$, $\sigma_3^2 = \Sigma W^2/N$ sind jedoch nicht für alle Richtungen gleich, wie bei den Geschwindigkeiten der Gasmoleküle in der kinetischen Gastheorie, sondern ellipsoidisch verteilt, es sind also drei Richtungen im Raum, die Hauptachsen des Verteilungsellipsoids, ausgezeichnet. Von diesen weist die erste zum Sonnenapex oder *Schwarzschild*schen Vertex, die zweite zum galaktischen Pol und die dritte steht auf den beiden ersten normal. Nach *Wicksell* herrscht die größte Streuung in I, die kleinste in II; nach unseren Resultaten die größte in III, die kleinste in I. Die Streuungen sind von der Größenordnung der Sonnengeschwindigkeit.

3) Die höheren Glieder in der Entwicklung der Verteilungsfunktion (Schiefe, Exzeß u. s. w.) verschwinden nach unserem Ansatze, die Geschwindigkeiten befolgen also mit Ausnahme der in 2) angeführten Einschränkungen das Gesetz der zufälligen Fehler.

Ein interessanter Vergleich bietet sich uns dar, wenn wir die Ergebnisse der neuesten Arbeiten *S. Oppenheim*s in Betracht ziehen. *Oppenheim*[1]) nimmt an, daß die Fixsterne ein den Kleinen Planeten analoges System bilden und sich um ein ideales Zentrum in mehr oder minder von einer gemeinsamen Bahnebene abweichenden Bahnen bewegen, unter ihnen unsere Sonne, sodaß wir die Bewegungen der Fixsterne von einem bewegten System, ähnlich wie die der Kleinen Planeten von der Erde aus, beurteilen. Eine Entwicklung der Eigenbewegungen nach Kugelfunktionen ergab als Koordinaten des Zentrums $\alpha = 21°$, $\delta = +36°$, während die mittlere Bahnebene so ziemlich mit der Milchstraße zusammenfällt.

Oppenheim fand durch eine der *Charlier*schen Methode ganz analoge statistische Untersuchung der Kleinen Planeten das Resultat, daß die Richtungen der Hauptachsen des Geschwindigkeitsverteilungsellipsoids der Kleinen Planeten nach drei Punkten der Sphäre weisen, und zwar nach dem Apex der Erdbewegung, dem Pol der Ekliptik und der Sonne. Nach denselben Punkten weisen aber gemäß den *Oppenheim*schen Rechnungen auch die drei Hauptachsen des Momentenellipsoids der Kleinen Planeten. Diese identische Orientierung von Momenten- und Verteilungsellipsoid (*Oppenheim* nennt letzteres Streuungsellipsoid) war bei den Fixsternen nicht mehr festzustellen. Es treten hier vielmehr bedeutend kompliziertere Verhältnisse auf, für die *Oppenheim* in einer Reihe von Arbeiten[2]) eine Erklärung versucht hat.

Interessant ist nun, daß sich die von *Oppenheim* bei den Kleinen Planeten konstatierte Identität in der Orientierung der beiden Ellipsoide bei unserm Material auch im Falle der Sterne deutlich zeigt, wie ein Blick auf folgende Zusammenstellung lehrt:

	I	II	III
Momentenellipsoid			
	$\alpha_1 = 253.0°$	$\alpha_2 = 168.5°$	$\alpha_3 = 86.6°$
	$\delta_1 = +40.9$	$\delta_2 = -5.2$	$\delta_3 = +49.5$
Verteilungsellipsoid.			
	$\alpha_1 = 286.3°$	$\alpha_2 = 189.9°$	$\alpha_3 = 84.0°$
	$\delta_1 = +45.6$	$\delta_2 = +10.7$	$\delta_3 = +42.5$

Ein weiteres Eingehen auf diese Frage ist jedoch nicht Zweck vorliegender Arbeit, die ja nur zeigen sollte, daß die *Schwarzschild*sche Methode in entsprechender Erweiterung auch auf das dreiachsige Ellipsoid angewendet werden kann, ohne daß dazu die Kollektivmaßlehre herangezogen werden müßte.

Wien, 1919 im Oktober.

J. Lense.

[1]) *S. Oppenheim.* Über die Eigenbewegungen der Fixsterne, Denkschriften der Wiener Akademie: I. Mitteilung 1911 (Kritik der Zweischwarmhypothese). — II. Mitteilung 1915 (Entwicklung nach Kugelfunktionen). — III. Mitteilung 1916 (Kritik der Ellipsoidhypothese).

[2]) *S. Oppenheim.* Über die Eigenbewegungen der Fixsterne, AN **188**.137. — Versuch einer Bestimmung der Bahnebene der Sonne, AN **201**.241. — Harmonische Analyse der Radialbewegungen der Sterne, insbesondere der Spezialgruppe der B-Sterne, AN **201**.417. — Über die Bahnebene der Sonne, AN **202**.89. — Über die Bahnebene der Sonne und ihr Verhältnis zur Ebene der Milchstraße, AN **204**.417. — Eine Erweiterung der *Airy*schen Methode der Apexberechnung, AN **209**.149.

Meteor.

1919 Dez. 9 $11^h 34^m.0$ M. Z. Gr. beobachtete ich bei teilweise bedecktem Himmel ein helles Meteor. Ort des Aufleuchtens: $a = 150° \pm$, $h = 35°$, Dauer der Erscheinung bis zum Verschwinden unter dem Horizont (bei $a = 130° \pm$) etwa 3^s–4^s. Die gelbe Sternschnuppe 2^m nahm bald die Helligkeit und Farbe der Wega an, wurde in der Helligkeit des Sirius blaugrün und verschwand in deutlich roter Färbung am Horizonte mindestens in Venusglanz. Kein Schweif, keine Detonation. Bergedorf, 1920 Jan. 2.

K. Graff.

Geschlossen 1920 Jan. 12. Herausgeber: H. Kobold. Druck von C. Schaidt. Expedition: Kiel, Moltkestr. 80. Postscheck-Konto Nr. 6238 Hamburg 11.