

Questi elementi rappresentano i cinque luoghi normali lasciando nel senso Osserv.— Calc. gli errori residui seguenti:

	Calcolo diretto		Formole diff.	
	$d\lambda \cos \beta$	$d\beta$	$d\lambda \cos \beta$	$d\beta$
I	+0.35	+4.03	+0.64	+4.06
II	—0.96	—	—1.07	—
III	—1.46	—9.37	—1.88	—9.05
IV	+3.97	+6.70	+3.26	+6.69
V	—0.80	+1.65	—1.09	+1.79

Questi errori sono tanto in longitudine che in latitudine abbastanza piccoli e quali si possono aspettare nel caso di osservazioni come quelle qui discusse. Con osservazioni tali sarebbe inutile nè porterebbe più vicino al vero il correggere gli elementi III per modo da far scomparire le piccole discrepanze esistenti fra gli errori residui calcolati direttamente e quelli dati dalle formole differenziali; gli elementi III più sopra trascritti sono quelli per conseguenza che meglio corrispondono alle osservazioni lasciate da Toscanelli.

L'accordo degli elementi trovati colle osservazioni diventa apparentemente assai minore quando, invece che coi luoghi normali, si paragonano i medesimi direttamente

colle singole osservazioni. Il risultato di questo paragone è contenuto sì per gli elementi II che per gli elementi III nelle ultime colonne del quadro precedente nel quale sono scritti inoltre i dati dell'osservazione. Si incontrano in queste colonne errori, che in media si accordano bene con quelli corrispondenti ai luoghi normali, ma che considerati uno ad uno sono abbastanza sensibili. Essi non devono però essere integralmente attribuiti alle osservazioni di Toscanelli; v'è nei medesimi una parte che dipende dall'incertezza dell'ora d'osservazione e che sarebbe difficile calcolare con qualche sicurezza. Così come sono questi errori non cambiano però nulla alle conseguenze già ricavate. Il sistema degli errori corrispondente agli elementi III, astrazione fatta dai $d\beta$ scritti fra parentesi e corrispondenti alle latitudini raccolte nel secondo luogo normale e nella deduzione degli elementi stessi trascurate, è preferibile ad ogni altro, e dimostra ancora essere gli elementi III quelli che meglio corrispondono alle osservazioni qui discusse.

Nella carta 246 recto già citata e in altra 238 recto dello stesso Codice Magliabechiano, Toscanelli lasciò alcuni frammenti di descrizioni delle apparenze fisiche di questa Cometa di Halley. In essi, a parte alcune espressioni e predizioni astrologiche che saranno in altra occasione prese in esame, nulla contiensi che non sia detto nelle Cronache già riportate dalle principali Cometografie, nè sarebbe il caso di qui riferirli.

R. Osservatorio di Brera in Milano 1884 Dicembre 19.

G. Celoria.

Ueber den numerischen Werth der Störungen zweiter Ordnung.

Von August Weiler.

Ueber die Genauigkeit, welche die Störungen der ersten Ordnung geben, kann man sich erst dann ein Urtheil bilden, wenn man eine Grenze kennt, welche von dem numerischen Werth der Störungen zweiter Ordnung in dem gegebenen Zeitraum nicht überschritten wird. Es versteht sich, dass man eine solche Grenze nur durch die Integration der Störungsglieder zweiter Ordnung erhalten kann. Man erhält die Störungsglieder der zweiten Ordnung, indem man die Störungen der ersten Ordnung an die Stelle der gestörten Elemente in die Störungsgleichungen einsetzt, und es zeigt sich, dass bei der Bestimmung der erwähnten Grenze drei Formen unter den Störungsgliedern der zweiten Ordnung zu unterscheiden sind.

Die elementaren Glieder, welche bekanntlich die störende Masse nicht als Factor enthalten, sind durch das Quadrat einer säcularen Störung der Veränderlichen k und h , oder auch durch ein Product zweier säcularen Störungen dieser Veränderlichen ausgedrückt. Die zweite Form unter den Störungsgliedern der zweiten Ordnung entsteht durch die Multiplication einer säcularen Störung der Veränderlichen k und h mit einer partiellen Derivirten der Störungsfuction. Dieselbe enthält die störende Masse als Factor. Die dritte Form endlich begreift alle diejenigen Störungsglieder der zweiten Ordnung, welche mit dem Quadrat der störenden Masse multiplicirt sind. Diese dritte Form ist aber be-

deutungslos für den fraglichen Grenzwert, weil die derselben entsprechenden Störungen minderwerthig sind. Wie man diesen Grenzwert aus den Störungen erhält, welche den beiden anderen Formen entsprechen, darüber habe ich in Nr. 2626 unter 3. eine Regel aufgestellt, welche hier weiter besprochen werden soll.

Die Störungsglieder der ersten Ordnung führen zu den säcularen Störungen:

$$k = A \cos(\alpha + \beta v_1), \quad h = \mp A \sin(\alpha + \beta v_1),$$

wo A α β beständige Grössen sind. Ich habe schon in Nr. 2515-16 gezeigt, dass diejenigen Störungen der zweiten Ordnung, welche aus den elementaren Gliedern hervorgehen, nahezu gleichwerthig sind dem Quadrate der säcularen Störungen der Veränderlichen k und h . Dieses Resultat ist für jeden, wenn auch noch so grossen Zeitraum richtig. Ich setze aber hier voraus, der Zeitraum, für welchen die Störungen bestimmt werden sollen, sei ein begrenzter. Ich nehme an, derselbe sei nur soweit ausgedehnt, dass $\sin \beta v_1$ einen kleinen Bruchwerth ausdrückt. Indem ich die weitere Forderung stelle, die Veränderlichen k und h sollen für den Anfang des Zeitraums verschwinden, gebe ich den säcularen Störungen von k und h in der verlangten Grenzbestimmung die Form:

$$k = -A \sin \alpha \sin \beta v_1, \quad h = \mp A \cos \alpha \sin \beta v_1.$$

Bezeichnet man hiermit die grössten unter den säcularen Störungen von k und h , so haben die aus den elementaren Gliedern hervorgehenden Störungen der zweiten Ordnung die numerische Grenze:

$$A^2 \sin^2 \beta v_1.$$

Das Integral der zweiten Form unter den Störungsgliedern der zweiten Ordnung betreffend, welche das Product einer säcularen Störung der Veränderlichen k und h mit einem partiellen Differentialquotienten der Störungsfunktion darstellt, habe ich mich an dem oben genannten Ort auf Nr. 2620 § 3 bezogen, wo die Absicht vorliegt, die Integration der Störungsgleichungen für den unbegrenzten Zeitraum auszuführen. Man kann aber, da es sich hier um einen begrenzten, wenn auch beträchtlich ausgedehnten Zeitraum handelt, die Grenze des numerischen Werthes, welchen das in Rede stehende Integral nicht überschreitet, weiter hinausrücken als in jenem andern Falle. Die grössten unter den säcularen Störungen von k und h sind hier:

$$k = -A \sin \alpha \sin \beta v_1, \quad h = \mp A \cos \alpha \sin \beta v_1.$$

Die zweite Form unter den Störungsgliedern der zweiten Ordnung ist daher:

$$CA \sin \beta v_1,$$

wo der Coefficient C ebenso wie β die störende Masse als Factor enthält. Es kommen aber bei der beabsichtigten Grenzbestimmung nur diejenigen Glieder von C in Betracht, welche beständige Grössen sind. Die aus dem vorliegenden Ausdruck sich ergebende Störung der zweiten Ordnung ist daher:

$$\frac{CA}{\beta} (1 - \cos \beta v_1) = \frac{CA}{2\beta} \sin^2 \beta v_1.$$

Für einen ganz kurzen Zeitraum sind bekanntlich die säcularen Störungen kleiner als die periodischen. Es versteht sich, dass dieser Fall in der vorliegenden Untersuchung nicht in Betracht kommt. Es wird vielmehr vorausgesetzt, obschon $\sin \beta v_1$ ein kleiner Bruchwerth sein soll, der Zeitraum, für welchen die Störungen bestimmt werden, sei so lang, dass die säcularen Störungen beträchtlich grösser sind als die periodischen. Unter dieser Voraussetzung können die in dem Vorausgehenden erhaltenen Werthe als die Grenzen für den Gesamtwert der Störungen zweiter Ordnung angesehen werden. Es kommen hierbei zwei verschiedene Resultate in Betracht. Man hat das Quadrat von $\sin \beta v_1$ das eine Mal multiplicirt mit A^2 , das andere Mal mit $\frac{CA}{2\beta}$. Nun ist bekanntlich der Coefficient A in

allen Fällen ein kleiner Bruchwerth. Ferner ist $\frac{C}{2\beta}$ eine quadratische Form der Excentricitäten, wenigstens kann dieses Resultat für alle diejenigen Störungen aufrecht erhalten werden, welche nicht mit $\sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ multiplicirt sind. In den mit $\sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ multiplicirten Störungen kann der Coefficient $\frac{C}{2\beta}$ durch diesen Factor $\sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ allein vertreten sein. Es ist aber demungeachtet in der Regel $\frac{C}{2\beta} < A$, und

man ist daher berechtigt zu sagen, der numerische Werth der Störungen zweiter Ordnung sei nicht grösser als $A^2 \sin^2 \beta v_1$ oder nicht grösser als das Quadrat der säcularen Störungen von k und h . Es giebt nur wenige Störungsaufgaben, in welchen $\frac{C}{2\beta} > A$ ist. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Störungen des Mercur durch die Venus bestimmt werden sollen, weil hier $e^2 = \frac{1}{25} > A$ ist. In solchen Fällen ist bei der Grenzbestimmung des numerischen Werthes der Störungen zweiter Ordnung der Werth $\frac{CA}{2\beta} \sin^2 \beta v_1$ als maassgebend zu betrachten.

Setzt man den Grenzwert der Störungen zweiter Ordnung gleich einer Bogensecunde, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$A^2 \sin^2 \beta v_1 = 1'', \quad A^2 \sin^2 \beta v_1 = 1'' \cdot \frac{2\beta A}{C},$$

von welchen die letztere nur dann anzuwenden ist, wenn $\frac{C}{2\beta} > A$ ist; anderenfalls aber die erstere Gleichung gilt. Nimmt man in diesen Gleichungen beiderseits die Quadratwurzel, so erhält man hiermit eine Grenze, welche die grösste unter den säcularen Störungen von k und h nicht überschreiten darf, damit die Störungen der zweiten Ordnung nicht grösser sind als eine Bogensecunde. Ferner ist durch diese Gleichungen auch der Bogen βv_1 gegeben, oder die Dauer des Zeitraums, für welchen die Störungen der ersten Ordnung die Genauigkeit einer Bogensecunde geben.

Sollen die Störungen der ersten Ordnung eine Genauigkeit geben, welche grösser ist als eine Bogensecunde, so muss man die Störungsrechnung auf einen kürzeren Zeitraum einschränken. Erstreckt sich die Störungsrechnung Beispiels halber nur über die Hälfte desjenigen Zeitraums, für welchen die Störungen der ersten Ordnung die Genauigkeit einer Bogensecunde geben, so ist leicht zu sehen, dass die dann erlangte Genauigkeit der vierte Theil einer Bogensecunde ist.

Wir haben die grösste der säcularen Störungen von k und h mit $A \sin \beta v_1$ bezeichnet, und angenommen, dass der Factor $\sin \beta v_1$ jederzeit einen kleinen Bruchwerth ausdrücke. Es steht daher Nichts im Wege, jede andere säculare Störung von k und h in der Form $BA \sin \beta v_1$ darzustellen. Diese säculare Störung kommt aber nicht mehr in Betracht, wenn $B < A \sin \beta v_1$ ist, weil wir angenommen haben, dass das Quadrat $A^2 \sin^2 \beta v_1$ unberücksichtigt bleibe.

Für jenen Fall, dass $\frac{C}{2\beta} > A$ ist, dürfte man die säculare Störung $BA \sin \beta v_1$ auch dann fortlassen, wenn $B < \frac{C}{2\beta} \sin \beta v_1$ ist, weil in diesem Falle das Product $\frac{CA}{2\beta} \sin^2 \beta v_1$ vernachlässigt werden soll. Diese Bemerkung giebt einen Anhaltspunkt zur Beantwortung der Frage, wie weit die Entwicklung der Störungsfunktion auszuführen sei, damit man zu allen säcularen Störungen gelangt, welche in dem begrenzten Zeitraum noch merklich sind.

Karlsruhe im November 1884.