SUI SISTEMI TRIPLI ORTOGONALI NELLO SPAZIO EUCLIDEO, E SUI SISTEMI NORMALI DI CIRCOLI.

Memoria di **Pasquale Calapso** (Palermo).

Adunanza del 14 aprile 1907.

La presente Nota non è che una parte di alcune mie ricerche che pubblicherò prossimamente intorno alla teoria generale dei sistemi tripli ortogonali nello spazio euclideo, in cui vengono utilizzati gl'invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi.

L'idea di studiare la teoria da questo punto di vista viene suggerita dalla ben nota proprietà che *l'inversione per raggi vettori reciproci trasforma un sistema triplo ortogonale in un nuovo sistema triplo ortogonale,* congiunta coll'altra che *le tre famiglie di* LAMÉ *formanti il sistema triplo ortogonale si tagliano mutuamente secondo le linee di curvatura.*

In questo lavoro è fatto appena un cenno del modo con cui può esser trattata la questione dal nuovo punto di vista, giacchè esso è più specialmente destinato allo studio d'un caso particolare, cioè del caso in cui le traiettorie ortogonali a una famiglia di LAMÉ siano circoli; in questo caso particolare la teoria dei sistemi tripli ortogonali non differisce della teoria dei sistemi normali di circoli *(sistemi ciclici)* come risulta da un noto teorema di RIBAUCOUR *).

Per quanto riguarda la teoria generale vengono stabilite le seguenti proposizioni: *Se*

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

è l'elemento lineare dello spazio riferito a un sistema triplo ortogonale qualunque, e si pone:

$$\Theta_1 = \frac{H_1}{H_3}, \qquad \Theta_2 = \frac{H_2}{H_3},$$

gl'invarianti fondamentali di una superficie $w =$ cost. *rispetto alle trasformazioni conformi dello spazio* **), *si possono esprimere per* Θ_1, Θ_2 *e le loro derivate rispetto alle va-*

*) BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale,* vol. II, pag. 159.

**) Vedi la mia Nota: *Sugl'invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio* [questi Rendiconti, t. XXII (1906), pp. 197-213: pag. 200, form. (*B*), (*C*)].

riabili u, v e rispetto al parametro w mediante le formole:

$$\omega = \Theta_2 \frac{\partial}{\partial w}\left(\log \frac{\Theta_2}{\Theta_1}\right), \quad \Omega = \Theta_1 \frac{\partial}{\partial w}\left(\log \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\right),$$

$$W = 2\Theta_2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u}\right) - 2\Theta_1 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\right)$$
$$+ 2\Theta_1 \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial w^2} - 2\Theta_2 \frac{\partial^2 \Theta_1}{d w^2} + \frac{\Theta_2}{\Theta_1}\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\right)^2 - \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial w}\right)^2.$$

Risultati analoghi si hanno per una superficie $u = \text{cost.}$, e per una superficie $v = \text{cost.}$, per il che Θ_1 e Θ_2 vengono chiamati *gl'invarianti fondamentali del sistema triplo ortogonale.*

Fra gl'invarianti fondamentali di un sistema triplo ortogonale intervengono relazioni differenziali, che ponendo:

$$I_3 = \frac{1}{\Theta_1 \Theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\right)\right] - \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2} - \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial w^2} + \frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w},$$

$$I_1 = -\Theta_1^2 I_3 - 2\Theta_1 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2} + \left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\right)^2,$$

$$I_2 = -\Theta_2^2 I_3 - 2\Theta_2 \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial w^2} + \left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\right)^2,$$

$$I_4 = \frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial v \partial w},$$

$$I_5 = \frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial u \partial w},$$

assumono la forma:

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_2} I_4\right) &= \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v} I_5,\\
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_1} I_5\right) &= \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u} I_4,\\
\Theta_1 \frac{\partial I_3}{\partial u} &= 2\frac{\partial}{\partial w}(\Theta_1 I_5),\\
\Theta_2 \frac{\partial I_3}{\partial v} &= 2\frac{\partial}{\partial w}(\Theta_2 I_4),\\
\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial I_1}{\partial w} &= 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1} I_5\right),\\
\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial I_2}{\partial w} &= 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2} I_4\right),
\end{aligned}\right.$$

e si dimostra altresì che sono sufficienti, cioè:

Se due funzioni Θ_1, Θ_2 soddisfano al sistema di equazioni differenziali (A), esistono effettivamente ∞^4 sistemi tripli ortogonali (definiti a meno di movimento), per ciascuno dei quali gl'invarianti fondamentali calcolati per u e v si riducono appunto alle funzioni Θ_1, Θ_2.

Applicando questi risultati generali al caso di particolare interesse in cui le traiettorie ortogonali alle superficie $w =$ cost. siano circoli, si trova che in tal caso dovendosi annullare le funzioni I_3, I_4, I_5, il sistema (A) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\right) - \Theta_2\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2} - \Theta_1\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial w^2} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial \Theta_2}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \Theta_1}{\partial w^3} = 0, \qquad \frac{\partial^3 \Theta_2}{\partial w^3} = 0.$$

Ne risulta che gl'invarianti fondamentali per un sistema ciclico hanno la forma:

$$\Theta_1 = \Phi_{11} w^2 + \Phi_{12} w + \Phi_{13},$$
$$\Theta_2 = \Phi_{21} w^2 + \Phi_{22} w + \Phi_{23},$$

in cui le Φ_{ik} sono funzioni di u e v solamente soddisfacenti al sistema di equazioni:

$$(B) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\Phi_{11}}\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial u} = \frac{1}{\Phi_{12}}\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial u} = \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u},\\ &\frac{1}{\Phi_{21}}\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial v} = \frac{1}{\Phi_{22}}\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial v} = \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v},\\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}\right) = 2\Phi_{11}\Phi_{23} - \Phi_{12}\Phi_{22} + 2\Phi_{13}\Phi_{21}.\end{aligned}\right.$$

Sicchè il problema della determinazione dei sistemi ciclici equivale all'integrazione del sistema (B).

Il procedimento sopra stabilito coincide col procedimento noto *), qualora si cerchino i sistemi ciclici normali a una superficie data, giacchè per l'integrazione del sistema (B) si può in particolare procedere nel modo seguente.

Si assuma una superficie qualunque S, riferita alle linee di curvatura colle due forme quadratiche differenziali:

$$E\,du^2 + G\,dv^2,$$
$$D\,du^2 + D''\,dv^2,$$

e si determini una funzione ausiliaria Φ_{33} dall'equazione:

$$(C) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right) = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right).$$

Si determinino altresì otto altre funzioni Φ_{ik} successivamente dalle formole:

$$(D) \qquad \Phi_{32} = \Phi_{33}\left\{C + \int\left[\frac{D}{E}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right)du + \frac{D''}{G}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right)dv\right]\right\},$$

*) BIANCHI, l. c., vol. II, pag. 147.

(C costante arbitraria)

$$\Phi_{13} = \Phi_{33}\sqrt{E},$$

$$\Phi_{23} = \Phi_{33}\sqrt{G},$$

$$\Phi_{31} = \frac{1}{4\Phi_{33}}\left[\Phi_{32}^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right],$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{32}\sqrt{E} - \frac{D}{\sqrt{E}},$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{32}\sqrt{G} - \frac{D''}{\sqrt{G}},$$

$$\Phi_{11} = \Phi_{13}\frac{\dfrac{\partial \Phi_{31}}{\partial u}}{\dfrac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}},$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{23}\frac{\dfrac{\partial \Phi_{31}}{\partial v}}{\dfrac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}}.$$

Le sei funzioni

$$\Phi_{11}, \quad \Phi_{12}, \quad \Phi_{13},$$
$$\Phi_{21}, \quad \Phi_{22}, \quad \Phi_{23},$$

soddisfaranno al sistema (B), e se la superficie di partenza S è qualunque ne daranno l'integrale generale.

Adunque la principale difficoltà del problema consiste nell'integrazione dell'equazione di 2° ordine (C) *), giacchè dalla (D) si avrà con una quadratura la funzione Φ_{32}; dopo di che la determinazione delle rimanenti Φ_{ik} si compie con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Integrato nel modo sudetto il sistema (B), si deducono le tre funzioni H_1, H_2, H_3 che intervengono nell'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema ciclico, e si trova:

$$H_1 = \frac{\Phi_{11}w^2 + \Phi_{12}w + \Phi_{13}}{\Phi_{31}w^2 + \Phi_{32}w + \Phi_{33}},$$

$$H_2 = \frac{\Phi_{21}w^2 + \Phi_{22}w + \Phi_{23}}{\Phi_{31}w^2 + \Phi_{32}w + \Phi_{33}},$$

$$H_3 = \frac{1}{\Phi_{31}w^2 + \Phi_{32}w + \Phi_{33}},$$

quindi:

$$(E)\quad ds^2 = \frac{(\Phi_{11}w^2 + \Phi_{12}w + \Phi_{13})^2 du^2 + (\Phi_{21}w^2 + \Phi_{22}w + \Phi_{23})^2 dv^2 + dw^2}{(\Phi_{31}w^2 + \Phi_{32}w + \Phi_{33})^2}.$$

*) Cfr. BIANCHI, l. c., vol. II, pag. 149, form. (V).

la quale mette miglior luce sulla effettiva forma che assume l'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema ciclico.

Infine supposto note le coordinate x_0, y_0, z_0 di un punto della superficie S come funzioni di u e v, e supposto noti altresì i nove coseni direttori

$$\begin{matrix} X_1^0, & Y_1^0, & Z_1^0, \\ X_2^0, & Y_2^0, & Z_2^0, \\ X_3^0, & Y_3^0, & Z_3^0, \end{matrix}$$

del triedro principale di S, vengono ricavate in termini finiti le coordinate di un punto della superficie generica ortogonale ai circoli in funzione di u, v, w sotto la forma:

$$x = x_0 + \frac{H_3 w}{2\Phi_{33}}\left[\frac{w}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}X_1^0 + \frac{w}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}X_2^0 + (\Phi_{32} w + 2\Phi_{33})X_3^0\right],$$

$$y = y_0 + \frac{H_3 w}{2\Phi_{33}}\left[\frac{w}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}Y_1^0 + \frac{w}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}Y_2^0 + (\Phi_{32} w + 2\Phi_{33})Y_3^0\right],$$

$$z = z_0 + \frac{H_3 w}{2\Phi_{33}}\left[\frac{w}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}Z_1^0 + \frac{w}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}Z_2^0 + (\Phi_{32} w + 2\Phi_{33})Z_3^0\right].$$

Queste formole fanno conoscere la più generale superficie ortogonale ai circoli dando a w un valore arbitrario; in particolare per $w = 0$ dànno la superficie iniziale S.

§ I. Gl'invarianti fondamentali dei sistemi tripli ortogonali, rispetto al gruppo delle trasformazioni conformi.

1. Per determinare nel modo più generale un sistema triplo di superficie ortogonali, basta assumere tre funzioni H_1, H_2, H_3 di tre variabili u, v, w soddisfacenti al sistema di equazioni:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial w} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial w}, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial w \partial u} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial u}, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right) + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right) + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right) + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial v} = 0, \end{aligned}\right.$$

e integrare il sistema completo nelle funzioni incognite X_1, X_2, X_3:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}X_2 - \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}X_3, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}X_2; \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial w} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}X_3, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial v}X_1, \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}X_3 - \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u}X_1, \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial w} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}X_3, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial w}X_1, \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial w}X_2, \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial w} = -\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u}X_1 - \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial v}X_2, \end{cases}$$

ad opportune condizioni iniziali, cioè determinando tre sistemi integrali

$$\begin{matrix} X_1, & X_2, & X_3, \\ Y_1, & Y_2, & Y_3, \\ Z_1, & Z_2, & Z_3, \end{matrix}$$

che formino i coefficienti di una sostituzione ortogonale.

In questo modo le coordinate d'un punto dello spazio, come funzioni delle variabili u, v, w, saranno date dalle formole:

$$(6)\quad \begin{cases} dx = H_1 X_1 du + H_2 X_2 dv + H_3 X_3 dw, \\ dy = H_1 Y_1 du + H_2 Y_2 dv + H_3 Y_3 dw, \\ dz = H_1 Z_1 du + H_2 Z_2 dv + H_3 Z_3 dw, \end{cases}$$

e si avrà:

$$(7)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2 \text{ *)}.$$

2. Ricordiamo che l'inversione per raggi vettori reciproci cangia un sistema triplo ortogonale in un nuovo sistema triplo ortogonale; per questa ragione introdurremo nella presente memoria gl'*invarianti* delle superficie rispetto al gruppo delle trasformazioni conformi **) che calcoleremo per una famiglia di LAMÉ.

---

*) BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale,* vol. II, pag. 478.

**) Vedi la mia Nota: *Sugl'invarianti,* etc., loco citato, pag. 200; form. (*B*), (*C*).

Denotando con Δ, Δ'' i coefficienti della seconda forma fondamentale per una superficie $w =$ costante, abbiamo da formole note:

$$\frac{\Delta}{H_1} = -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}, \qquad \frac{\Delta''}{H_2} = -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w};$$

sicchè gl'invarianti ω, Ω espressi dalle formole:

$$\omega = \frac{H_2}{H_1}\frac{\Delta}{H_1} - \frac{\Delta''}{H_2}, \qquad \Omega = \frac{H_1}{H_2}\frac{\Delta''}{H_2} - \frac{\Delta}{H_1},$$

assumono rispettivamente la forma:

$$\omega = \frac{H_2}{H_3}\left(\frac{\partial \log H_2}{\partial w} - \frac{\partial \log H_1}{\partial w}\right), \qquad \Omega = \frac{H_1}{H_3}\left(\frac{\partial \log H_1}{\partial w} - \frac{\partial \log H_2}{\partial w}\right);$$

ossia, ponendo:

$$(8) \qquad \Theta_1 = \frac{H_1}{H_3}, \qquad \Theta_2 = \frac{H_2}{H_3},$$

scriveremo definitivamente:

$$(9) \qquad \omega = \Theta_2\left(\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w} - \frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w}\right), \qquad \Omega = \Theta_1\left(\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w} - \frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w}\right).$$

Prima di procedere al calcolo dell'invariante W conviene eliminare dal sistema di equazioni (1), (2) tenendo conto delle (8) le funzioni H_1, H_2; così il sistema (1), (2) diventa:

$$(10)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_3}{\partial v \partial w} &= \frac{2}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial w} + \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial v} + H_3\left(\frac{1}{\Theta_1\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \Theta_2}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial v \partial w}\right),\\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial w} &= \frac{2}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial w} + \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial u} + H_3\left(\frac{1}{\Theta_1\Theta_2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial \Theta_1}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial u \partial w}\right),\\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial u \partial v} &= \frac{2}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v} + \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v},
\end{aligned}\right.$$

$$(11)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u^2} + \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v^2} + \Theta_1\Theta_2\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u} - \frac{\Theta_2}{\Theta_1^2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\right)\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\\
&\qquad + \left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \frac{\Theta_1}{\Theta_2^2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial v}\right)\frac{\partial \log H_3}{\partial v} + \left(\Theta_1\frac{\partial \Theta_2}{\partial w} + \Theta_2\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\right)\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\\
&\qquad\qquad + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\right) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial \Theta_2}{\partial w} = 0,\\
&\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v^2} + \Theta_2\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial w^2} + \frac{\Theta_2}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\Theta_1^2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\\
&\qquad - \frac{1}{\Theta_2^2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial v}\frac{\partial \log H_3}{\partial v} + \frac{\partial \Theta_2}{\partial w}\frac{\partial \log H_3}{\partial w} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial w^2} = 0,\\
&\Theta_1\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial w^2} + \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u^2} + \frac{\Theta_1}{\Theta_2^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{\Theta_1^2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\\
&\qquad + \frac{1}{\Theta_2^2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \log H_3}{\partial v} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial \log H_3}{\partial w} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

E risolvendo queste ultime rispetto $\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v^2}$, avremo:

$$(12)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\Theta_2^2\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Theta_2^2}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial v}\frac{\partial \log H_3}{\partial v} - \Theta_2\frac{\partial \Theta_2}{\partial w}\frac{\partial \log H_3}{\partial w} - \frac{\Theta_2}{\Theta_1^2}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial \log H_3}{\partial u} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\left[\Theta_2\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial w^2} - \Theta_1\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial w^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial\Theta_1}{\partial w}\frac{\partial\Theta_2}{\partial w}\right].\end{aligned}\right.$$

Possiamo altresì da questa formare un'equazione in cui compariscono soltanto H_1, Θ_1, Θ_2, tenendo conto delle (8); otterremo così:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log H_1}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log H_1}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Theta_2^2}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial \log H_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial v} - \frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\right)\frac{\partial \log H_1}{\partial v} \\ &- \frac{\Theta_2^2}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u} - \frac{\partial \log \Theta_1}{\partial u}\right)\frac{\partial \log H_1}{\partial u} - \frac{1}{2}\Theta_2^2\left(\frac{\partial \log H_1}{\partial w}\right)^2 - \omega\,\Theta_2\frac{\partial \log H_1}{\partial w} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\left[\Theta_2\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial w^2} - \Theta_1\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial w^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial\Theta_1}{\partial w}\cdot\frac{\partial\Theta_2}{\partial w}\right] \\ &+ \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\Theta_2^2\left(\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Theta_2^2}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial u}\right)^2 \\ &- \frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial v} + \Theta_2^2\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w} + \frac{\Theta_2^2}{\Theta_1^2}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial u}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u}.\end{aligned}$$

Se ora confrontiamo questa con la (28) della mia citata memoria, e teniamo presente l'espressione di ω per Θ_1 e Θ_2 data dalle (9), troveremo per la funzione J la formola:

$$\begin{aligned}J &= \left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)^2 + \frac{2}{\Theta_1}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial v^2} - \frac{2}{\Theta_1\Theta_2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\frac{\partial\Theta_2}{\partial v} \\ &+ \frac{\Theta_2}{\Theta_1}\left[\Theta_2\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial w^2} - \Theta_1\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial w^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right) - \frac{\partial\Theta_1}{\partial w}\frac{\partial\Theta_2}{\partial w}\right].\end{aligned}$$

Da questa in forza delle (32) della mia citata memoria facilmente dedurremo l'espressione di W sotto la forma seguente:

$$(13)\left\{\begin{aligned}W &= 2\Theta_2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u}\right) - 2\Theta_1\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\right) \\ &+ 2\Theta_1\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial w^2} - 2\Theta_2\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial w^2} + \frac{\Theta_2}{\Theta_1}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial w}\right)^2 - \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial w}\right)^2.\end{aligned}\right.$$

Frattanto risulta che gl'invarianti ω, Ω, W per la famiglia di LAMÉ $w =$ cost. si esprimono per le funzioni Θ_1, Θ_2 e le loro derivate, e le (9), (13) dànno le effettive espressioni; similmente accadrà per le superficie $u =$ cost. e $v =$ cost.; per questa ragione chiameremo Θ_1 e Θ_2 gl'invarianti fondamentali del sistema triplo ortogonale.

3. Ora vogliamo ricercare le equazioni differenziali a cui debbono soddisfare due funzioni Θ_1, Θ_2, affinchè si possano assumere come invarianti fondamentali per un sistema triplo ortogonale.

Posto per brevità:

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\Theta_1\Theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)\right]\\
&\quad -\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial w^2}-\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial\Theta_2}{\partial w^2}+\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial w}\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial w},\\
I_1 &= -\Theta_1^2 I_3 - 2\Theta_1\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial w^2}+\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)^2,\\
I_2 &= -\Theta_2^2 I_3 - 2\Theta_2\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial w^2}+\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right)^2,
\end{aligned}\right.
$$

sostituiremo al sistema di equazioni (10), (11) il sistema equivalente che si ottiene risolvendo rispetto alle derivate seconde della funzione H_3, ed avremo:

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\log H_3}{\partial v\partial w} &= \frac{\partial\log H_3}{\partial v}\frac{\partial\log H_3}{\partial w}+\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial w}\frac{\partial\log H_3}{\partial v}+\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial v}\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial w}-\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial v\partial w},\\
\frac{\partial^2\log H_3}{\partial u d w} &= \frac{\partial\log H_3}{\partial u}\frac{\partial\log H_3}{\partial w}+\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial w}\frac{\partial\log H_3}{\partial u}+\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial u}\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial w}-\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial u\partial w},\\
\frac{\partial^2\log H_3}{\partial u d v} &= \frac{\partial\log H_3}{\partial u}\frac{\partial\log H_3}{\partial v}+\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial v}\frac{\partial\log H_3}{\partial u}+\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial u}\frac{\partial\log H_3}{\partial v},\\
\frac{\partial^2\log H_3}{\partial w^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial w}\right)^2-\frac{1}{2\Theta_1^2}\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2\Theta_2^2}\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{2}I_3,\\
\frac{\partial^2\log H_3}{\partial u^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}\Theta_1^2\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial w}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\Theta_1^2}{\Theta_2^2}\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial v}\right)^2\\
&\quad+\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial u}\frac{\partial\log H_3}{\partial u}-\Theta_1^2\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial w}\frac{\partial\log H_3}{\partial w}-\frac{\Theta_1^2}{\Theta_2^2}\frac{\partial\log\Theta_1}{\partial v}\frac{\partial\log H_3}{\partial v}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[I_1-\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial w}\right)^2-\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)^2\right],\\
\frac{\partial^2\log H_3}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{2}\Theta_2^2\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial w}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\Theta_2^2}{\Theta_1^2}\left(\frac{\partial\log H_3}{\partial u}\right)^2\\
&\quad+\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial v}\frac{\partial\log H_3}{\partial v}-\Theta_2^2\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial w}\frac{\partial\log H_3}{\partial w}-\frac{\Theta_2^2}{\Theta_1^2}\frac{\partial\log\Theta_2}{\partial u}\frac{\partial\log H_3}{\partial u}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[I_2-\left(\frac{\partial\Theta_2}{\partial w}\right)^2-\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right)^2\right].
\end{aligned}\right.
$$

Perverremo alle condizioni richieste, imponendo le condizioni:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial v\partial w}\right) &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial u\partial v}\right),\\
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial u\partial w}\right) &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial u\partial v}\right),\\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial w^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial u\partial w}\right),\\
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial w^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2\log H_3}{\partial v\partial w}\right),
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u^2}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u \partial v}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u^2}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u \partial w}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v \partial w}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v^2}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u \partial v}\right),$$

e sostituendo per le derivate seconde le loro espressioni date dalle (15); così operando dopo opportune trasformazioni troveremo:

$$(16)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial\log\Theta_1}{\partial v}\dfrac{\partial\log\Theta_2}{\partial w}-\dfrac{1}{\Theta_1\Theta_2}\dfrac{\partial^2\Theta_1}{\partial v\partial w}\right)=\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial\log\Theta_2}{\partial u}\dfrac{\partial\log\Theta_1}{\partial w}-\dfrac{1}{\Theta_1\Theta_2}\dfrac{\partial^2\Theta_2}{\partial u\partial w}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial\log\Theta_2}{\partial u}\dfrac{\partial\log\Theta_1}{\partial w}-\dfrac{1}{\Theta_1\Theta_2}\dfrac{\partial^2\Theta_2}{\partial u\partial w}\right)=\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial\log\Theta_1}{\partial v}\dfrac{\partial\log\Theta_2}{\partial w}-\dfrac{1}{\Theta_1\Theta_2}\dfrac{\partial^2\Theta_1}{\partial v\partial w}\right),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I_3}{\partial u}=\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial u}\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial w}-\dfrac{\Theta_1}{\Theta_2}\dfrac{\partial^2\Theta_2}{\partial u\partial w}\right),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I_3}{\partial v}=\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial}{\partial w}\left(\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial v}\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial w}-\dfrac{\Theta_2}{\Theta_1}\dfrac{\partial^2\Theta_1}{\partial v\partial w}\right),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I_1}{\partial v}=-\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial u}\right),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I_1}{\partial w}=\Theta_1\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial\log\Theta_2}{\partial u}\dfrac{\partial\log\Theta_1}{\partial w}-\dfrac{1}{\Theta_1\Theta_2}\dfrac{\partial^2\Theta_2}{\partial u\partial w}\right),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I_2}{\partial w}=\Theta_2\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial\log\Theta_1}{\partial v}\dfrac{\partial\log\Theta_2}{\partial w}-\dfrac{1}{\Theta_1\Theta_2}\dfrac{\partial^2\Theta_1}{\partial v\partial w}\right),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I_2}{\partial u}=-\dfrac{1}{\Theta_1}\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\Theta_2}\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right) \;{}^{*)},
\end{cases}$$

Inversamente, se due funzioni Θ_1, Θ_2 soddisfanno alle relazioni (16), il sistema di equazione (15) è illimitatamente integrabile; assumendo una soluzione H_3 di questo sistema e le funzioni H_1, H_2 date dalle (8), saranno soddisfatte le equazioni di Lamé (1), (2) e il sistema triplo ortogonale è pienamente determinato a meno di movimenti nello spazio.

§ II. I sistemi ciclici.

4. Applicheremo i risultati del paragrafo precedente alla ricerca dei sistemi ciclici, considerando il problema dei sistemi ciclici come caso particolare del problema precedente in cui le linee $u =$ cost., $v =$ cost. siano circoli.

---

*) Di queste equazioni soltanto sei sono indipendenti, giacchè la quinta e l'ottava seguono rispettivamente dalla quarta e dalla terza in forza delle (14).

Denotando con $d\sigma$ il differenziale dell'arco di linea $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, avremo:

$$d\sigma = H_3 dw,$$

e per il raggio di prima curvatura avremo l'espressione:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dX_3}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dY_3}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dZ_3}{d\sigma}\right)^2,$$

ossia:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{H_3^2}\left[\left(\frac{\partial X_3}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y_3}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_3}{\partial w}\right)^2\right].$$

Se ora per $\frac{\partial X_3}{\partial w}$ poniamo la sua espressione data dalle (5), e analogamente per Y_3, Z_3, otterremo dopo riduzione:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right)^2. \tag{17}$$

Denotando altresì con

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu$$

i coseni direttori della binormale, avremo:

$$\cos\lambda = -R\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}X_2 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}X_1\right),$$

e le analoghe per $\cos\mu$, $\cos\nu$; donde derivando rispetto a w e tenendo presenti le (3), (4):

$$\frac{\partial \cos\lambda}{\partial w} = -\left[R\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right) + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right]X_2$$
$$+\left[R\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right) + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right]X_1.$$

Ciò posto affinchè le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, siano piane occorre che si abbia:

$$\frac{\partial \cos\lambda}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial \cos\mu}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial \cos\nu}{\partial w} = 0,$$

e per conseguenza:

$$R\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right) + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u} = 0,$$
$$R\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right) + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v} = 0.$$

Più particolarmente, affinchè le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ siano circoli, occorre aggiungere alle due relazioni precedenti la condizione:

$$\frac{\partial R}{\partial w} = 0,$$

e le precedenti diventano:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Inversamente, se sono soddisfatte queste condizioni, si avrà dalla (17):

$$\frac{\partial R}{\partial w} = 0,$$

e i coseni direttori della binormale risulteranno indipendenti da w; le linee $u =$ cost., $v =$ cost. saranno curve piane a curvatura costante e perciò circoli.

5. Ciò posto dalle (18) eseguendo la derivazione indicata, e tenendo conto delle (8), si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right) = \frac{1}{H_1}\left[\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u \partial w} - \frac{\partial \log H_3}{\partial u}\left(\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w} + \frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right) = \frac{1}{H_2}\left[\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial v \partial w} - \frac{\partial \log H_3}{\partial v}\left(\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w} + \frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)\right],$$

ed eliminando in forza delle (15) le derivate seconde di H_3, le precedenti diventano:

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right) = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial u \partial w}\right),\\ &\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right) = \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial v \partial w}\right),\end{aligned}\right.$$

sicchè le condizioni caratteristiche per un sistema ciclico si possono scrivere sotto la forma seguente:

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial u \partial w} = 0,\\ &\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial w} - \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial v \partial w} = 0,\end{aligned}\right.$$

ed esprimono che le espressioni:

$$(21)\qquad \frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v},$$

sono funzioni delle variabili u e v soltanto.

Se ora nelle (16) teniamo conto delle (20), esse diventano:

$$\frac{\partial I_3}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial I_3}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial I_2}{\partial w} = 0,$$

e le prime due esprimono che I_3 è funzione della sola w.

Intanto si osserva che per un cambiamento del parametro w, Θ_1 e Θ_2 restano moltiplicate per una funzione di w; mentre I_3 verrà incrementata di una funzione arbitraria della variabile w; ond'è che senza ledere la generalità possiamo ritenere che la I_3 si annulli e così avremo per la determinazione dei sistemi ciclici il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$(22)\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u}\right)=0,\\&\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\right)=0,\\&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\right)-\Theta_2\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2}-\Theta_1\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial w^2}+\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial \Theta_2}{\partial w}=0,\\&\frac{\partial^3 \Theta_1}{\partial w^3}=0,\\&\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial w^3}=0.\end{aligned}\right.$$

Possiamo liberarci dalla variabile w assumendo l'integrale generale delle due ultime sotto la forma:

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}\Theta_1&=\Phi_{11}w^2+\Phi_{12}w+\Phi_{13},\\\Theta_2&=\Phi_{21}w^2+\Phi_{22}w+\Phi_{23},\end{aligned}\right.$$

in cui Φ_{ik} è funzione di u e v solamente, ed obbligando ad essere soddisfatte le prime tre, in questo modo si vede facilmente che le sei funzioni Φ_{ik} debbono soddisfare alle equazioni:

$$(24)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\Phi_{11}}\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial u}=\frac{1}{\Phi_{12}}\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial u}=\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u},\\&\frac{1}{\Phi_{21}}\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial v}=\frac{1}{\Phi_{22}}\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial v}=\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v},\\&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}\right)=2\Phi_{11}\Phi_{23}-\Phi_{12}\Phi_{22}+2\Phi_{13}\Phi_{21}.\end{aligned}\right.$$

Viceversa, se queste sono soddisfatte, le funzioni Θ_1, Θ_2 date dalle (23) verificheranno le (22).

§ III. Le superficie ortogonali ai circoli.

6. Per la determinazione delle superficie ortogonali ai circoli occorre integrare il sistema completo (15).

A tale scopo osserviamo anzitutto che in forza dell'annullarsi della funzione I_3 e in forza della (17), la quarta delle (15) si può scrivere:

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 \log H_3}{\partial w^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2-\frac{1}{2R^2}H_3^2,$$

e ammette l'integrale generale:

$$(26)\qquad \frac{1}{H_3}=\Phi_{31}w^2+\Phi_{32}w+\Phi_{33},$$

in cui le funzioni Φ_{31}, Φ_{32}, Φ_{33} delle sole variabili u e v sono legate alla funzione R dalla relazione:

$$(27)\qquad 4\Phi_{31}\Phi_{33}=\Phi_{32}^2+\frac{1}{R^2}.$$

Derivando la (26) rispetto alle variabili u, v, w, otteniamo:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log H_3}{\partial u} &= -H_3\left(\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial u}w^2 + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial u}w + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right),\\ \frac{\partial \log H_3}{\partial v} &= -H_3\left(\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial v}w^2 + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial v}w + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right),\\ \frac{\partial \log H_3}{\partial w} &= -H_3(2\Phi_{31}w + \Phi_{32}),\end{aligned}\right.$$

e osservando che le espressioni:

$$\frac{1}{\Theta_1 H_3}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\Theta_2 H_3}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}$$

debbono risultare per le (18) indipendenti da w, concludiamo che si dovrà avere:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\Phi_{11}}\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial u} &= \frac{1}{\Phi_{12}}\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial u} = \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u},\\ \frac{1}{\Phi_{21}}\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial v} &= \frac{1}{\Phi_{22}}\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial v} = \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

Ciò posto consideriamo la superficie ortogonale ai circoli $w = 0$, per la quale conserveremo le consuete notazioni.

Avremo:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt{E} &= (\Theta_1 H_3)_0 = \frac{\Phi_{13}}{\Phi_{33}},\\ \sqrt{G} &= (\Theta_2 H_3)_0 = \frac{\Phi_{23}}{\Phi_{33}},\\ \frac{D}{\sqrt{E}} &= -\left[\frac{1}{H_3}\left(\Theta_1\frac{\partial H_3}{\partial w} + H_3\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\right)\right]_0 = \Phi_{32}\sqrt{E} - \Phi_{12},\\ \frac{D''}{\sqrt{G}} &= -\left[\frac{1}{H_3}\left(\Theta_2\frac{\partial H_3}{\partial w} + H_3\frac{\partial \Theta_2}{\partial w}\right)\right]_0 = \Phi_{32}\sqrt{G} - \Phi_{22}.\end{aligned}\right.$$

D'altra parte si hanno dalle (29) le relazioni:

$$\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial u} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial v} = \frac{\Phi_{22}}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v},$$

che tenendo conto delle precedenti si possono scrivere:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\left(\Phi_{32} - \frac{D}{E}\right),\\ \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\left(\Phi_{32} - \frac{D''}{G}\right);\end{aligned}\right.$$

e, imponendo la condizione:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi_{32}}{\partial v}\right),$$

si trova:

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 \log \Phi_{33}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v},$$

ossia:

$$(33)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right) = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right) + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right).$$

Inoltre dalla (27), dalle (29) e dalle (30) si ricava:

$$(34)\qquad \Phi_{13} = \Phi_{33}\sqrt{E},$$

$$(35)\qquad \Phi_{23} = \Phi_{33}\sqrt{G},$$

$$(36)\qquad \Phi_{31} = \frac{1}{4\Phi_{33}}\left[\Phi_{32}^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right],$$

$$(37)\qquad \Phi_{12} = \Phi_{32}\sqrt{E} - \frac{D}{\sqrt{E}},$$

$$(38)\qquad \Phi_{22} = \Phi_{32}\sqrt{G} - \frac{D''}{\sqrt{G}},$$

$$(39)\qquad \Phi_{11} = \Phi_{13}\frac{\dfrac{\partial \Phi_{31}}{\partial u}}{\dfrac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}},$$

$$(40)\qquad \Phi_{21} = \Phi_{23}\frac{\dfrac{\partial \Phi_{31}}{\partial v}}{\dfrac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}}.$$

È utile per il seguito delle presenti ricerche stabilire due altre espressioni per le funzioni Φ_{11} e Φ_{21} che si deducono dalle (32), (31), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40), per derivazione.

A tale scopo consideriamo la (36) e deriviamo rispetto alla variabile u, tenendo presenti le (31), la (32) e la (35); avremo:

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial u} = &- \frac{1}{4\Phi_{33}^2}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\left[\Phi_{32}^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right] \\ &+ \frac{\Phi_{32}}{2\Phi_{33}^2}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\left(\Phi_{32} - \frac{D}{E}\right) + \frac{1}{2\Phi_{13}\Phi_{33}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right) \\ &+ \frac{1}{2\Phi_{23}^2\Phi_{33}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v} + \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

Similmente:

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial v} = &- \frac{1}{4\Phi_{33}^2}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\left[\Phi_{32}^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right] \\ &+ \frac{\Phi_{32}}{2\Phi_{33}^2}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\left(\Phi_{32} - \frac{D''}{G}\right) + \frac{1}{2\Phi_{23}\Phi_{33}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right) \\ &+ \frac{1}{2\Phi_{13}^2\Phi_{33}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right), \end{aligned}\right.$$

donde in forza delle (39), (40) possiamo ricavare le funzioni Φ_{11}, Φ_{21} sotto la forma seguente:

$$(43)\left\{\begin{aligned} 2\Phi_{11}\Phi_{23} &= \sqrt{G}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right) + \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{EG}\left[\Phi_{32}^2 - \left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right] - \Phi_{32}\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}, \end{aligned}\right.$$

$$(44)\left\{\begin{aligned} 2\Phi_{21}\Phi_{13} &= \sqrt{E}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right) + \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{EG}\left[\Phi_{32}^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right] - \Phi_{32}\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}. \end{aligned}\right.$$

7. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema fondamentale per la teoria generale dei sistemi ciclici, cioè:

Partendo da una superficie qualunque S riferita alle linee di curvatura, colle due forme quadratiche differenziali:

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &E du^2 + G dv^2, \\ &D du^2 + D'' dv^2, \end{aligned}\right.$$

e da una soluzione Φ_{33} *dell'equazione di secondo ordine* (33), *si avranno dalle* (31), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40) *altre otto funzioni* Φ_{ik}; *assumendo le sei funzioni:*

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Phi_{11}, \quad \Phi_{12}, \quad \Phi_{13}, \\ &\Phi_{21}, \quad \Phi_{22}, \quad \Phi_{23}, \end{aligned}\right.$$

si avrà una soluzione delle (24), *e in conseguenza ponendo:*

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} \Theta_1 &= \Phi_{11} w^2 + \Phi_{12} w + \Phi_{13}, \\ \Theta_2 &= \Phi_{21} w^2 + \Phi_{22} w + \Phi_{23}, \end{aligned}\right.$$

saranno soddisfatte le (22); *inoltre la funzione:*

$$(48)\qquad H_3 = \frac{1}{\Phi_{31} w^2 + \Phi_{32} w + \Phi_{33}},$$

sarà una soluzione del sistema completo (15).

Infatti dalle (34) e (35) derivando e tenendo presenti le (34) e (35) medesime si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}\right) &= \sqrt{G}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right) + \sqrt{E}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right) \\ &+ \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \\ &+ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Inoltre dalle (37), (38), (43), (44) si ha:

$$2\Phi_{11}\Phi_{23} - \Phi_{12}\Phi_{22} + 2\Phi_{13}\Phi_{21} = \sqrt{G}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right) + \sqrt{E}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{DD''}{\sqrt{EG}},$$

ne segue per l'equazione di GAUSS relativa alla superficie S, la relazione:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}\right) = 2\Phi_{11}\Phi_{23} - \Phi_{12}\Phi_{22} + 2\Phi_{13}\Phi_{21},$$

che è la terza delle (24).

In secondo luogo deriviamo la (38) tenendo presenti le (31) e le equazioni di CODAZZI relative alla superficie S; avremo:

$$\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial u} = \Phi_{32}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \sqrt{G}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\left(\Phi_{32} - \frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{D}{E}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$
$$= \sqrt{G}\left(\Phi_{32} - \frac{D}{E}\right)\left(\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\right),$$

e per le (34), (35), (37):

$$\frac{1}{\Phi_{12}}\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial u} = \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u}.$$

Similmente si ricava:

$$\frac{1}{\Phi_{22}}\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial v} = \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}.$$

In terzo luogo consideriamo la (43) e (44) che in forza della (34) e (35) potremo anche scrivere:

$$2\Phi_{11} = \frac{1}{\Phi_{33}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\right) + \frac{1}{\Phi_{33}\sqrt{G}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$
$$+\frac{\sqrt{E}}{2\Phi_{33}}\left[\Phi_{32}^2 - \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right] - \frac{\Phi_{32}}{\Phi_{33}}\frac{D}{\sqrt{E}},$$

$$2\Phi_{21} = \frac{1}{\Phi_{33}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\right) + \frac{1}{\Phi_{33}\sqrt{E}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$
$$+\frac{\sqrt{G}}{2\Phi_{33}}\left[\Phi_{32}^2 + \frac{1}{E}\left(\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right] - \frac{\Phi_{32}}{\Phi_{33}}\frac{D''}{\sqrt{G}},$$

e deriviamo la prima di queste rispetto a v, tenendo presenti le (31), (32) e le equazioni di CODAZZI relative alla superficie S; avremo:

$$2\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial v} = 2\Phi_{21}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{1}{\Phi_{33}\sqrt{G}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{DD''}{\sqrt{EG}}\right],$$

e in forza dell'equazione di GAUSS:

$$\frac{1}{\Phi_{21}}\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}.$$

D'altra parte dalle (34) e (35) abbiamo:

$$\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v},$$

quindi concludiamo:

$$\frac{1}{\Phi_{21}}\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial v} = \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}.$$

Similmente ricaviamo:

$$\frac{1}{\Phi_{11}}\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial u} = \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u},$$

ed è così dimostrata la prima parte del teorema.

Resta ancora a provare che la funzione H_3 definita dalla (48) soddisfa al sistema completo (15).

Infatti derivando la (48) rispetto a u e tenendo presenti le (31), (34), (37), (39), (47), si ottiene:

$$\frac{\partial \log H_3}{\partial u} = -\Theta_1 H_3 \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}, \tag{49}$$

similmente

$$\frac{\partial \log H_3}{\partial v} = -\Theta_2 H_3 \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}. \tag{50}$$

Ancora derivando la (48) rispetto a w, quadrando e tenendo conto della (48) medesima si ricava:

$$\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2 = H_3^2(\Phi_{32}^2 - 4\Phi_{31}\Phi_{33}) + 4H_3\Phi_{31},$$

che per la (36) si può scrivere:

$$\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2 = 4H_3\Phi_{31} - H_3^2\left[\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right]. \tag{51}$$

Ciò posto consideriamo la (43), che per le (34), (35), (36), (37) si può anche scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right) + \frac{1}{\Phi_{23}^2}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v} - 2\Phi_{31}\Phi_{13} + \Phi_{32}\Phi_{12} - 2\Phi_{33}\Phi_{11} = 0,$$

e consideriamo altresì la relazione:

$$\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial w} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2} + 2\Theta_1\Phi_{31} = 2\Phi_{31}\Phi_{13} - \Phi_{32}\Phi_{12} + 2\Phi_{33}\Phi_{11},$$

che si deduce dalle (47) e (48) per derivazione.

Combinando quest'ultima colla precedente avremo:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right) + \frac{1}{\Phi_{23}^2}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v} = \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial w} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2} + 2\Theta_1\Phi_{31},$$

ovvero per la (51):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)+\frac{1}{\Phi_{23}^2}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}=\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial H_3}{\partial w}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2}+\frac{\Theta_1}{2H_3}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2$$
$$+\frac{\Theta_1 H_3}{2}\left[\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right].$$

Se per le quantità $\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}$, $\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}$ sostituiamo le loro espressioni ricavate dalle (49) e (50), e ricordiamo che:

$$\frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}=\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial v},$$

otterremo:

$$-\frac{1}{\Theta_1 H_3}\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u^2}+\frac{1}{2\Theta_1 H_3}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{\Theta_1 H_3}\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial u}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}-\frac{1}{\Theta_2^2 H_3}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}$$
$$=\frac{1}{H_3}\frac{\partial \Theta_1}{\partial w}\frac{\partial \log H_3}{\partial w}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial w^2}+\frac{\Theta_1}{2H_3}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2+\frac{\Theta_1}{2\Theta_2^2 H_3}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right)^2,$$

che è la quinta delle (15).

Similmente si ricava la sesta delle (15).

In secondo luogo deriviamo la (51) rispetto a w, avremo:

$$\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial w^2}=2\Phi_{31}H_3-H_3^2\left[\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2\right],$$

e questa per la (51) medesima e per le (49) e (50) si può scrivere:

$$\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial w^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial w}\right)^2-\frac{1}{2\Theta_1^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2\Theta_2^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial v}\right)^2,$$

che è la quarta delle (15).

In terzo luogo osserviamo che per le (49) e (50) le espressioni:

$$\frac{1}{\Theta_1 H_3}\frac{\partial \log H_3}{\partial u},\qquad \frac{1}{\Theta_2 H_3}\frac{\partial \log H_3}{\partial v},$$

sono indipendenti da w; eguagliando a zero le loro derivate rispetto a w si ottengono la prima e la seconda delle (15).

Infine consideriamo l'espressione $\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}$ e deriviamo rispetto a v tenendo conto della (34); avremo:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial^2 \log \Phi_{33}}{\partial u \partial v}-\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}\right),$$

inoltre per la (34) e (35) avremo altresì:

$$\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial v}\left(\frac{\partial \log \Phi_{33}}{\partial u}+\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\right),$$

segue per la (32):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)=\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u}\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v},$$

ed in questa sostituendo per $\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}$, $\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}$ le loro espressioni ricavate dalle (49) e (50) e ricordando che

$$\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial u}=\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial \Theta_2}{\partial u},$$

ricaviamo:

$$\frac{\partial^2 \log H_3}{\partial u \partial v}=\frac{\partial \log H_3}{\partial u}\frac{\partial \log H_3}{\partial v}+\frac{\partial \log \Theta_1}{\partial v}\frac{\partial \log H_3}{\partial u}+\frac{\partial \log \Theta_2}{\partial u}\frac{\partial \log H_3}{\partial v},$$

che è la terza della (15) e così il teorema è dimostrato completamente.

8. Frattanto risulta da quanto sopra è detto che la principale difficoltà della determinazione dei sistemi ciclici consiste nell'integrazione dell'equazione di secondo ordine (33); per una funzione Φ_{33} che soddisfa a questa equazione il sistema (31) è illimitatamente integrabile e la determinazione della funzione Φ_{32} si compie con una quadratura mediante la formola:

$$\Phi_{32}=\Phi_{33}\left\{C+\int\left[\frac{D}{E}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right)du+\frac{D''}{G}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Phi_{33}}\right)dv\right]\right\}; \tag{52}$$

dopo di che si avranno le rimanenti Φ_{ik} successivamente dalle (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40) con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Le funzioni fondamentali H_1, H_2, H_3 saranno date da:

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= \frac{\Phi_{11}w^2+\Phi_{12}w+\Phi_{13}}{\Phi_{31}w^2+\Phi_{32}w+\Phi_{33}},\\ H_2 &= \frac{\Phi_{21}w^2+\Phi_{22}w+\Phi_{23}}{\Phi_{31}w^2+\Phi_{32}w+\Phi_{33}},\\ H_3 &= \frac{1}{\Phi_{31}w^2+\Phi_{32}w+\Phi_{33}},\end{aligned}\right. \tag{53}$$

e l'elemento lineare dello spazio riferito al sistema ciclico assume la forma:

$$ds^2=\frac{(\Phi_{11}w^2+\Phi_{12}w+\Phi_{13})^2du^2+(\Phi_{21}w^2+\Phi_{22}w+\Phi_{23})^2dv^2+dw^2}{(\Phi_{31}w^2+\Phi_{32}w+\Phi_{33})^2}. \tag{54}$$

In particolare per $w=0$ si ha:

$$ds^2=\frac{\Phi_{13}^2}{\Phi_{33}^2}du^2+\frac{\Phi_{23}^2}{\Phi_{33}^2}dv^2,$$

ossia per le (34) e (35):

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2,$$

che è l'elemento lineare della superficie iniziale S.

9. Per completare quanto abbiamo esposto daremo l'espressione del raggio del circolo, e delle coordinate di un punto della superficie generica ortogonale ai circoli.

A tale scopo assumiamo la (17) ed in questa teniamo conto delle (49) e (50); avremo:

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v}\right)^2, \tag{54}$$

che fa conoscere il raggio del circolo.

Denotiamo inoltre con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto P_0 della superficie iniziale S, da cui esce il circolo (u, v) e denotiamo con:

$$\begin{matrix} X_1^0, & Y_1^0, & Z_1^0, \\ X_2^0, & Y_2^0, & Z_2^0, \\ X_3^0, & Y_3^0, & Z_3^0, \end{matrix}$$

i coseni direttori del triedro principale della superficie S nel punto P_0; dedurremo facilmente le espressioni dei coseni direttori della normale principale al circolo nel punto P_0 dalle formole di FRENET; avremo così:

$$\frac{\cos\xi}{R} = \left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial X_3}{\partial w}\right)_0 = -\Phi_{33}\left[\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right)_0 X_1^0 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right)_0 X_2^0\right],$$

e le analoghe per $\cos\eta$, $\cos\zeta$; e per le (53):

$$\frac{\cos\xi}{R} = \frac{1}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u} X_1^0 + \frac{1}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v} X_2^0, \tag{55}$$

e le analoghe per $\cos\eta$, $\cos\zeta$.

Volendo infine le coordinate x, y, z, di un punto P della superficie generica ortogonale ai circoli, occorre integrare il sistema completo (3), (4), (5); però si giunge più speditamente al risultato per via geometrica introducendo l'angolo t d'inclinazione del raggio del circolo passante per P sulla normale principale al circolo in P_0; avremo così:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + R\cos\xi(1+\cos t) + R X_3^0 \operatorname{sen} t, \\ y &= y_0 + R\cos\eta(1+\cos t) + R Y_3^0 \operatorname{sen} t, \\ z &= z_0 + R\cos\zeta(1+\cos t) + R Z_3^0 \operatorname{sen} t, \end{aligned}\right. \tag{56}$$

in cui la funzione incognita è semplicemente t.

Per determinarla deriviamo queste ultime rispetto a w, avremo:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -R\cos\xi \operatorname{sen} t\frac{\partial t}{\partial w} + R X_3^0 \cos t\frac{\partial t}{\partial w}, \tag{57}$$

colle analoghe in y e z; da cui quadrando e sommando:

$$H_3^2 = R^2\left(\frac{\partial t}{\partial w}\right)^2.$$

Si conclude perciò che la funzione t dovrà determinarsi dall'equazione:

$$R\frac{\partial t}{\partial w} = \frac{\pm 1}{\Phi_{31}w^2 + \Phi_{32}w + \Phi_{33}}. \tag{58}$$

Per togliere l'incertezza del segno si osserva che le (56) dànno la superficie iniziale per $t = \pi$; sicchè per $w = 0$ si deve avere $t = \pi$. Ora dalla (57) abbiamo:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_0 = -\left(R\frac{\partial t}{\partial w}\right)_0 . X_3^0,$$

ma d'altra parte si deve avere:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_0 = H_3^0 X_3^0 = \frac{1}{\Phi_{33}} X_3^0;$$

dunque la (58) dovrà scriversi nel modo seguente:

$$R\frac{\partial t}{\partial w} = \frac{-1}{\Phi_{31} w^2 + \Phi_{32} w + \Phi_{33}},$$

e ammette l'integrale generale:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + M\right) = R\left(\frac{2\Phi_{33}}{w} + \Phi_{32}\right),$$

M essendo funzione di u e v solamente.

Ora osserviamo che dovendosi avere per $w = 0$, $t = \pi$, potremo ritenere senza ledere la generalità che per $w = 0$ la funzione M si annulli ed essendo essa indipendente da w sarà identicamente nulla; quindi avremo:

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = R\left(\frac{2\Phi_{33}}{w} + \Phi_{32}\right), \tag{59}$$

da cui per la (36), (54), (48):

$$R \operatorname{sen} t = \frac{H_3 w}{2\Phi_{33}}\left(\Phi_{32} w + 2\Phi_{33}\right),$$

$$1 + \cos t = \frac{H_3 w^2}{2\Phi_{33} R^2};$$

dopo di che sostituendo nelle (56) e tenendo conto della (55), facilmente si ricavano le coordinate di un punto della superficie generica ortogonale ai circoli sotto la forma:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{H_3 w}{2\Phi_{33}}\left[\frac{w}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u} X_1^0 + \frac{w}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v} X_2^0 + (\Phi_{32} w + 2\Phi_{33}) X_3^0\right], \\ y &= y_0 + \frac{H_3 w}{2\Phi_{33}}\left[\frac{w}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u} Y_1^0 + \frac{w}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v} Y_2^0 + (\Phi_{32} w + 2\Phi_{33}) Y_3^0\right], \\ z &= z_0 + \frac{H_3 w}{2\Phi_{33}}\left[\frac{w}{\Phi_{13}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial u} Z_1^0 + \frac{w}{\Phi_{23}}\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial v} Z_2^0 + (\Phi_{32} w + 2\Phi_{33}) Z_3^0\right]. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Queste formole dànno la più generale superficie ortogonale ai circoli ponendo per w un valore arbitrario; in particolare per $w = 0$ dànno la superficie iniziale S.

Palermo, 25 marzo 1907.

PASQUALE CALAPSO.