Über die einer ebenen Kurve dritter Ordnung um- und einbeschriebenen Vielecke.

Von **Hermann Oppenheimer** in Neustadt a. H. (Rheinpfalz).

Herr Picquet hat im 54. Heft des „Journal de l'école polytechnique" (Jahrgang 1884) die Zahlen der der C_3 um- und einbeschriebenen Polygone bestimmt. Im Laufe dieser Untersuchung hat Herr Picquet unter anderem nachgewiesen, daß in beliebiger Nähe jedes einzelnen Punktes einer C_3 ein reeller oder imaginärer Eckpunkt eines solchen Polygons sich befindet. Wenn diese Vielecke nun auf der C_3 in solcher Menge vorhanden sind, so ist gewiß die Frage berechtigt, ob sich nicht mehr über sie sagen läßt, als das, was eine ausschließlich auf ihre Anzahl gerichtete Untersuchung ergeben kann. Über das eine oder das andere dieser Polygone findet man ja wohl vereinzelte Betrachtungen in der Literatur. Aber eine systematische Untersuchung ihrer geometrischen Eigenschaften ist bis jetzt noch nicht angestellt worden. Ich glaube daher, daß die vorliegende Arbeit, die eine solche Untersuchung bezweckt, einiges Interesse in Anspruch nehmen darf. — Ich werde zunächst eine geometrische Sichtung der Gesamtheit aller Vielecke nach bestimmten Kategorien vornehmen, deren ich drei feststelle: jedes Vieleck gehört einer dieser Kategorien an. Ich werde mich dann mit jedem dieser drei Typen beschäftigen und seine geometrischen Eigenschaften erörtern; sodann die Zusammenhänge der Vielecke eines Typus unter einander prüfen und die geometrischen Beziehungen, die zwischen zwei verschiedenen Typen existieren. Die Picquetschen Zahlen werde ich vervollständigen, insofern ich die Zahlen für die Vielecke jeder Kategorie feststellen werde. Auch die Picquetschen n-Ecke, deren Zusammengehörigkeit lediglich auf der gleichen Seitenzahl beruht, lassen, wie ich zeigen werde, eine Einteilung in bestimmte Gruppen zu. Ich werde feststellen, wie viele Gruppen aus reellen und imaginären Vielecken gemischt sind, und wie viele nur imaginäre Vielecke enthalten.

Die Untersuchungsmethode stützt sich im wesentlichen auf die Punktpaarsystemringe, die ich in meiner Abhandlung „Über die durch Punktpaarsysteme einer C_3 veranlaßten Kurven und ihre Zusammenhänge" im XII. Jahrgang dieser Zeitschrift erörtert habe. Um nun die Lektüre der vorliegenden Arbeit nicht an die Kenntnis der genannten Abhandlung zu knüpfen, werde ich eine kurze

Zusammenstellung der dort abgeleiteten Sätze über Punktpaarsysteme der Inangriffnahme unseres eigentlichen Themas vorausschicken.

I. Man erhält ein beliebiges Punktpaarsystem einer C_3, wenn man zwei beliebige Punkte P_u und Q_u auf der Kurve als ein Punktpaar $P_u - Q_u$ auswählt und dieses Punktpaar $P_u - Q_u$ von sämtlichen Punkten der C_3 aus auf dieselbe projiziert; ist z. B. S irgend ein Punkt der C_3 und projiziert man $P_u - Q_u$ von S aus auf die Kurve, so daß also P_v der dritte Schnittpunkt von SP_u, Q_v der dritte Schnittpunkt von SQ_u mit der C_3 ist, so ist $P_v - Q_v$ ein weiteres Punktpaar des Systems. Ist nun S_1 der Tangentialpunkt von P_u und projiziert man $P_u - Q_u$ von S_1 aus, so erhält man das Punktpaar $Q'_u - P'_u$, das also auch dem System angehört. Dabei fällt Q'_u in unendliche Nähe von P_u. Ein Punkt P_u ist also ein Punkt zweier dem System angehöriger Punktpaare; die zwei anderen Punkte liegen mit dem Tangentialpunkt S_1 von P_u in einer Geraden Ich habe mich so ausgedrückt: faßt man einen Punkt als Eckpunkt P_u auf, so entspricht ihm der Nullpunkt Q_u, faßt man aber denselben Punkt als Nullpunkt Q'_u auf, so entspricht ihm als Eckpunkt ein Punkt P'_u. Allgemein: gehören $P_u - Q_u$ und $P_v - Q_v$ demselben System an, schneiden sich also $P_u P_v$ und $Q_u Q_v$ in einem und demselben dritten Punkt S der C_3, und ist P_u Eckpunkt, Q_u Nullpunkt, dann ist umgekehrt P_v Nullpunkt und Q_v Eckpunkt. Durch Charakterisierung der Punkte eines einzigen Punktpaares eines Systems als Eckpunkt und Nullpunkt ist diese Charakterisierung also für alle Punktpaare desselben festgelegt. — Zwei Punktpaare eines und desselben Systems nannte ich gleichnetzig.

II. Ist $P - Q$ gleichnetzig $P - P'$, also der dritte Schnittpunkt S von QP' mit der C_3 der Tangentialpunkt ven P, dann sagte ich: das Punktpaarsystem $(P' - Q)$ ist untergeordnet dem Punktpaarsystem $(P - Q)$. Es ergab sich sodann, daß, wenn man zu P und Q resp. die Tangentialpunkte S und T zeichnet, $S - T$ ebenfalls dem Unterordnungssystem $(P' - Q)$ angehört; aus dieser Tatsache ergibt sich durch Spezialisierung leicht, daß, wenn PQ eine Tangente der C_3 ist, mit P als Berührungspunkt, und wenn R der Tangentialpunkt von Q ist, $Q - R$ ebenfalls $P - Q$ untergeordnet ist, während $P - R$ als Projektion von $P - Q$ von Q aus gleichnetzig mit $P - Q$ ist. Sind ferner $P_1 - Q_1$ und $P_2 - Q_2$ gleichnetzig, im übrigen beliebig, schneiden sich also $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$ in einem Punkte S der C_3 und verbindet man nun P_1 mit Q_2 und P_2 mit Q_1, so liefern die dritten Schnittpunkte dieser zwei Verbindungslinien, P'_3 und Q'_3, wieder ein Punktpaar $P'_3 - Q'_3$ des Unterordnungssystems. Das hat seinen Grund in der allgemeinen Erzeugbarkeit eines Punktpaarsystems durch zwei andere, die wir am Ende des folgenden Paragraphen zu erörtern haben.

III. Verbindet man die zwei Punkte P_u, Q_u jedes Punktpaares eines Systems durch gerade Linien, so umhüllen alle diese Linien $P_u\,Q_u$ eine Kurve sechster Klasse K. Dem System aller Kurven K, die von allen möglichen Punktpaarsystemen geliefert werden, gehören sowohl die drei Cayleyschen Kurven, als auch die C_3 selber an. Besonders fruchtbar war die Untersuchung der gemeinsamen Tangenten zweier solchen Kurven K. War G_1 eine solche gemeinsame Tangente mit den Schnittpunkten A, B, C, so gehört diese Tangente sowohl der Kurve K $(A-B)$, wie der Kurve $K(B-C)$, wie auch der Kurve $K(A-C)$ an. Die Projektion der Punkte A, B, C von den neun Wendepunkten der Kurve aus ergab neun weitere gemeinsame Tangenten der drei Kurven, $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_9$; und wenn man eine dieser Tangenten wieder von den neun Wendepunkten aus projizierte, so ergaben sich außer G_1 noch acht weitere gemeinsame Tangenten $G_2 - G_9$. Die zwei Tangentengruppen $G_1, \ldots, G_9$ und $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_9$ gehören also allen drei Kurven K, $K(A-B)$, $K(A-C)$ und $K(B-C)$, an. Ich nannte solche drei Kurven drei Tripelkurven. Ich zeigte nun aber, daß je zwei dieser Kurven, $K(A-B)$ und $K(A-C)$, noch zwei weitere Gruppen von je neun Tangenten, $g_1 - g_9$ und $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_9$, gemeinsam haben, die sie nicht mit der $K(B-C)$, sondern mit einer anderen dritten Kurve teilen, $K(b-c)$. Ich habe den Satz kurz so ausgesprochen: Zwei Kurven $K(A-B)$ und K $(A-C)$ haben zwei Tripelkurven, $K(B-C)$ und $K(b-c)$. Eine Ausnahme davon machen die C_3 selbst und ihre drei Cayleyschen Kurven, die ebenfalls zu den Kurven K gehören: von diesen vier Kurven wird das System aller K umhüllt; mit jeder derselben hat also irgend eine Kurve K nur 18 Tangenten gemeinsam und die 18 zugehörigen Berührungspunkte. — Anstatt von den gemeinsamen Tangenten der Kurve $K(A-B)$ mit der C_3 zu sprechen, wird im folgenden sich auch die Ausdrucksweise finden: „Die gemeinsamen Tangenten des Systems $(A-B)$ mit der C_3“. —

Ich muß nun noch zwei Methoden erwähnen, wie man zu zwei beliebigen Punktpaaren die Punktpaare der beiden Tripelsysteme konstruieren kann, wobei „Tripelsystem“ einen ähnlichen Sinn hat, wie „Tripelkurve“.

III a. Ist ABC ein der C_3 einbeschriebenes Dreiek, so sind $A-$B, $A-C$, $B-C$ Punktpaare dreier Tripelsysteme; ersetze ich $A-C$ durch das zweite zu A gehörige Punktpaar des Systems $A-C$, $A-C'$, unter Beibehaltung von $A-B$, so ist $B-C'$ ein Punktpaar des zweiten der zwei Tripelsysteme, die zu den zwei Systemen $A-B$ und $A-C$ gehören.

III *b*. Sind A_1-B_1 und A_2-B_2 Punktpaare zweier beliebiger Systeme und bestimmt man die dritten Schnittpunkte, resp. A_3 und B_3, der Linien $A_1\,A_2$ und $B_1\,B_2$ mit der C_3, so ist A_3-B_3 ein Punktpaar des einen Tripelsystems; bringt man aber die Linien $A_1\,B_2$ und $A_2\,B_1$ zum dritten Schnitt, so erhält man das Punktpaar $a_3 - b_3$ und dieses gehört dem zweiten zu $A_1 - B_1$ und $A_2 - B_2$ gehörigen Tripelsystem an.

IV *a*. Von besonderem Interesse sind die Punktpaarsysteme, die mit ihrer Unterordnung zusammenfallen. Bedeuten w_1, w_2, w_3 drei in einer Geraden liegende Wendepunkte, so ist der Tangentialpunkt von w_1 wieder w_1; ebenso ist es bei w_2 und w_3. Da nun nach II die Tangentialpunkte der zwei Punkte eines Punktpaares ein Punktpaar des Unterordnungssystems ergeben, so fällt also das Punktpaarsystem $(w_1 - w_2)$ mit seinem Unterordnungssystem zusammen. Es gibt vier solche sich selbst entsprechende Systeme Σ, entspreshend der Tatsache, daß durch w_1 vier Linien gehen, auf denen drei Wendepunkte liegen; eines von diesen Systemen setzt sich aus reellen Punktpaaren zusammen; ich habe es mit Σ' bezeichnet.

IV *b*. Sind in dem der C_3 einbeschriebenen Dreieck $P Q P'$ $P - Q$ und $P - P'$ gleichnetzig, dann ist nach II. $Q - P'$ ein Punktpaar des Unterordnungssystems. Nun fällt ein System Σ mit seiner Unterordnung zusammen; sind also $P - Q$ und $P - P'$ Punktpaare eines dieser vier Systeme, so gehört $Q - P'$ demselben System an. Es ist also eine Eigentümlichkeit, die nur diesen sich selbst untergeordneten Systemen zukommt, daß ihre Punktpaare sich zu Dreiecken $P Q P'$ gruppieren, so daß $P - Q$, $P - P'$ und $Q - P'$ gleichnetzig sind. Man erhält z. B. alle derartigen Dreiecke des Systems Σ', wenn man das ausgeartete Dreieck der in einer Geraden liegenden reellen Wendepunkte w_1, w_2, w_3 von sämtlichen Punkten der C_3 aus projiziert.

Zwei solche Dreiecke, $P Q P'$ und $P_1 Q_1 P_1'$ sind in dreifacher Weise perspektivisch zu einander gelegen: schneidet PP_1 die C_3 in dem dritten Punkte R_1, $P Q_1$ in R_2, $P P_1'$ in R_3, so projiziert sich von jedem dieser 3 Punkte, R_1, R_2, R_3, das Dreieck $P Q P'$ in das Dreieck $P_1 Q_1 P_1'$. Ich habe diese Dreiecke „merkwürdige“ Dreiecke genannt.

---

1. Die gemeinsamen Tangenten der Kurven K der Systeme Σ mit der C_3 bilden die Dreiecke, die der C_3 um- und einbeschrieben sind. Am Schlusse der erwähnten Arbeit im Jahrgang XII der Monatshefte für Mathematik und Physik habe ich diese Dreiecke untersucht. Es liegt nun nahe, nach der Existenz von Systemringen zu fragen, derart, daß, wenn S_1 ein Punktpaarsystem bedeutet mit den Unterordnungen S_2, $S_3 \cdots S_n$, S_{n+1}, S_{n+1} wieder mit S_1 zusammenfällt. Solche Systeme bilden nun die Grundlage der nachfolgenden Untersuchung. Wir werden sehen, daß die Kurven K dieser Systeme mit der C_3 gemeinsame Tangenten haben, welche Seiten von der C_3 um- und einbeschriebenen Vielecken sind.

2. Sei $A_1 - B_1$ ein Punktpaar eines Systemrings von n-Gliedern, so daß also, wenn A_2 der Tangentialpunkt oder der Unterordnungspunkt von A_1 ist, A_3 die Unterordnung von A_2 u. s. w., ebenso

die sukzessiven Unterordnungen von B_1 die Punkte $B_2, B_3 \cdots B_n, B_{n+1}$ sind, $A_{n+1} - B_{n+1}$ gleichnetzig ist mit $A_1 - B_1$, so sind zweierlei Arten der Gleichnetzigkeit von $A_1 - B_1$ und $A_{n+1} - B_{n+1}$ denkbar: A_1 und A_{n+1} können gleichartige Punkte sein, also z. B. beides Eckpunkte, dann sind B_1 und B_{n+1} Nullpunkte. Dann schneiden sich also nach I $A_1 B_{n+1}$ und $B_1 A_{n+1}$ in einem und demselben dritten Punkte der C_3. Es kann aber auch die Gleichnetzigkeit derart sein, daß A_1 und B_{n+1} einerseits und B_1 und A_{n+1} anderseits von derselben Art sind; dann schneiden sich also $A_1 A_{n+1}$ und $B_1 B_{n+1}$ in einem und demselben dritten Schnittpunkt mit der C_3. Es soll nun folgender Satz bewiesen werden, der die Grundlage für die nachfolgenden Betrachtungen bildet:

Ist a_{n+1} die n^{te} Unterordnung von A_1, b_{n+1} die n^{te} Unterordnung von B_1 und das Punktpaar $A_1 - B_1$ gleichnetzig mit seiner n^{ten} Unterordnung, und zwar von der Art, daß $A_1\, a_{n+1}$ und $B_1\, b_{n+1}$ sich in einem Punkte der C_3 schneiden, dann ist die Gleichnetzigkeit bei jedem anderen Punktpaar des Systems $(A_1 - B_1)$ und seiner n^{ten} Unterordnung von derselben Art: gehört z. B. $A_1' - B_1'$ diesem System an, und ist die n^{te} Unterordnung von A_1' a_{n+1}', die von B' b_{n+1}', dann schneiden sich auch $A_1' a_{n-1}'$ und $B_1' b_{n+1}'$ in einem Punkte der C_3, nicht aber kann die Gleichnetzigkeit zwischen $A_1' - B_1'$ und $a_{n+1}' - b_{n+1}'$ derartig sein, daß $A_1' b_{n+1}'$ und $B_1' a_{n+1}'$ sich in einem Punkte der C_3 schneiden.

Zum Beweise dieses Satzes gehe ich noch einmal auf die fundamentalen Beziehungen zwischen den Punktpaaren eines Punktpaarsystems ein. Gehört $A - B$ irgend einem Punktpaarsystem S an und ist der Anfangspunkt A Eckpunkt, der Endpunkt B Nullpunkt — den ersten Punkt eines Punktpaares will ich Anfangspunkt nennen, den zweiten Endpunkt — so erhalte ich bekanntlich sämtliche Punktpaare von S, wenn ich $A - B$ von sämtlichen Punkten der C_3 auf die C_3 projiziere; ist aber $a - b$ eine dieser Projektionen, dann ist der Anfangspunkt a Eckpunkt und der Endpunkt b Nullpunkt. Projiziere ich nun $a - b$ ebenfalls von sämtlichen Punkten der C_3 aus auf die C_3, so erhalte ich sämtliche Punktpaare, die ich bei der Projektion von $A - B$ erhalten hatte, noch einmal, aber in anderer Anordnung ihrer Punkte: ist $A_1 - B_1$ eine dieser Projektionen von $a - b$, dann ist in diesem Punktpaare A_1 Nullpunkt und B_1 Eckpunkt. Ich nenne die Projektionen von $A - B$, in denen der Anfangspunkt Eckpunkt ist, die Mannigfaltigkeit I und die Projektionen von $a - b$, in denen der Anfangspunkt Nullpunkt ist, die Mannigfaltigkeit II; die Mannigfaltigkeit I umfaßt die Punktpaare $a - b$, die Mannigfaltigkeit II die Punktpaare $A - B$. Die Beziehung zwischen einem Punktpaare $A - B$ und einem Punktpaare $a - b$ ist nun derartig, daß Aa und Bb sich in einem Punkte der C_3 schneiden. Wir sagen kurz: $A - B$

und $a - b$ sind perspektivisch. Zwei Punktpaare derselben Mannigfaltigkeit aber, $A_1 - B_1$ und $A_2 - B_2$, sind nicht perspektivisch, sondern $A_1 - B_1$ und $B_2 - A_2$ sind perspektivisch; ebenso verhält es sich mit zwei Punktpaare $a - b$, $a_1 - b_1$ und $a_2 - b_2 : a_1 - b_1$ ist perspektivisch $b_2 - a_2$. Ist nun ein Punktpaar $p - q$ perspektivisch zu einem Punktpaar $A - B$ und ein zweites Punktpaar $R - S$ perspektivisch zu einem Punktpaar $a - b$, so ist klar: $p - q$ gehört der Mannigfaltigkeit I und $R - S$ der Mannigfaltigkeit II an; also ist $p - q$ auch wieder perspektivisch zu $R - S$; also: sind zwei Punktpaare zu einander perspektivisch und jedem dieser Punktpaare ist wieder ein Punktpaar perspektivisch, so sind die beiden letztgenannten Punktpaare auch wieder unter sich perspektivisch.

Nach diesen Erklärungen gestaltet sich nunmehr der Beweis unseres Satzes außerordentlich einfach (Fig. 1).

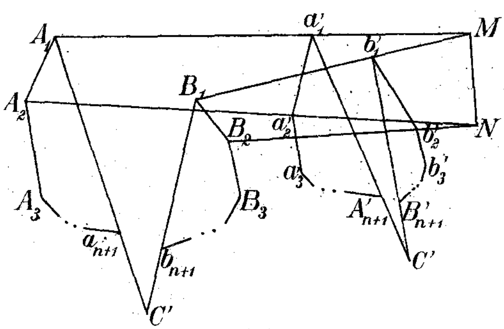

Fig. 1.

Die n auf einanderfolgenden Unterordnungen von A_1 seien $A_2, A_3 \cdots A_n, a_{n+1}$, die von B_1 B_2, $B_3, \cdots \mathrm{B}_n$, b_{n+1}; ebenso die von a'_1 a'_2, $a'_3 \cdots a'_n$ A'_{n+1}, die von b'_1 b'_2, $b'_3, \cdots b'_n$, B'_{n+1}. Schneiden sich nun $A_1 a'_1$ und $B_1 b'_1$ in einem Punkte M der C_3, dann schneidet $A_2 a'_2$ die Kurve zum drittenmal in dem Tangentialpunkt von M, er heiße N. Denn die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier Tangenten und die ihrer Tangentialpunkte liefern durch ihre dritten Schnittpunkte wieder eine Tangente; die Tangenten sind in unserem Falle $A_1 A_2$, $a'_1 a'_2$ und MN. Aber ebenso liefern auch die Tangenten $B_1 B_2$ und $b'_1 b'_2$ wieder eine dritte Tangente, und da $B_1 b'_1$ denselben Punkt M ausschneidet, wie $A_1 a'_1$, weil $A_1 - B_1$ und $a'_1 - b'_1$ perspektivisch sind, so ist also die dritte Tangente zu $B_1 B_2$ und $b'_1 b'_2$ mit MN identisch; also sind $A_2 - B_2$ und $a'_2 - b'_2$ auch perspektivisch, mit N als Projektionszentrum. Gerade so beweist man weiter, daß auch folgende Punktpaare perspektivisch sind: $A_3 - B_3$ und $a'_3 - b'_3$, $A_4 - B_4$ und $a'_4 - b'_4 \cdots a_{n+1} - b_{n+1}$ und $A'_{n+1} - B'_{n+1}$. Nun sind nach Voraussetzung $A_1 - B_1$ und $a_{n+1} - b_{n+1}$ perspektivisch; zu $A_1 - B_1$ ist aber wieder nach Voraussetzung $a'_1 - b'_1$ perspektivisch und jetzt eben haben wir bewiesen, daß $a_{n+1} - b_{n+1}$ und $A'_{n+1} - B'_{n+1}$ perspektivisch sind. Die Punktpaare $a'_1 - b'_1$ und $A'_{n+1} - B'_{n+1}$ sind also zwei unter sich perspektivischen Punktpaaren, resp. $A_1 - B_1$ und $a_{n+1} - b_{n+1}$, perspektivisch; also sind sie auch unter sich perspektivisch: $a'_1 A'_{n+1}$ und $b'_1 B'_{n+1}$ schneiden sich in einem und demselben Punkte der C_3, und das war zu beweisen.

Es ist klar, daß dieser Beweis auch den anderen Fall in sich faßt: ist die Gleichnetzigkeit von $A_1 - B_1$ und der n^{ten} Unterordnung $A_{n+1} - B_{n+1}$ derart, daß beide Punktpaare derselben Mannigfaltlgkeit angehören, also $A_1 - B_1$ und $B_{n+1} - A_{n+1}$ perspektivisch sind, so besteht dieselbe Art der Gleichnetzigkeit bei jedem Punktpaar des Systems $(A - B)$ und seiner n^{ten} Unterordnung; denn wäre z. B. diese Gleichnetzigkeit bei einem dieser Punktpaare, $E_1 - F_1$, und seiner n^{ten} Unterordnung, $E_{n+1} - F_{n+1}$, von der erstbesprochenen Art, gehörten diese zwei Punktpaare $E_1 - F_1$ und $E_{n+1} - F_{n+1}$ also verschiedenen Mannigfaltigkeiten an, dann müßte dieselbe Art der Gleichnetzigkeit, wie eben bewiesen, bei jedem Punktpaar des Systems und seiner n^{ten} Unterordnung vorhanden sein, was doch bei $A_1 - B_1$ und $A_{n+1} - B_{n+1}$ nicht der Fall ist.

Anmerkung. Wir wollen einen Systemring von der Art, daß $A_1 - B_1$ und $A_{n+1} - B_{n+1}$ perspektivisch sind, einen Systemring erster Art nennen und einen von der Eigenschaft, daß $A_1 - B_1$ uud $A_{n+1} - B_{n+1}$ derselben Mannigfaltigkeit angehörten, also $A_1 - B_1$ und $B_{n+1} - A_{n+1}$ perspektivisch sind, einen Systemring zweiter Art.

3. Betrachten wir nun die gemeinsamen Tangenten eines Systemrings zweiter Art, $S_1 S_2 S_3 \cdots S_n S_1$ — wo S_1 ein Punktpaarsystem, $S_2, S_3 \cdots S_{n+1}, S_n$ die sukzessiven Unterordnungen von S_1 bedeuten — mit der C_3. Ist $A_1 - A_2$ ein Punktpaar von S_1, und ist zugleich $A_1 A_2$ eine Tangente der C_3 mit A_1 als Berührungspunkt und A_2 als Tangentialpunkt, und ist A_3 der Tangentialpunkt zu A_2, so ist (s. Einleitung II) Punktpaar $A_2 - A_3$ dem Punktpaar $A_1 - A_2$ untergeordnet; also gehört $A_2 - A_3$ dem System S_2 an und $A_2 A_3$ ist eine der gemeinsamen Tangenten von S_2 mit der C_3; ebenso ist, wenn A_4 der Tagentialpunkt von A_3 ist u. s. w., $A_3 A_4$ eine gemeinsame Tangente von S_3 mit der C_3 u. s. w. $A_{n+1} A_{n+2}$ ist wieder eine gemeinsame Tangente von S_1 mit der C_3. Da nun nach Voraussetzung der Systemring $S_1 S_2 \cdots S_n S_1$ von der zweiten Art ist, so schneiden sich $A_1 A_{n+2}$ und $A_2 A_{n+1}$ in einem und dem-

selben Punkte der C_3; denn A_{n+1} ist die n^{te} Unterordnung von A_1 und A_{n+2} ist die n^{te} Unterordnung von A_2; ebenso schneiden sich in demselben Punkte der C_3 $A_2 A_{n+3}$ und $A_3 A_{n+2}$ $\cdots$, $A_{n+1} A_{2n+2}$ und $A_{n+2} A_{2n+1}$, $A_{pn+1} A_{(p+1)n+2}$ und $A_{pn+2} A_{(p+1)n+1}$. Es fragt sich nun, wieviele Seiten dieses der C_3 um- und einbeschriebene Vieleck $A_1 A_2 \cdots A_n A_{n+1} A_{n+2} \cdots A_{2n} A_{2n+1} A_{2n+2} \cdots A_{pn} A_{pn+1} A_{pn+2} \cdots A_{(p+1)n} \cdots$ im allgemeinen haben kann, dessen Seiten gemeinsame Tangenten der Systeme S mit der C_3 sind, z. B. die Seiten $A_1 A_2$, $A_{n+1} A_{n+2}$, $A_{2n+1} A_{2n+2} \cdots A_{pn+1} A_{pn+2}$ gemeinsame Tangenten der C_3 mit S_1. Da nun $A_1 A_{n+2}$ und $A_2 A_{n+1}$ sich in einem und demselben Punkte M der C_3 schneiden (s. Fig. 2), so sind auch die Punktpaare $A_1 - A_{n+1}$ und $A_2 - A_{n+2}$ gleichnetzig. Nun verbindet aber die Linie $A_1 A_{n+1}$ die Berührungspunkte der Tangenten $A_1 A_2$ und $A_{n+1} A_{n+2}$ miteinander, die Linie $A_2 A_{n+2}$ die zugehörigen Tangentialpunkte also ist das Punktpaar $A_2 - A_{n+2}$ dem Punktpaar $A_1 - A_{n+1}$ untergeordnet, anderseits aber auch gleichnetzig; also gehören diese zwei Punktpaare einem System Σ an (s. Einleitung IV), das mit seiner Unterordnung zusammenfällt, und dessen gemeinsame Tangenten mit der C_3 Dreiecke liefern, die der C_3 um- und einbeschrieben sind. Ebenso aber wie $A_1 - A_{n+1}$ ist auch $A_{n+1} - A_{2n+1}$ ein Punktpaar dieses Systems, ebenso auch $A_{2n+1} - A_{3n+1}$. Daraus ergibt sich aber ohne weiteres, daß A_{3n+1} mit A_1 zusammenfallen muß. Denn das ist ja nach III b) eine Eigentümlichkeit eines Systems Σ, daß drei aufeinanderfolgende Punktpaare eines solchen, $A_1 - A_{n+1}$, $A_{n+1} - A_{2n+1}$ und $A_{2n+1} - A_{3n+1}$, ein Dreieck ergeben, also A_{3n+1} identisch ist mit A_1.

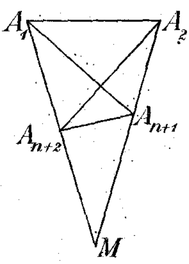

Fig. 2.

4. Die Zahl der Eckpunkte unseres Vielecks kann also $3n$ nicht übersteigen. Es fragt sich aber, ob diese Zahl immer erreicht werden muß, ob auch wirklich drei solche aufeinanderfolgende Punktpaare von Σ, $A_1 - A_{n+1}$, $A_{n+1} - A_{2n+1}$, $A_{2n+1} - A_1$, vorhanden sein müssen, und der Fall nicht eintreten kann oder muß, daß das Vieleck nur eines dieser Punktpaare enthält, $A_1 - A_{n+1}$. Dann wäre es ein $2n$-Eck; von jedem System des Ringes enthielte es zwei Tangenten, resp. $A_1 A_2$ und $A_{n+1} A_{n+2}$, $A_2 A_3$ und $A_{n+2} A_{n+3}$ u. s. w. Es läßt sich nun aber leicht zeigen, daß das nicht der Fall sein kann, sondern daß das Vorhandensein des Punktpaares $A_1 - A_{n+1}$ auch das der beiden anderen, $A_{n+1} - A_{2n+1}$ und $A_{2n+1} - A$ im Gefolge hat. Die Projektion unseres Vielecks

$A_1 A_2 \cdots A_{n+1} \cdots$ von einem Wendepunkt w_0 aus ergibt wiederum ein um- und einbeschriebenes Vieleck $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \cdots$ von derselben Zahl der Ecken, und wenn $A_1 - A_{n+1}$ ein Punktpaar von Σ ist (s. Fig. 3), so gehört die Projektion desselben $a_1 - a_{n+1}$ demselben System an.

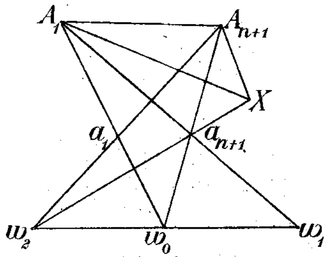

Fig. 3.

Sind nun w_1 und w_2 diejenigen zwei weiteren Wendepunkte, die die zwei zu w_0 gehörigen Punktpaare von Σ ergeben, $w_0 - w_1$ und $w_0 - w_2$, so ist eines dieser zwei Punktpaare zu $a_1 - a_{n+1}$, das andere zu $a_{n+1} - a_1$ perspektivisch; es projiziert sich also z. B. $a_1 - a_{n+1}$ von A_{n+1} aus in $w_2 - w_0$, von A_1 aus in $w_0 - w_1$. Nun fallen zwei einer C_3 um- und einbeschriebene Vielecke offenbar zusammen, wenn sie einen einzigen Eckpunkt gemeinsam haben. Es ist aber a_{n+1} die Projektion von A_1 von w_1 aus, ebenso die Projektion von A_{n+1} von w_0 aus, ebenso a_1 auch die Projektion von A_{n+1} von w_2 aus. Die Projektionen des Vielecks $A_1 A_2 \cdots A_{n+1} \cdots$ von den drei Wendepunkten w_0, w_1, w_2 aus fallen also in eine einzige Projektion, in das Vieleck $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \cdots$ zusammen. Folglich erhalten wir umgekehrt wieder einen Vieleckspunkt von $A_1 A_2 \cdots A_{n+1} \cdots$, wenn wir a_{n+1} von w_2 aus projizieren. Dieser Projektionspunkt X ist offenbar identisch mit dem Punkt A_{2n+1}, dessen Vorhandensein wir nachweisen wollen: $X - A_{n+1}$ ist perspektivisch zu $a_{n+1} - a_1$ mit w_2 als Projektionszentrum; also sind $A_1 - A_{n+1}$, $A_{n+1} - X$ und $X - A_1$ Punktpaare von Σ.

Unser Vieleck ist also ein $3n$-Eck. — Wir wollen es ein „merkwürdiges" $3n$ Eck nennen, zum Unterschied von einem gewöhnlichen um- und einbeschriebenen $3n$-Eck, das einem Systemring $3n^{\text{ter}}$ Ordnung angehört. Beachtenswert ist die Eigenschaft eines solchen merkwürdigen $3n$-Ecks, daß es sich von je drei Wendepunkten aus in dasselbe Vieleck projiziert. Die Zusammengehörigkeit der drei Wendepunkte, die dieselbe Projektion liefern, ist dadurch gegeben, daß die Punktpaare, die sie veranlassen, dem System Σ angehören.

Als einzig mögliche Vielecke eines Systemringes zweiter Art ergeben sich also n-Ecke und merkwürdige $3n$-Ecke. Bevor wir ihre Zahl und ihre gegenseitigen Beziehungen erörtern, wollen wir die Vielecke untersuchen, die ein Systemring der ersten Art veranlaßt.

5. Bei einem solchen schneiden sich $A_1 A_{n+1}$ und $A_2 A_{n+2}$ in einem und demselben Punkte w der C_3 (Fig. 4). Dabei ist

wieder A_{n+1} die n^{te} Unterordnung von A_1 und A_{n+2} die n^{te} von A_2. Ist $A_1 A_2$ eine Tangente mit Berührungspunkt in A_1, dann ist also auch $A_{n+1} A_{n+2}$ eine Tangente und ihr Berührungspunkt ist A_{n+1}. Verbindet man aber die Berührungspunkte zweier Tangenten durch eine Gerade, ebenso ihre Tangentialpunkte, so liefern die dritten Schnittpunkte der zwei Verbindungslinien bekanntlich wieder eine Tangente, von der der dritte Schnittpunkt der einen Verbindungslinie der Berührungspunkt, während der andere der Tangentialpunkt ist; fallen diese zwei Punkte aber in einen zusammen, dann wird diese Tangente eine Wendetangente; also ist w in unserem Falle ein Wendepunkt. — Wir wollen ein solches Vieleck $A_1 A_2 \cdots A_{2n}$, von dem die Diagonalen $A_1 A_{n+1}$, $A_2 A_{n+2}$, $A_3 A_{n+3} \cdots$ durch einen Wendepunkt w gehen, das sich also von diesem Wendepunkt aus in sich selbst projiziert, ein zentrales Vieleck nennen. Das hier in Frage kommende Vieleck ist offenbar ein $2n$-Eck. Das folgt ohne weiteres aus der Eigenschaft, daß eine Seite desselben, $A_1 A_2$, und ihre n^{te} Unterordnung $A_{n+1} A_{n+2}$ perspektivisch zu einander liegen, mit einem Wendepunkt w als Projektionszentrum. Wäre die Tangente $A_{2n+1} A_{2n+2}$ verschieden von der Ausgangstangente $A_1 A_2$, so müßte diese Tangente $A_{2n+1} A_{2n+2}$ zur n^{ten} Überordnung perspektivisch liegen; diese n^{te} Überordnung ist aber die Tangente $A_{n+1} A_{n+2}$ und deren Projektion von w aus ist die Tangente $A_1 A_2$, mit der also $A_{2n+1} A_{2n+2}$ zusammenfallen muß.

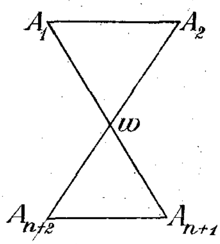

Fig. 4.

Anmerkung. Ist a die n^{te} Unterordnung von b, dann nenne ich umgekehrt b die n^{te} Überordnung von a.

6. Sind w_0, w_1, w_2 wieder drei in einer Geraden liegende Wendepunkte und projizieren wir das zentrale $2n$-Eck $A_1 A_2 \cdots A_{2n} A_1$, das sich von dem Wendepunkt w_0 aus in sich selbst projiziert, von w_1 aus, so erhalten wir z. B. als Projektion der Geraden $A_1 w_0 A_{n+1}$ die Gerade $A_1'' w_2 A_{n+1}''$. Wir sehen: es ergibt sich ein zentrales $2n$-Eck $A_1'' A_2'' — A_{2n}'' A_1''$ mit w_2 als Zentrum. Ein Systemring erster Art liefert also 9 zentrale $2n$-Ecke; jeder Wendepunkt ist von einem solchen Vieleck umgeben; zwei dieser Vielecke mit den Wendepunkten w_α und w_β sind perspektivisch zu einander. Das Projektionszentrum ist der Wendepunkt w_γ, der mit den Wendepunkten w_α und w_β in einer Geraden liegt.

Wir sind also zu folgenden Ergebnissen gekommen:

Die gemeinsamen Tangenten von Punktsystemringen $S_1 S_2 \cdots S_n S_1$ mit der C_3 gruppieren sich zu Vielecken, die der C_3 um- und einbeschrieben sind. Solcher

Vielecke sind dreierlei Arten möglich: n-Ecke, merkwürdige $3n$-Ecke und zentrale $2n$-Ecke.

7. Es ist nun der Nachweis der Existenz dieser vorerst nur als möglich erkannten Vielecksgattungen zu führen.

Was die einfachen n-Ecke angeht, so hat, wie schon eingangs erwähnt, Herr Picquet diesen Nachweis bereits geführt und ihre Anzahlen bestimmt. Ich will den Parameterausdruck, der diese Anzahlen enthält, in Kürze noch einmal ableiten, weil ich ihn später für die Erörterung der Zahlen der merkwürdigen $3n$-Ecke nötig haben werde, zunächst aber an der Hand dieses Ausdruckes zeigen will, daß sich die Gesamtheit aller Vielecke von derselben Seitenzahl in bestimmte Gruppen teilen läßt.

Denken wir uns in der bekannten Weise — s. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, S. 605 — die Punkte der C_3 durch Parameter elliptischer Funktionen dargestellt, derart, daß einem Wendepunkt w der Parameter O zukommt, so ist, wenn der Parameter eines Punktes p ist, der des Tangentialpunktes $= -2p$, der des nächsten Unterordnungspunktes $= 4\,p$ u. s. w. Bei einem um- und einbeschriebenen n-Eck muß die $(n+1)^{\text{te}}$ Unterordnung wieder mit dem 1. Punkt zusammenfallen; wenn also p der Parameter dieses ersten Punktes ist, so muß die Gleichung bestehen: $(-1)^n\,2^n\,p \equiv p\,(\mathrm{mod}\;\omega, \omega')$, oder $(-1)^n\,2^n\,p - p \equiv 0$; $p\left[(-1)^n\,1^n - 1\right] \equiv 0\,(\mathrm{mod}\;\omega, \omega)$; $p = \dfrac{k\,\omega + k'\omega'}{(-1)^n\,2^n - 1}$, wobei k und k' beliebige positive oder negative ganze Zahlen sein können und ω und ω' die Perioden der Kurve sind. Von der Gesamtheit der in diesem Ausdruck enthaltenen Vieleckspunkte sind aber, wenn man nur die Eckpunkte der eigentlichen Vielecke haben will, die 9 Wendepunkte abzuziehen, deren einer z. B. sichergibt, wenn man k und $k' = 0$ setzt.

Ist nun m der Parameter eines solchen Vieleckspunktes und projizieren wir diesen Punkt von den 9 Wendepunkten der Kurve aus, so erhalten wir je einen Eckpunkt von 9 weiteren n-Ecken. Die Parameter dieser neun Punkte sind enthalten in dem Ausdruck $-\left(m + \dfrac{\alpha\,\omega}{3} + \dfrac{\alpha'\,\omega'}{3}\right)$, wo α und α' irgend eine von den drei Zahlen 0, 1, 2 bedeuten. Projizieren wir $-\,m$ wieder von sämtlichen Wendepunkten aus, so erhalten wir die gleichen Werte der eben erhaltenen Paramenter, aber mit positivem Vorzeichen; das gibt also wieder neun Vielecke; eines derselben ist das Ausgangsvieleck, von dem ein Eckpunkt den Parameter m hat. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß, wenn man einen anderen von den in dem Ausdruck $-\left(m + \dfrac{\alpha\,\omega}{3} + \dfrac{\alpha'\,\omega'}{3}\right)$ enthaltenen Punkten an Stelle des Punktes $-\,m$ von den neun Wendepunkten aus projiziert, man dieselbe Punktgruppe, $m + \dfrac{\alpha\,\omega}{3} + \dfrac{\alpha'\omega'}{3}$, erhält. Also: Die Zahl sämtlicher der C_3 um- und einbeschriebenen

n-Ecke läßt sich in Abteilungen von je 18 n-Ecken teilen. Diese 18 n-Ecke teilen sich wieder in zwei Gruppen, A und B; jedes Vielek der Gruppe A ist perspektivisch zu jedem Vieleck der Gruppe B in bezug auf einen der Wendepunkte. — Ich will der Kürze wegen, anstatt von dem durch den Parameter m gegebenen Punkt eines Vielecks, von einem Vieleck m sprechen. Bedeutet nun m eines der reellen Vielecke, so sind folgende Vielecke der Abteilung, zu der m gehört, reell: von der Gruppe A m, $m+\frac{\omega}{3}$, $m+\frac{2\omega}{3}$; von der Gruppe B $-m$, $-m-\frac{\omega}{3}$, $-m-\frac{2\omega}{3}$; die anderen zwölf Vielecke der Abteilung sind imaginär. Es fragt sich nun, ob es nicht Abteilungen gibt, deren sämtliche 18 Vielecke imaginär sind. Die Antwort auf diese Frage ist leicht zu finden. Ist m ein reelles Vieleck, so ist sein Parameter in dem Ausdruck $\frac{k\,\omega}{(-1)^n 2^n - 1}$ enthalten; er heiße $\frac{k_1\,\omega}{(-1)^n 2^n - 1}$; dann ist ein imaginäres Vieleck der Abteilung, zu der m gehört, $\frac{k_1\,\omega}{(-1)^n 2^n - 1} + \frac{k_1'\,\omega'}{3}$, wo k_1' irgend eine positive oder negative Zahl sein kann. Ist nun n eine gerade Zahl, so wollen wir sie $= 2q$ setzen; ist die Zahl n ungerade, so wollen wir für dieselbe $2p+1$ setzen; im ersten Fall ist der Nenner $(-1)^n 2^n - 1 = 2^{2q} - 1$, im zweiten Fall $= -(2^{2p+1}+1)$; nun ist bekanntlich sowohl $2^{2q}-1$ oder $(2^2)^q - 1$, als auch $2^{2p+1}+1$ durch drei ohne Rest teilbar.

$$[(2^2)^q - 1] : (2^2 - 1) = (2^2)^{q-1} + (2^2)^{q-2} + \cdots + 1$$

$$[2^{2p+1} + 1] : (2+1) = 2^{2p} - 2^{2p-1} + 2^{2p-2} - \cdots + \cdots + 1.$$

Der Nenner ist also unter allen Umständen durch drei teilbar. Ist nun $\frac{(-1)^n 2^n - 1}{3} = s$ und bringen wir den Parameter unseres imaginären Vielecks $\frac{k_1\,\omega}{(-1)^n 2^n - 1} + \frac{k_1'\,\omega'}{3}$ auf den Nenner $[(-1)^n 2^n - 1]$, so erhalten wir $\frac{k_1\,\omega + k_1'\,s\,\omega'}{(-1)^n 2^n - 1}$. Daraus erkennen wir: alle Parameterwerte von n-Eckspunkten, in denen der Koeffizient von ω' nicht durch s ohne Rest teilbar ist, gehören solchen imaginären n-Ecken an, deren Abteilung lauter imaginäre n-Ecke enthält. Es gibt also Abteilungen mit sechs reellen und zwölf imaginären, und solche mit lauter imaginären n-Ecken. — Es ist nun leicht zu zeigen, daß imaginäre Abteilungen auch zu imaginären Systemringen gehören, zu solchen Ringen, deren Systeme keine reellen Punktpaare haben. Ist $a - b$ ein Punktpaar, das einem System S_1 angehört, mit resp. den Parametern a' und b' und sucht man zu irgend einem Punkte c der C_3, mit dem Parameter c', den zugehörigen Punkt x, mit dem Parameter x', so daß $c - x$ und $a - b$ perspektivisch sind, also $a\,c$ und $b\,x$ sich in demselben Punkte d der C_3 schneiden, dann ist für diesen Punkt als dritten Schnittpunkt der Geraden $a\,c$ mit der C_3 der Parameter $= -(a' + c')$, weil aber der Punkt d auch auf $b\,x$ liegt, so ist sein Parameter auch $= -(b' + x')$; also ist $-(a' + c') \equiv -(b' + x')$ (mod ω, ω'), also $x' = a' + c' - b'$. Ist nun $a\,b$ eine Tangente der C_3 mit a als Berührungspunkt, dann ist $b' = -2\,a'$; also ist dann $x' = 3\,a' + c'$; bedeutet nun aber a ein n-Eck einer imaginären Abteilung, die also keine reellen Vielecke enthält, so ist a' von der Form $\frac{k\,\omega}{e} + \frac{k'\,\omega'}{f}$, wo f in k' nicht ohne Rest enthalten ist. Setzen wir diesen Wert ein, dann erhalten wir: $x' = \frac{3\,k\,\omega}{e} + \frac{3\,k'\,\omega'}{f} + c'$. Ich will also nun zeigen, daß, wenn auch c reell ist, der zugehörige Punkt x doch imaginär ist; dann hat S_1 offenbar lauter imaginäre Punktpaare. $x' = \frac{3\,k\,\omega}{e} + \frac{3\,k'\omega'}{f} + c'$ ist aber nur dann nicht imaginär, wenn der Koeffizient von ω', $\frac{3\,k'}{f}$, eine ganze Zahl ergibt; die andern beiden Glieder, $\frac{3\,k\,\omega}{e}$ und c', sind ja nach Voraussetzung reell. Da nun $\frac{k'}{f}$ keine ganze Zahl ist, so kann $\frac{3\,k'}{f}$ nur eine ganze Zahl sein für den Fall, daß $f = 3$ ist. Aber $a' = \frac{k\,\omega}{e} + \frac{k'\,\omega'}{3}$ würde ein Vieleck der Abteilung sein, von der $\frac{k\,\omega}{e}$ ein reelles Vieleck ist, während wir vorausgesetzt haben, a' soll einer imaginären Abteilung angehören; f kann also nicht $= 3$ sein und x' ist imaginär. Also: Ist $a\,b$ eine Tangente eines Systemrings mit lauter imaginären Vielecken und bestimmt man zu einem reellen Punkte c der C_3 den entsprechenden Punkt x des Systems $(a - b)$, so erweist sich x als imaginär. Sämtliche Punktpaare aller Systeme des Ringes bestehen entweder aus zwei imaginären Punkten oder enthalten einen reellen und einen imaginären Punkt. Das folgt daraus, daß man durch fortgesetztes Unterordnen von einem System des Ringes zu jedem anderen gelangen kann. Ein imaginäres System hat aber auch eine imaginäre Unterordnung.

Anmerkung. Wie wir in 6 gesehen haben, enthält eine Abteilung zentraler 2 n-Ecke nur neun Vielecke, die sowohl die Gruppe A, wie die Gruppe B bilden.

8. Nun erhebt sich die Frage: existieren in Wirklichkeit auch die merkwürdigen $3n$-Ecke, die wir in 3. beschrieben haben?

Ihr Vorhandensein läßt sich durch den Nachweis der Beziehung zeigen, in der sie zu den um- und einbeschriebenen n-Ecken stehen. Ein um- und einbeschriebenes n-Eck heiße $A_1 A_2 \cdots A_n A_1$, eines von den der C_3 um- und einbeschriebenen Dreiecken $P_1 P_2 P_3$, und zwar gehöre dasselbe dem Punktpaarsystem Σ' an. Zeichnet man nun den dritten Schnittpunkt von $A_1 P_1$ mit der C_3, Q_1, ebenso den von $A_2 P_2 Q_2$, dann ist $Q_1 Q_2$ ebenfalls eine Tangente der C_3; und wenn A_1 der Berührungspunkt der Tangente $A_1 A_2$ ist und P_1 der der Tangente $P_1 P_2$, dann ist Q_1 der Berührungspunkt der Tangente $Q_1 Q_2$. Zeichnen wir nun ebenso zu $A_2 A_3$ und $P_2 P_3$ die dritte Tangente $Q_2 Q_3$, so ist diese natürlich die Unterordnung von $Q_1 Q_2$. Konstruieren wir so weiter, bis wir wieder zu $A_1 A_2$ zurückkommen, und setzen den Prozeß fort, so wird jetzt, wenn nicht n eine durch drei teilbare Zahl ist, $A_1 A_2$ nicht wieder mit $P_1 P_2$ zusammenkommen, sondern entweder mit $P_2 P_3$ oder mit $P_3 P_1$, je nachdem $n \equiv 1 \pmod 3$ oder $n \equiv 2 \pmod 3$ ist. Ist jetzt $A_1 A_2$ mit $P_2 P_3$ zu verbinden, und erhält man als dritte Tangente $Q'_1 Q'_2$, so ist leicht zu erkennen, daß $Q'_1 - Q'_2$ gleichnetzig mit $Q_1 - Q_2$ ist, ohne daß natürlich die Punktpaare identisch sein können. Sei in $P_1 - P_2$ P_1 Eckpunkt, P_2 Nullpunkt; dann ist also in $P_2 - P_3$ P_2 Eckpunkt und P_3 Nullpunkt. Verbindet man also einmal A_1 mit P_1 und A_2 mit P_2, ein anderes Mal A_1 mit P_2 und A_2 mit P_3, so ist klar, daß beide Male A_1 mit einem Eckpunkt, A_2 mit dem zugehörigen Nullpunkt eines Punktpaars von Σ' verbunden ist; die zwei Tangenten $Q_1 Q_2$ und $Q'_1 Q'_2$ gehören also derselben Tripelkurve an (s. Einleitung III a); $Q_1 - Q_2$ und $Q'_1 - Q'_2$ sind gleichnetzig. — Setzen wir den Konstruktionsprozeß weiter fort, bis wir wieder zu $A_1 A_2$ kommen, so wird dieses Mal die Verbindung von $A_1 A_2$ und $P_3 P_1$ an die Reihe kommen und eine Tangente $Q''_1 Q''_2$ ergeben, und erst wenn wir in der Fortsetzung der Konstruktion das dritte Mal zu $A_1 A_2$ zurückkommen, wird es sich treffen, daß $A_1 A_2$ wieder mit $P_1 P_2$ zusammenkommt, also wieder die dritte Tangente $Q_1 Q_2$ sich ergibt. Wir haben also das $3n$-Eck $Q_1 Q_2 \ldots Q_n Q'_1 Q'_2 \ldots Q'_n Q''_1 Q''_2 \ldots Q''_n$ erhalten, in welchem $Q_1 - Q_2$, $Q'_1 - Q'_2$, $Q''_1 - Q''_2$ gleichnetzig sind, ebenso $Q_2 - Q_3$, $Q'_2 - Q'_3$, $Q''_2 - Q''_2$ u. s. w.

8 a) Die Vollständigkeit erfordert noch den Nachweis, daß jedes merkwürdige $3n$-Eck durch unsere Konstruktion erzeugt werden kann. Nehmen wir zu diesem Zwecke an, daß in dem Arrangement der vorausgehenden Konstruktion $Q_1 Q_2 \cdots Q'_1 Q'_2 \cdots Q''_1 Q''_2 \cdots$ das gegebene Vieleck sei, und zwar ein beliebiges merkwürdiges $3n$-Eck, so läßt sich umgekehrt zeigen, daß dieses Vieleck in Verbindung mit einem um- und einbeschriebenen Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ein um- und einbeschriebenes n-Eck $A_1 A_2 \cdots A_n$ liefert. Ist näm-

lich $Q_1 Q_2 \cdots Q'_1 Q'_2 \cdots Q''_1 Q''_2 \cdots$ ein beliebiges merkwürdiges $3n$-Eck, dann sind die Dreiecke $Q_1 Q'_1 Q''_1$, $Q_2 Q'_2 Q''_2 \cdots$ merkwürdige Dreiecke (s. Einleitung IV b); also liegen z. B. die Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $Q_1 Q'_1 Q''_1$ dreifach perspektivisch zu einander; es schneiden sich also $P_1 Q_1$, $P_2 Q'_1$, $P_3 Q''_1$ in einem und demselben auf dem C_3 liegenden Punkte A_1. Zeichnen wir nun die Gerade $P_1 Q_1$ und ihren dritten Schnittpunkt A_1 mit der C_3 und die sukzessiven Unterordnungen dieser Geraden $P_1 Q_1 A_1$, $P_2 Q_2 A_2$, $P_3 Q_3 A_3$, $P_4 Q_4 A_4$ u. s. w., dann handelt es sich darum, was für ein Vieleck die Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots$ bilden, ob ein $3n$-Eck oder ein einfaches n-Eck. Daß die $3n^{\text{te}}$ Unterordnung $Q_1 P_1 A_1$ wieder $Q_1 P_1 A_1$ ist, ist selbstverständlich. Ist nun aber $n \equiv 1 \pmod 3$, so kommt bei der Bildung der Unterordnungen $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$, $P_1 Q_4 \cdots Q'_1$ mit P_2 zusammen und veranlaßt die Verbindungslinie $Q'_1 P_2$, ebenso kommt Q''_1 mit P_3 zusammen und liefert $Q''_1 P_3$; aber $Q_1 P_1$, $Q'_1 P_2$ und $Q''_1 P_3$ schneiden sich doch in einem und demselben Vieleckpunkt A_1; ebenso die Unterordnungen $Q_2 P_2$, $Q'_2 P_3$ und $Q''_2 P_1$ in A_1 u. s. w.; es ist somit klar, daß die Punkte A_1, $A_2 \cdots$ ein einfaches n-Eck bilden, da ja die Linien $Q_1 P_1$, $Q_2 P_2$, $Q_3 P_3$, $Q_4 P_1$ u. s. w. dieselben Vieleckspunkte A_1, $A_2 \cdots$ ausschneiden, wie wie Linien $Q'_1 P_2$, $Q'_2 P_3$, $Q'_3 P_1$ u. s. w. und die Linien $Q''_1 P_3$, $Q''_2 P_1$ u. s. w.

Ist aber $3n \equiv 2 \pmod 3$, dann trifft in der Reihe der Unterordnungen von $P_1 Q_1 Q''_1$ mit P_2 und Q'_1 mit P_3 zusammen, dann läßt sich also das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ nicht zur Konstruktion des n-Ecks benützen; dafür aber die Projektion von $P_1 P_2 P_3$ von einem Wendepunkt aus, etwa $p_1 p_2 p_3$. Denn gehören die Punktpaare $Q_1 - Q'_1$, $Q'_1 - Q''_1$, $Q''_1 - Q_1$ der Punktpaarmannigfaltigkeit I, die Punktpaare $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, $P_3 - P_1$ der Mannigfaltigkeit II an, dann gehört die Projektion der letzten drei Punktpaare, $p_1 - p_2$, $p_2 - p_3$, $p_3 - p_1$ wieder der Mannigfaltigkeit I an, also schneiden sich in den zwei Punktpaaren $Q_1 - Q'_1$ und $p_3 - p_1$ $Q_1 p_1$ und $Q'_1 p_3$ in einem Punkte A_1; durch diesen Punkt A_1 geht dann wegen der dreifachen Perspektivität der Dreiecke $Q_1 Q'_1 Q''_1$ und $p_1 p_2 p_3$ auch $Q''_1 p_2$. Aber wenn $n \equiv 2 \pmod 3$ ist, und wenn man p_1 mit Q_1 verbindet, p_2 mit Q_2 u. s. w., dann kommt gerade Q'_1 mit p_3 und Q''_1 mit p_2 zusammen. Also schneiden wieder von den Geraden $p_1 Q_1$, $p_2 Q_2 \cdots$, die das Vieleck $A_1 A_2 \cdots$ auf der C_3 ausschneiden, je drei, $p_1 Q_1$, $p_3 Q'_1$, $p_2 Q''_1$ denselben Punkt, A_1, aus. Wir erhalten also wieder ein einfaches n-Eck.

9. Wir haben uns nun mit der Frage nach der Existenz zentraler $2n$-Ecke zu beschäftigen. Diese Frage beantwortet sich am einfachsten dadurch, daß wir die Parameter für die Eckpunkte der zentralen $2n$-Ecke aufstellen, die irgend einen Wendepunkt,

z. B. den mit dem Parameter o, als Zentrum haben — wobei über die Parameter dieselben Festsetzungen gelten sollen, wie früher. Ist x der Parameter eines solchen Vieleckspunktes und bestimmen wir die Reihe seiner Unterordnungen, dann erhalten wir für die n^{te} Unterordnung den Parameter $(-1)^n \cdot 2^n \cdot x$; die Verbindungslinie des Ausgangspunktes mit seiner n^{ten} Unterordnung muß nun durch den Wendepunkt mit dem Parameter o gehen; also erhalten wir die Gleichung:

$$-x-(-1)^n \cdot 2^n x \equiv o \,(\operatorname{mod}\ \omega,\ \omega');$$

also ist

$$x=\frac{k\omega+k'\omega'}{(-1)^{n+1}2^n-1},$$

wo k und k' irgendwelche ganze Zahlen bedeuten.

Im Falle, daß n eine ungerade Zahl ist, erhält man offenbar alle Werte dieses Ausdrucks, wenn man k und k' die Werte aller positiven Zahlen von 0 bis 2^n-2 gibt; also im ganzen $(2^n-1)^2$ Werte. Ist n gerade, dann ist $(-1)^{n+1}2^n$ negativ; der Nenner heißt dann -2^n-1; man erhält in diesem Falle alle Werte des Ausdrucks, wenn man sowohl k als auch k' die Werte aller negativen Zahlen von 0 bis -2^n annehmen läßt, 0 und -2^n mitgerechnet. Das sind im ganzen $(2^n+1)^2$ Werte.

In beiden Fällen ist also die Zahl der Werte, die der Ausdruck $\frac{k\omega+k'\omega'}{(-1)^{n+1}2^n-1}$ annehmen kann, $=[(-1)^{n+1}2^n-1]^2$. Dieses Quadrat gibt also die Zahl der Eckpunkte aller zentralen $2n$-Ecke an, die den Wendepunkt mit dem Parameter 0 als Zentrum haben. In der Zahl dieser Eckpunkte ist aber dieser Wendepunkt selbst mitgerechnet; sein Parameter ergibt sich aus dem Ausdruck $\frac{k\omega+k'\omega'}{(-1)^{n+1}2^n-1}$ für $k=0$, $k'=0$. In der Tat läßt sich, wie mehrfach erwähnt, ein Wendepunkt als ein unendlich kleines Vieleck ansehen. Die Zahl der eigentlichen Vieleckspunkte beträgt also in unserem Falle $[(-1)^{n+1}2^n-1]^2-1$. Da ein $2n$-Eck $2n$ Eckpunkte hat, ergibt sich durch Division dieses Ausdrucks durch $2n$ die Zahl der Vielecke: $\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{2n}$. Da natürlich jeder Wendepunkt Zentrum gleich vieler zentraler $2n$-Ecke ist, muß man diese Zahl wiederum mit 9 multiplizieren, um die Zahl aller zentralen $2n$-Ecke zu bekommen. Setzen wir z. B. $n=5$, so erhalten wir die zentralen 10-Ecke. In diesem Falle ist

$$\frac{[(-1)^{n+1}2^n-1]^2=1}{2n}=\frac{[(-1)^6 2^5-1]^2-1}{10}=$$

$$=\frac{(2^5-1)^2-1}{10}=\frac{(2^5-1-1)\cdot(2^5-1+1)}{10}=\frac{32.30}{10}=96;$$

also beträgt die Zahl aller zentralen 10-Ecke $9.96 = 864$. Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Auswertung unseres Ausdruckes, wenn $2n$ ein ungerades Vielfaches von der Eckpunktzahl anderer zentraler Vielecke ist. Ist z. B. $2n = 18 = 3.6$, so ist in der Zahl der Eckpunkte der zentralen 18-Ecke, $(2^9 - 1)^2 - 1$, offenbar auch die Zahl der Eckpunkte aller zentralen Sechsecke enthalten. Ist etwa $A_1 A_2 \ldots A_6$ ein zentrales Sechseck, dessen Zentrum z. B. der Wendepunkt w_0 ist, dann bildet das Vieleck $A_1 A_2 \ldots A_6 A_1 A_2 \ldots A_6 A_1 A_2 \ldots A_6$ offenbar auch ein zentrales Achtzehneck: die 5. Unterordnung von A_1 ist A_6, die 6. wieder A_1, die 7. A_2, die 9. A_4; folglich geht, da ja $A_1 A_2 \ldots A_6 A_1$ ein zentrales Sechseck ist, die Diagonale, die A_1 mit der 9. Unterordnung von A_1 verbindet, durch w_0; ebenso die Verbindungslinie von A_2 und der 9. Unterordnung von A_2, A_5 u. s. w. Um also nur die Zahl der Punkte der eigentlichen Achtzehnecke zu erhalten, muß man die Zahl m, veranlaßt durch die zentralen Sechsecke, in Abzug bringen. Es ist aber $m = (2^3 - 1)^2 - 1 = 48$. Also erhalten wir für die Zahl der Eckpunkte der eigentlichen zentralen Achtzehnecke, die w_0 als Zentrum haben:

$$(2^9 - 1)^2 - 1 - 48 = (2^9 - 1)^2 - 7^2 = 261072.$$

Wollen wir, um ein weiteres Beispiel anzuführen, die Zahl der zu w_0 gehörigen zentralen Dreißigecke bestimmen, so müssen wir bedenken, daß 30 sowohl $= 5.6$, als auch $= 3.10$ ist. Von der Zahl $\{(2^{15} - 1)^2 - 1\}$ ist also sowohl die Zahl m der Eckpunkte der zentralen Sechsecke, als auch die Zahl n der Eckpunkte der zentralen Zehnecke abzuziehen.

Die Zahl der Eckpunkte der eigentlichen Dreißigecke, die zu w_0 gehören, ist also

$$= (2^{15} - 1)^2 - 1 - m - n; \quad m = 48, \quad n = (2^5 - 1)^2 - 1 = 960.$$

Also ist die Zahl der Eckpunkte aller hier in Frage kommenden Dreißigecke: $1073676288 - 48 - 960 = 1073675280$; folglich die Zahl der Dreißigecke, die einen Wendepunkt umgeben $= 35789176$. Ist $n = (2q + 1)r$ und r wieder $= (2s + 1)t$, wo n, q, r, s, t positive ganze Zahlen sind und handelt es sich wieder um die Zahl aller eigentlichen zentralen $2n$-Ecke, so sind die zentralen $2t$-Ecke wieder bei der Bildung der zentralen $2r$-Ecke zu berücksichtigen u. s. w. Man vergleiche hiemit die Betrachtungen, die Herr Picquet bei der Bestimmung der Anzahl der einfachen n-Ecke in der am Eingang erwähnten Abhandlung angestellt hat.

9a) Zu demselben Ergebnis kommen wir, wenn wir die Zahl aller Systemringe erster Art feststellen. Da nämlich, wie wir in 6) gesehen haben, ein Systemring erster Art neun zentrale $2n$-Ecke liefert, so muß sich durch Multiplikation der Zahl aller dieser Systemringe mit neun die Zahl aller zentralen $2n$-Ecke ergeben. Also muß die Zahl der zentralen $2n$-Ecke, die einem der neun Wendepunkte zugehören, identisch mit der Zahl aller Systemringe sein. Nun hat es keine Schwierigkeit, diese Zahl festzustellen. Ist $S_1 S_2 \dots S_n$ ein Systemring erster Art und $B_1 - C_1$ irgend ein Punktpaar von S_1, sind ferner B_{n+1} und C_{n+1} resp. die n^{ten} Unterordnungen von B_1 und C_1, also $B_{n+1} - C_{n+1}$ die n^{te} Unterordnung von $B_1 - C_1$, dann ist $B_{n+1} - C_{n+1}$ perspektivisch zu $B_1 - C_1$; es schneiden sich $B_1 B_{n+1}$ und $C_1 C_{n+1}$ in einem Punkte M der C_3. Ist nun der Punkt B_{n+1} dem Punkte B_1 unendlich benachbart, dann wird $B_1 B_{n+1}$ Tangente in B_1 und M ist der Tangentialpunkt; $B_1 - C_1$ und $B_1 - C_{n+1}$ sind dann die zwei zu B_1 gehörigen Punktpaare von S_1. Dieses Zusammenfallen der Punkte B_1 und B_{n+1} wird nun eintreten, sobald B_1 Eckpunkt eines um- und einbeschriebenen n-Ecks ist. Dann fällt M mit B_2 zusammen. Durch diesen Punkt B_2 geht also auch $C_1 C_{n+1}$ und die Frage nach der Zahl aller Systemringe erster Art ist nun offenbar identisch mit der Frage nach der Zahl aller Punkte C_1, die zu ihrer n^{ten} Unterordnung C_{n+1} so gelegen sind, daß die Verbindungslinie $C_1 C_{n+1}$ durch B_2 geht. Ist nun der Parameter von C_1 x, dann ist der von C_{n+1} $(-1)^n 2^n x$ und der des dritten Schnittpunktes von $C_1 C_{n+1} - [x + (-1)^n 2^n x]$; dieser Parameter muß derselbe sein, wie der von B_2; ist dieser p, so ist also

$$x\,[(-1^{n+1} 2^n - 1] \equiv p \pmod{\omega, \omega'};$$

also

$$\alpha)\quad x = \frac{p + k\omega + k'\omega'}{(-1)^{n+1} 2^n - 1}.$$

Die Zahl der Werte, die dieser Ausdruck annehmen kann, ist offenbar wieder $[(-1)^{n+1} 2^n - 1]^2$. Der Ausdruck gibt uns die Zahl aller Systeme an, die Glieder von Systemringen n^{ter} Ordnung und erster Art sind; dabei enthält der Ausdruck aber jedes System doppelt. Denn ebenso wie die n^{te} Unterordnung von $B_1 - C_1$ $B_1 - C_{n+1}$ ist, so ist die n^{te} Unterordnung von $B_1 - C_{n+1}$ wieder $B_1 - C_1$, da ja $B_1 - C_1$ und $B_1 - C_{n+1}$ die zwei einzigen zu B_1 gehörigen Punktpaare won S_1 sind. Unter den Lösungen der Gleichung α) findet sich also sowohl C_1 als auch C_{n+1}, obwohl beide Punkte ein Punktpaar desselben Systems, S_1, liefern. Wollen wir also nur die Zahl der Systemringe haben, so müssen wir, weil n Systeme zu einem Ring gehören und jedes System doppelt in der durch α) gegebenen Zahl enthalten ist, $[(-1)^{n+1} 2^n - 1]^2$ durch $2n$ dividieren.

Anmerkung. Die Übereinstimmung dieser Zahl mit der Zahl der zu einem Wendepunkt w_0 gehörigen zentralen $2n$-Ecke ist noch in anderer Beziehung interessant. Die Punkte $C_1 C_2 \dots \dots C_n C_{n+1} \dots C_{2n} C_1$ bilden ein um- und einbeschriebenes beliebiges $2n$-Eck; die dritten Schnittpunkte der Diagonalen $C_1 C_{n+1}$, $C_2 C_{n+2}$ u. s. w. bilden das n-Eck $B_1 B_2 \dots B_n$. Ein solches „begleitendes“

n-Eck gehört offenbar zu jedem um- und einbeschriebenen $2n$-Eck und unsere Gleichung α) gibt nun alle die Eckpunkte C derjenigen $2n$-Ecke, die $B_1 B_2 \ldots B_n$ als begleitendes n-Eck haben. Das begleitende n-Eck aber, das zu einem zentralen $2n$-Eck mit dem Wendepunkt w_0 als Zentrum gehört, ist das unendlich kleine n-Eck, das in den Wendepunkt w_0 fällt. Iu der Tat geht der Ausdruck α) in den im vorigen Paragraphen diskutierten Ausdruck über für $p=0$.

10. Wir wollen uns nun noch genauer mit dem merkwürdigen $3n$-Eck beschäftigen. Wir haben gesehen, daß es eine Anzahl reeller der C_3 um- und einbeschriebener n-Ecke gibt; ebenso ist bekannt, daß zwei reelle der C_3 um- und einbeschriebene Dreiecke existieren. Da nun ein merkwürdiges $3n$-Eck, wie wir in 8. gesehen haben, sich aus der Verbindung eines n-Ecks und eines Dreiecks ergibt, so existieren auch reelle merkwürdige $3n$-Ecke. Ein solches, $A_1 A_2 \ldots A_{3n}$, legen wir der nachstehenden Betrachtung zu Grunde. $A_1 - A_{n+1}$, $A_{n+1} - A_{2n+1}$, $A_{2n+1} - A_1$ seien also Punktpaare des sich selbst untergeordneten Systems Σ'. Die Wendepunkte seien $w, w', w'', w_\alpha, w'_\alpha, w''_\alpha, w_\beta, w'_\beta, w''_\beta$; und zwar seien $w - w'$, $w - w''$, $w_\alpha - w'_\alpha$, $w_\alpha - w''_\alpha$, $w_\beta - w'_\beta$, $w_\beta - w''_\beta$ Punktpaare von Σ'; w, w', w'' seien die drei reellen Wendepunkte. Dann ist nach 4. die Projektion von $A_1, A_2 \ldots A_{3n}$ von w aus,

$$w(A_1 A_2 \cdots A_{3n}) = w'(A_1 A_2 \cdots A_{3n}) = w''(A_1 A_2 \cdots A_{3n});$$

diese Projektion sei $a_1 a_1 \cdots a_{3n}$; sie ist natürlich auch reell. Dagegen ist

$$w_\alpha (A_1 A_2 \cdots A_{3n}) = w'_\alpha (A_1 A_2 \cdots A_{3n}) =$$
$$= w''_\alpha (A_1 A_2 \cdots A_{3n}) \equiv a_1^{(\alpha)} a_2^{(\alpha)} \cdots a_{3n}^{(\alpha)}$$

imaginär; ebenso $w_\beta (A_1 A_2 \cdots A_{3n}) \equiv a_1^{(\beta)} a_2^{(\beta)} \cdots a_{3n}^{(\beta)}$. Desgleichen sind die Projektionen des zweiten reellen Vielecks $a_1 a_2 \cdots a_{3n}$ von w_α und w_β aus,

$$w_\alpha (a_1 a_2 \cdots a_{3n}) \equiv A_1^{(\alpha)} A_2^{(\alpha)} \cdots A_{3n}^{(\alpha)} \text{ und } w_\beta (a_1 a_2 \cdots a_{3n} =$$
$$= A_1^{(\beta)} A_2^{(\beta)} \cdots A_{3n}^{(\beta)},$$

imaginär. Mit $w_\alpha (a_1 a_2 \cdots a_{3n})$ ist wieder $w'_\alpha (a_1 a_2 \cdots a_{3n})$ und $w''_\alpha (a_1 a_2 \cdots a_{3n})$ identisch; ebenso mit $w_\beta (a_1 a_2 \cdots a_{3n})$ $w'_\beta (a_1 a_2 \cdots a_{3n})$ und $w''_\beta (a_1 a_2 \cdots a_{3n})$. Die beiden Vielecke $A_1^{(\alpha)} A_2^{(\alpha)} \cdots A_{3n}^{(\alpha)}$ und $A_1^{(\beta)} A_2^{(\beta)} \cdots A_{3n}^{(\beta)}$ sind natürlich verschieden von einander; denn sie sind ja Projektionen eines Vielecks $a_1 a_2 \cdots a_{3n}$ von jedesmal drei verschiedenen Wendepunkten aus: $A_1^{(\alpha)} \cdots$ von $w_\alpha, w'_\alpha, w''_\alpha$ aus, $A_1^{(\beta)} \cdots$ von $w_\beta, w'_\beta, w''_\beta$ aus. Wir sehen also: eine Abteilung merkwürdiger $3n$-Ecke enthält sechs Vielecke, die Gruppe A besteht aus den $3n$-Ecken $A_1 \cdots, A_1^{(\alpha)} \cdots, A_1^{(\beta)} \cdots$; die Gruppe B enthält die $3n$-Ecke $a_1 \cdots, a_1^{(\alpha)} \cdots, a_1^{(\beta)} \cdots$. Auch hier ist, wie beim beliebigen n-Eck jedes Vieleck der Gruppe A perspektivisch zu jedem Vieleck der Gruppe B. Die Perspektivität ist aber hier eine dreifache; die drei Projektionszentren bildet eines der drei Wendepunktstripel: w, w', w'' oder $w_\alpha, w'_\alpha, w''_\alpha$ oder $w_\beta, w'_\beta, w''_\beta$. In unserem Falle, wo wir von einem reellen Vieleck ausgegangen sind, ergab sich je ein Vieleck jeder Gruppe als reell: die beiden Vielecke $A_1 \cdots$ und $a_1 \cdots$; die anderen vier Vielecke sind imaginär. Daß eine Abteilung gerade sechs Vielecke enthält, steht im Einklange mit der Tatsache, daß ein System des Ringes, S_1, 18 Tangenten mit der C_3 gemeinsam hat, jedes Vieleck der Abteilung aber drei dieser 18 Tagenten enthält:

$$A_1 A_2,\ A_{n+1} A_{n+2},\ A_{2n+1} A_{2n+2};\ a_1 a_2,\ a_{n+1} a_{n+2},\ a_{2n+1} a_{2n+2}$$

u. s. w. Es gibt natürlich außer solchen Abteilungen, die zwei reelle Vielecke enthalten, auch Abteilungen mit lauter imaginären Vielecken. Die diesbezüglichen Unterscheidungen können wir uns hier ersparen, da sie sich an der Hand des Parameterausdruckes für alle $3n$-Eckspunkte in ganz ähnlicher Weise wie beim n-Eck bewerkstelligen lassen. Dagegen ist es für die nachfolgenden Betrachtungen notwendig, daß wir diesen Parameterausdruck feststellen. Wir haben gesehen, daß die Linie, die einen Eckpunkt eines um- und einbeschriebenen n-Ecks mit einem Eckpunkt eines um- und einbeschriebenen Dreiecks verbindet, als dritten Schnittpunkt mit der C_3 einen Eckpunkt eines merkwürdigen $3n$-Ecks liefert. Die Parameter sämtlicher n-Eckspunkte sind in dem Ausdrucke

$$\frac{k\,\omega + k'\,\omega'}{(-1)^n \cdot 2^n - 1}$$

enthalten, in dem k und k' irgend welche ganze Zahlen bedeuten. Setzen wir in demselben $n = 3$, so erhalten wir die Parameter für die Eckpunkte der um- und einbeschriebenen Dreiecke. Der bei dieser Spezialisierung sich ergebende Ausdruck ist von der Form $\frac{l\,\omega + l'\,\omega}{9}$, wo l und l' irgendwelche positive oder negative Zahlen bedeuten; es ergeben sich allerdings schon sämtliche Dreieckspunkte, wenn man l und l' alle Werte von 0 bis 8 annehmen läßt, wobei wir aber natürlich auch die neun Wendepunkte erhalten. Bringen wir diese in Abzug, so ergibt sich also als die Zahl der eigentlichen Dreieckseckpunkte 72, im Einklang mit der bekannten Tatsache, daß es 24 um- und einbeschriebene Dreiecke gibt. — Der gesuchte Ausdruck für die Parameter unserer $3n$-Eckspunkte ist somit

$-\left[\frac{k\omega+k'\omega'}{(-1)^n 2^n-1}+\frac{l\omega+l'\omega'}{9}\right]$ oder, wenn wir die Brüche auf einen Nenner bringen, unter Berücksichtigung des Umstands, daß $[(-1)^n 2^n-1]$ durch 3 teilbar ist, $\frac{m\omega+m'\omega'}{[(-1)^n 2^n-1]\cdot 3}$, wo wieder m und m' beliebige ganze Zahlen bedeuten. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Nenner $[(-1)^n 2^n-1]$ nicht durch 9 teilbar ist. Die Teilbarkeit des Nenners durch 9 ist aber, wie man sofort erkennt, wenn man ihn durch (2^3+1) dividiert, nur dann möglich, wenn n durch 3 teilbar ist. Diesen Fall haben wir bei unserer Konstruktion des merkwürdigen $3n$-Ecks ausgeschlossen. — Die Frage, ob auch ein merkwürdiges $3n$-Eck existiert für den Fall, daß n durch 3 teilbar ist, welche besonderen Eigenschaften ihm zukommen und wie es sich konstruieren läßt, will ich einer besonderen Untersuchung vorbehalten. Der für uns hier in Frage kommende Ausdruck $\frac{m\omega+m'\omega'}{[(-1)^n 2^n-1]\cdot 3}$ enthält auch alle Wendepunkte. Alle reellen Werte bekommen wir, wenn wir $m'=0$ setzen. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Gesamtzahl aller merkwürdigen $3n$-Ecke festzustellen, da alle Werte, die der Ausdruck annehmen kann, erhalten werden, wenn wir, im Falle n gerade ist, jeden der Parameter m und m' die Werte der positiven ganzen Zahlen von 0 bis $[(2^n-1)\cdot 3-1]$ annehmen lassen; im Falle n ungerade ist, jedem der zwei Parameter die Werte sämtlicher negativer ganzer Zahlen von 0 bis $[(-2^n-1)\cdot 3+1]$ geben. Die Zahl aller möglichen Werte unseres Ausdruckes $\frac{m\omega+m'\omega'}{[(-1)^n 2^n-1]\cdot 3}$ ist also in beiden Fällen $=[(-1)^n 2^n-1]^2\cdot 3^2$. Nun zeigt aber unser Parameterausdruck in seiner ursprünglichen Form

$$-\left[\frac{k\omega+k'\omega'}{(-1)^n 2^n-1}+\frac{l\omega+l'\omega'}{9}\right],$$

daß er auch die Parameter der Eckpunkte sämtlicher um- und einbeschriebenen Dreiecke enthält. Man erhält dieselben, wenn man in diesem Ausdruck k und $k'=0$ setzt. Wenn man also nur die Eckpunkte der eigentlichen merkwürdigen $3n$-Ecke haben will, muß man außer den neun Wendepunkten noch diese 72 Dreieckseckpunkte abziehen. Berücksichtigt man dann noch, daß $3n$-Eckpunkte zusammen ein $3n$-Eck ergeben, so erhält man als die Zahl aller möglichen merkwürdigen $3n$-Ecke

$$\frac{9[(-1)^n 2^n-1]^2-81}{3n}=\frac{3\{[(-1)^n 2^n-1]^2-9\}}{n}.$$

So ergibt sich z. B. als die Zahl aller merkmürdigen 24-Ecke die Zahl 24381, als die Zahl aller merkmürdigen 15-Ecke die Zahl 648.

11. Wir wollen nun ein merkwürdiges $3n$-Eck bezüglich der Lage seiner Eckpunkte einer genaueren Betrachtung unterziehen. Das Vieleck heiße wieder $A_1 A_2 \cdots A_{3n} A_1$. Wir betrachten das Dreieck $A_1 A_{n+1} A_{2n+1}$, dessen drei Punktpaare $A_1 - A_{n+1}$, $A_{n+1} - A_{2n+1}$ und $A_{2n+1} - A_1$ einem der vier ausgezeichneten Systeme, $\sum$, angehören, also gleichnetzig sind. Da $A_1 - A_{n+1}$ und $A_1 - A_{2n+1}$ die zwei Punktpaare des Systems $\sum$ sind, die zu A_1 gehören, so geht die Verbindungslinie von A_{n+1} und A_{2n+1} durch A_2, den Tangentialpunkt von A_1 (s. Einleitung I); also: je drei Eckpunkte eines solchen Vielecks $A_1 A_2 \cdots A_{3n} A_1$, A_{n+1}, A_{2n+1} und A_2 liegen auf einer und derselben Geraden, die wir somit als eine Doppeldiagonale bezeichnen können. Das Vieleck hat $3n$ solche Doppeldiagonalen. Durch jeden Punkt A_k gehen deren drei:

$$\alpha)\ A_k A_{n+k} A_{2n+k+1}, \quad \beta)\ A_k A_{2n+k} A_{k+n+1},$$
$$\gamma)\ A_k A_{k+n-1} A_{k+2n-1}.$$

Auf zweien dieser Doppeldiagonalen, α) und β), liegt ein Punktpaar von $\sum$, von dem ein Punkt A_k ist; diese Punktpaare heißen $A_k - A_{n+k}$ und $A_{2n+k} - A_k$. Bei der Doppeldiagonale γ) liefern die andern beiden Punkte, die sie außer A_k enthält, das Punktpaar von $\sum$, $A_{k+n-1} - A_{k+2n-1}$.

12. Wir wollen für das Vorhandensein dieser merkwürdigen Eigenschaft noch einen weiteren Beweis anführen, und zwar deswegen, weil dieser Beweis die Doppeldiagonalen zugleich in den Tripeln ergibt, die zu den einzelnen Eckpunkten gehören, und weil er den Übergang zum zentralen $2n$-Eck gestattet. Sind in Figur $5a$ A_1, A_2, A_3, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3} wieder Eckpunkte eines $3n$-Ecks von dem von uns behandelten Typus, sind also $A_1 - A_2$ und $A_{n+2} - A_{n+1}$ perspektivisch, ebenso $A_2 - A_3$ und $A_{n+3} - A_{n+2}$, so ist folgendes der Fall: $A_1 - A_3$ ist gleichnetzig mit $A_1 - A_2$, weil $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ auf einander folgende Tangenten sind (s. Einleitung II); ebenso ist $A_{n+1} - A_{n+3}$ gleichnetzig $A_{n+1} - A_{n+2}$. Also sind auch folgende Punktpaare perspektivisch: 1. $A_1 - A_2$ und $A_{n+1} - A_{n+3}$, 2) $A_1 - A_3$ und $A_{n+1} - A_{n+2}$.

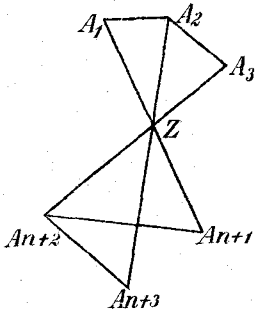

Fig. $5a$.

Anmerkung. Aus dem, was wir über Punktpaare auseinandergesetzt haben, ergibt sich von selbst, daß, wenn $A - B$

und $a - b$ perspektivisch sind und $A - B'$ das zweite zu A gehörige Punktpaar des Systems ist, $B' - A$ und $a - b$ auch perspektivisch sind.

Aus 1. folgt, daß $A_1 A_{n+1}$ und $A_2 A_{n+3}$ sich in einem und demselben dritten Punkte Z der C_3 schneiden, aus 2., daß $A_1 A_{n+1}$ und $A_3 A_{n+2}$ auch einen und denselben dritten Schnittpunkt ergeben, der mit dem eben erhaltenen Punkt Z identisch sein muß, weil er ja auch wieder der dritte Schnittpunkt von $A_1 A_{n+1}$ ist. In Z schneiden sich also die Diagonalen $A_1 A_{n+1}$, $A_2 A_{n+3}$ und $A_3 A_{n+2}$. Es ist nun leicht zu erkennen, daß Z mit A_{2n+2} identisch ist. Projiziere ich nämlich das Punktpaar $A_1 - A_{n+1}$ von A_1 aus, so projiziert sich A_{n+1} nach Z, A_1 nach dem Tangentialpunkt A_2. $Z - A_2$ ist also gleichnetzig mit $A_1 - A_{n+1}$; projiziere ich dasselbe Punktpaar $A_1 - A_{n+1}$ von A_{n+1} aus, so projiziert sich A_1 nach Z, A_{n+1} nach dem Tangentialpunkt A_{n+2}; also sind die beiden Punktpaare von Σ, die zu Z gehören, $Z - A_2$ und $Z - A_{n+2}$. Das merkwürdige Dreieck von Σ aber, dessen eine Seite $A_2 A_{n+2}$ ist, heißt $A_2 A_{n+2} A_{2n+2}$, also ist Z identisch mit A_{2n+2}.

Wenn wir uns nun fragen, gibt es beim zentralen $2n$-Eck etwas ähnliches, wie diese Doppeldiagonalen und ihre Beziehungen, so erledigt sich diese Frage durch einen Blick auf die Figur 5b, der eine ähnliche Überlegung zugrunde liegt, wie der Figur 5a. Sind A_1, A_2, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3} Eckpunkte eines zentralen $2n$-Ecks, so schneiden sich also die Diagonalen $A_1 A_{n+1}$ und $A_2 A_{n+2}$ in einem Wendepunkt der Kurve w. Da nun $A_{n+1} A_{n+2}$ und $A_{n+2} A_{n+3}$ aufeinander folgende Tangenten sind, so ist $A_{n+1} - A_{n+3}$ gleichnetzig mit $A_{n+1} - A_{n+2}$ und $A_1 - A_2$, und es schneiden sich also $A_{n+1} A_2$ und $A_{n+3} A_1$ in einem und demselben dritten Punkte M der Kurve. Also: In einem zentralen $2n$-Eck $A_1 A_2 \ldots A_k \ldots \ldots A_n A_{n+1} \ldots A_{2n} A_1$ schneiden sich die Diagonalen $A_k A_{k+n-1}$ und $A_{k-1} A_{k+n+1}$ in einem und demselben dritten Punkte M der C_3.

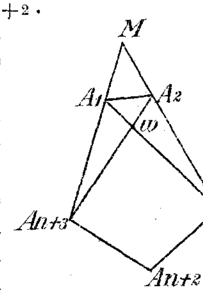

Fig. 5b.

Anmerkung. Dieser Punkt M gehört aber nicht auch wieder dem Vieleck selber an; sondern, wenn $A_1 A_2 \ldots A_{2n} A_1$ dem Systemring $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$ angehört, so ist M Eckpunkt eines andern zentralen $2n$-Ecks; der zugehörige Systemring $S_1' S_2' \ldots S_n' S_1'$ wird in seiner Beziehung zu $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$ in 14. erörtert werden.

13. Wir haben in 4. gesehen, daß ein merkwürdiges $3n$-Eck $A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1$ mit seiner Projektion von einem Wendepunkt w_1 aus, $w_1(A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1)$, in dreifach perspektivischer Beziehung steht: $w_1(A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1)$ war $= w_2(A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1) = w_3(A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1)$, wobei die Punktpaare $w_1 - w_2$, $w_1 - w_3$, $w_2 - w_3$ demjenigen ausgezeichneten System, Σ, angehörten, von dem $A_1 - A_{n+1}$, $A_2 - A_{n+2} \ldots$ Punktpaare sind. Es dürfte nunmehr von Interesse sein, die ganze

Gruppe der merkwürdigen $3n$-Ecke ins Auge zu fassen, die einem solchen System zugrunde liegen. Wir wollen zu diesem Zwecke ein Punktpaar $A_1 - A_2$ von Σ auswählen und die sukzessiven Unterordnungen desselben, $A_1' - A_2'$, $A_1'' - A_2''$, $A_1''' - A_2''' \ldots A_1^{(n)} - A_2^{(n)}$ betrachten; $A_1^{(n)} - A_2^{(n)}$ sei also die n^{te} Unterordnung von $A_1 - A_2$. Es fragt sich nun, welcher Art ist die Beziehung zwischen $A_1 - A_2$ und $A_1^{(n)} - A_2^{(n)}$? Sind $A_1 - A_2$ und $A_1^{(n)} - A_2^{(n)}$ perspektivisch oder $A_1 - A_2$ und $A_2^{(n)} - A_1^{(n)}$? Die Antwort ergibt sich sofort, wenn wir das Punktpaar $w_1 - w_2$ des Systems betrachten, von welchem w_1 und w_2 Wendepunkte sind. Nennen wir die n^{te} Unterordnung von w_1 $w_1^{(n)}$, die von w_2 $w_2^{(n)}$, dann sind also $w_1 - w_2$ und $w_1^{(n)} - w_2^{(n)}$ gleichnetzig. Wären nun $w_1 - w_2$ und $w_1^{(n)} - w_2^{(n)}$ perspektivisch, dann würden $w_1 w_1^{(n)}$ und $w_2 w_2^{(n)}$ sich in einem Punkte der C_3 schneiden; nun fällt aber, weil w_1 und w_2 Wendepunkte sind, $w_1^{(n)}$ mit w_1 und $w_2^{(n)}$ mit w_2 zusammen, also ist $w_1 w_1^{(n)}$ die Wendetangente in w_1, $w_2 w_2^{(n)}$ die Wendetangente in w_2; zwei Wendetangenten der C_3 können sich aber nicht in einem Punkte der C_3 schneiden, da ja die drei Schnittpunkte einer Wendetangente mit der C_3 in den Wendepunkt fallen. Also sind $w_1 - w_2$ und $w_2^{(n)} - w_1^{(n)}$ perspektivisch. Aber auch ohne Zuhilfenahme der Wendepunkte ist diese Art der Perspektivität bei irgend einem Punktpaar $A_1 - A_2$ und einer seiner Unterordnungen leicht zu erkennen. Da A_1 und A_2 kein konjugiertes Punktpaar bilden, so können sich die zwei Tangenten in diesen zwei Punkten $A_1 A_1'$ und $A_2 A_2'$ nicht in einem Punkte der C_3 schneiden. Da aber $A_1 - A_2$ und $A_1' - A_2'$ gleichnetzig sind, müssen $A_1 - A_2$ und $A_2' - A_1'$ perspektivisch sein, ebenso $A_1' - A_2'$ und $A_2'' - A_1''$ u. s. w.; in allen diesen Punktpaaren sind also A_1, A_1', $A_1'' \ldots$ von derselben Art, alle diese Punkte entweder Nullpunkte oder Eckpunkte. — Losgelöst aus dem Rahmen unserer Betrachtungen, läßt sich diese bemerkenswerte Eigenschaft einer C_3 etwa in folgender Weise formulieren:

Sind w_1 und w_2 irgend zwei Wendepunkte einer C_3 und projiziert man dieselben auf die C_3 von irgend einem ihrer Punkte aus, so erhält man zwei Punkte A_0 und B_0, die in folgender Beziehung zu einander stehen: zeichnet man zu A_0 und B_0 die Reihe ihrer sukzessiven Tangentialpunkte, resp. $A_1, A_2, \ldots A_{k-1}, A_k, \ldots \ldots A_n, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots B_{k-1}, B_k, \ldots B_n, \ldots$ wo also k eine beliebige positive ganze Zahl und A_k der Tangentialpunkt von A_{k-1} ist, und n irgend eine Zahl $> k$, dann schneiden sich $A_k B_n$ und $B_k A_n$ in einem Punkte der C_3. — Wir wollen nun diese Betrachtungen für unsere $3n$-Ecke verwerten. In $A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1$

ist $A_1 - A_{n+1}$ ein Punktpaar von Σ, $A_2 - A_{n+2}$, $A_3 - A_{n+3} \ldots$ $\ldots A_k - A_{n+k}, \ldots A_p - A_{n+p} \ldots$ die Reihe der Unterordnungen. In diesen Punktpaaren sind also $A_1, A_2, A_3 \ldots A_k \ldots A_p \ldots$ gleichartige Punkte; es schneiden sich also z. B. $A_k A_{n+p}$ und $A_{k+n} A_p$ in einem und demselben Punkte der C_3; daran ersieht man, daß $A_k - A_p$ und $A_{k+n} - A_{p+n}$ gleichnetzig sind, und zwar so, daß $A_k - A_p$ und $A_{p+n} - A_{k+n}$ perspektivisch sind. Also: Ein Punktpaar, gebildet von irgend einer Diagonale $A_k A_p$ eines merkwürdigen $3n$-Ecks, $A_k - A_p$, ist wieder ein Punktpaar eines Systemrings n^{ter} Ordnung und zweiter Art. — Die Diagonalpunktpaare unserer Vielecke werden im Zusammenhange im nächsten Paragraphen erörtert werden. — Sind nun in der Reihe der Punktpaare $A_1 - A_{n+1}$, $A_2 - A_{n+2} \ldots$ die Anfangspunkte $A_1, A_2 \ldots$ Nullpunkte, so sind in der Projektion des Vielecks von einem Wendepunk aus, in $a_1 a_2 \ldots a_{3n} a_1$ die Anfangspunkte $a_1 a_2 \ldots$ Eckpunkte der betreffenden Punktpaare. Wir ersehen daraus: die Gruppe der merkwürdigen $3n$-Ecke, die einem ausgezeichneten System Σ angehören, teilt sich in zwei Kategorien von $3n$-Ecken, resp. $A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1$, $A'_1 A'_2 \ldots A'_{3n} A'_1$, $A''_1 A''_2 \ldots$ $\ldots A''_{3n} A_1 \ldots$ und $a_1 a_2 \ldots a_{3n} a_1$, $a'_1 a'_2 \ldots a'_{3n} a_1$, $a''_1 a''_2 \ldots a''_{3n} a''_1$. Alle hier in Betracht kommenden Punktpaare der ersten Kategorie, $A_1 - A_{n+1}$, $A_2 - A_{n+2} \ldots$, $A'_1 - A'_{n+1}$, $A'_2 - A'_{n+2} \ldots$, $A''_1 - A''_{n+1}$, $A''_2 - A''_{n+2} \ldots$ gehören der einen Punktpaarmannigfaltigkeit von Σ an, alle Punktpaare $a_1 - a_{n+1}$, $a_2 - a_{n+2}, \ldots$, $a'_1 - a'_{n+1}$, $a'_2 - a'_{n+2}, \ldots$, $a''_1 - a''_{n+1}$, $a''_2 - a''_{n+2} \ldots$ der zweiten Mannigfaltigkeit. Daraus ergibt sich eine merkwürdige Beziehung zwischen einem $3n$-Eck der ersten Kategorie, $A_1 A_2 \ldots A_k \ldots A_{3n} A_1$ und einem beliebigen $3n$-Eck $a'_1 a'_2 \ldots a'_k \ldots a'_{3n} a'_1$ der zweiten. In dem Dreieck $A_k A_{n+k} A_{2n+k}$ sind die Eckpunkte Punkte des Vielecks $A_1 A_2 \ldots A_k \ldots A_{3n} A_1$, und die Punktpaare $A_k - A_{n+k}$, $A_{n+k} - A_{2n+k}$, $A_{2n+k} - A_k$ sind Punktpaare von Σ; ähnlich verhält es sich mit dem Dreieck $a'_l a'_{n+l} a'_{2n+l}$; nun sind $A_k - A_{n+k}$ und $a'_l - a'_{n+l}$ perspektivisch, ebenso $A_{n+k} -$ $- A_{2n+k}$ und $a'_{n+l} - a'_{2n+l}$, $A_{2n+k} - A_k$ und $a'_{2n+l} - a'_l$; also ist das eine Dreieck $a'_l a'_{n+l} a'_{2n+l}$ die Projektion des anderen, $A_k A_{n+k}$ A_{2n+k}, von irgend einem Punkte M_1 der C_3 aus und wir kommen zu folgendem Satze: ist $A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1$ ein $3n$-Eck der ersten Kategorie des Systems Σ, $a'_1 a'_2 \ldots a'_{3n} a'_1$ ein solches der zweiten Kategorie, sind ferner k und l irgendwelche von einander unabhängige Zahlen zwischen 1 und $3n$, dann schneiden sich $A_k a'_l$, $A_{n+k} a'_{n+l}$, $A_{2n+k} a'_{2n+l}$ in einem und demselben Punkte M_1 der C_3. — Der Satz umfaßt natürlich auch den speziellen Fall, daß $a'_1 a'_2 \ldots$ eine Projektion von $A_1 A_2 \ldots$ ist. Zeichnen wir die sukzessiven Unterordnungen der Geraden $A_k a'_l M_1$, $A_{k+1} a'_{l+1} M_2$, $A_{k+2} a'_{l+2} M_3 \ldots$, so ist klar, daß $M_1 M_2$ eine Tangente der C_3 ist, da auch $A_k A_{k+1}$ und $a'_l a'_{l+1}$ Tangenten sind. Nun ist die n^{te} Unterordnung des Geradentripels $A_k a'_l$, $A_{n+k} a'_{n+l}$, $A_{2n+k} a'_{2n+l}$ das Geradentripel $A_{n+k} a'_{n+l}$, $A_{2n+k} a'_{2n+l}$, $A_{3n+k} a'_{3n+l}$; aber $A_{3n+k} = A_k$ und $a'_{3n+l} = a'_l$; folglich ist die n^{te} Unterordnung des Tripels mit dem Tripel wieder identisch; somit $M_1 M_2$ .. ein um- und einbeschriebenes n-Eck. Also: ist $A_k A_{k+1}$ eine beliebige Tangente irgend eines Vielecks der ersten Kategorie, mit A_k als Berührungspunkt, $a'_l a'_{l+1}$ eine Tangente eines Vielecks der zweiten Kategorie, mit a'_l als Berührungspunkt, dann schneiden $A_k a'_l$ und $A_{k+1} a'_{l+1}$ resp. Berührungspunkt und Tangentialpunkt einer dritten Tangente aus, $M_1 M_2 . M_1 M_2$ ist eine Tangente eines um- und einbeschriebenen einfachen n-Ecks.

Der Satz läßt eine merkwürdige Verallgemeinerung zu. Wenn wir nämlich bei den Punktpaaren von Σ in gewohnter Weise die Mannigfaltigkeiten I und II unterscheiden, deren erste die Punktpaare $A - B$, die zweite die zu diesen perspektivischen Punktpaare $a - b$ umfaßt, so lassen sich auch alle merkwürdigen $3n$-Ecke des Systems, wobei n eine beliebige ganze Zahl sein kann, in zwei Kategorien spalten: die erste Kategorie umfaßt die Vielecke, deren Diagonalpunktpaare $A_1 - A_{n+1}$, $A_2 - A_{n+2}$ der Mannigfaltigkeit I angehören, die zweite diejenigen, deren Diagonalpunktpaare $a_1 - a_{n+1}$, $a_2 - a_{n+2}$ Punktpaare der Mannigfaltigkeit II sind. Ist nun z. B. $A_1 A_2 \ldots A_h \ldots A_{3n} A_1$ ein merkwürdiges $3n$-Eck der ersten Kategorie, $a_1 a_2 \ldots a_l \ldots a_{3p} a_1$ ein merkwürdiges $3p$-Eck der zweiten, dann schneiden sich, ähnlich wie beim vorigen Satze, $A_h a_l$, $A_{n+h} a_{p+l}$, $A_{2n+h} a_{2p+l}$ in einem und demselben Punkte der C_3.

Es erübrigt nun noch ein kurzes Eingehen auf die Beziehungen zwischen zwei merkwürdigen Vielecken derselben Kategorie. Sind $A_h A_{h+n} A_{h+2n}$ und $a_l a_{l+p} a_{l+2p}$ zwei merkwürdige Dreiecke und schneiden sich die Verbindungslinien $A_h a_l$, $A_{h+n} a_{l+p}$, $A_{h+2n} a_{l+2p}$ in demselben Punkte der C_3, ist ferner das Dreieck $B_l B_{l+p} B_{l+2p}$ eine Projektion des Dreiecks $a_l a_{l+p} a_{l+2p}$, dann sind die zwei Dreiecke $A_h A_{h+n} A_{h+2n}$ und $B_l B_{l+p} B_{l+2p}$ von der Art perspektivisch, daß $A_h B_l$, $A_{h+n} B_{l+2p}$, $A_{h+2n} B_{l+p}$ ein Tripel von Geraden sind, die sich in demselben Punkte der C_3 schneiden. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Sind $A_1 A_2 \ldots A_h \ldots A_{3n} A_1$ und $B_1 B_2 \ldots B_l \ldots B_{3p} B_1$ zwei merkwürdige Vielecke derselben Kategorie ein $3n$-Eck und ein $3p$-Eck, dann schneiden sich die Verbindungslinien $A_h B_l$, $A_{h+n} B_{l+2p}$, $A_{h+2n} B_{l+p}$ in demselben Punkte der C_3.

14. Ich will nun zeigen, daß, sobald uns ein merkwürdiges $3n$-Eck oder ein zentrales $2n$-Eck gegeben ist, eine Reihe

weiterer Vielecke der gleichen Art sich ohne weiteres konstruieren lassen. Zu diesem Zwecke beschäftigen wir uns kurz mit zwei Gattungen von Systemringen, die sich aus einem um- und einbeschriebenen Vieleck unmittelbar ergeben. Ist $A_1 A_2 \ldots A_h \ldots A_l \ldots A_n A_1$ ein um- und einbeschriebenes n-Eck, das dem Systemring $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$ angehört, und ist $A_h A_l$ irgend eine Diagonale desselben, so ist das durch diese Diagonale veranlaßte Punktpaar, das „Diagonalpunktpaar" $A_h — A_l$ auch wieder ein Punktpaar eines Systemrings; denn die n^{te} Unterordnung von A_h ist wieder A_h und die n^{te} Unterordnung von A_l fällt wieder mit A_l zusammen. Es ist dies wieder ein Systemring 2. Art, da wenn wir einen Augenblick die n^{te} Unterordnung von A_h mit A'_h bezeichnen, die von A_l mit A'_l, $A_h A'_h$ und $A_l A'_l$ sich nicht in einem Punkte der C_3 schneiden können, weil ja $A_h A'_h$ die Tangente in A_h ist, $A_l A'_l$ die in A_l, die Tangenten zweier Punkte sich aber nur bei einem konjugierten Punktpaar in einem Punkte der C_3 schneiden. Solche Systemringe von Diagonalpunktpaaren veranlaßt also ein gegebener Systemring $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$ so viele, als ein ihm angehöriges um- und einbeschriebenes Vieleck von einem Punkte ausgehende Diagonalen hat. Die von A_1 ausgehenden Diagonalen des Vielecks $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ sind $A_1 A_3$, $A_1 A_4 \ldots A_1 A_k \ldots A_1 A_{n-1}$; das sind ($n$-3)-Diagonalen; die zugehörigen Diagonalpunktpaare und ihre Systemringe sind aber nicht von einander und dem Systemring $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$ unabhängig. Ist z. B. das Diagonalpunktpaar $A_1 — A_k$ gegeben, so wird es im allgemeinen, wenn k irgend eine positive Zahl $< n$ ist, keine Schwierigkeit haben, das Punktpaar $A_1 — A_2$ des Ringes $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$ zu konstruieren: mit dem Punktpaar $A_1 — A_k$ sind auch die Punktpaare sämtlicher Unterordnungen gegeben, also auch $A_k — A_{2k-1}$, die $(k-1)^{\text{te}}$ Unterordnung von $A_1 — A_k$, damit aber auch das Diagonalpunktpaar $A_1 — A_{2k-1}$; ebenso findet man von dem Punktpaar $A_1 — A_{2k-1}$ aus das Punktpaar $A_1 — A_{3k-2}$ u. s. w. Im allgemeinen wird aber die Reihe der Punkte A_k, A_{2k-1}, $A_{3k-2} \ldots$ alle Punkte des n-Ecks, also auch den Punkt A_2 ergeben. So lassen sich von einem Diagonalpunktpaar aus alle übrigen und der gegebene Systemring konstruieren. Allerdings gibt es Ausnahmefälle; diese mögen einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben.

Die zweite Gruppe von Systemringen, die mit einem um- und einbeschriebenen Vieleck $A_1 A_2 \ldots A_k \ldots A_n A_1$ gleichzeitig gegeben ist, wird veranlaßt durch die dritten Schnittpunkte der Diagonalen des Vieleckes. Ist $A_{1,k}$ der dritte Schnittpunkt von $A_1 A_k$ mit der C_3, so ist dieser Punkt offenbar auch ein Eckpunkt eines um- und einbeschriebenen Vielecks. Dieses Vieleck heißt $A_{1,k} A_{2,k+1} A_{3,k+2} \ldots A_{n,k+n} A_{1,k}$. $A_{1,k} A_{2,k+1}$ ist die dritte Tangente zu den zwei Tangenten $A_1 A_2$ und $A_k A_{k+1}$, denn nach Voraussetzung liegen A_1, A_k, $A_{1,k}$ auf einer Geraden, ebenso A_2, A_{k+1}, $A_{2,k+1}$. Solcher Vielecke gibt es n-3. Sie sind durch folgende Eckpunkte bestimmt: $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, $A_{1,5} \ldots A_{1,n-1}$; jeder dieser Eckpunkte gehört einem der $(n-3)$-Vielecke an.

15. Besonderes Interesse bieten diese zwei Kategorien von Systemringen bei unseren zwei ausgezeichneten Vielecken, dem zentralen $2n$-Eck und dem merkwürdigen $3n$-Eck. Namentlich lohnt es sich, die Frage aufzuwerfen, welcher Art die Vielecke sind, die diesen Systemringen angehören, wenn das Ausgangsvieleck ein zentrales $2n$-Eck oder ein merkwürdiges $3n$-Eck ist. Ist $A_h - A_l$ ein Diagonalpunktpaar eines zentralen $2n$-Ecks $A_1 A_2 \ldots A_h \ldots A_l \ldots A_{2n} A_1$ mit einem Wendepunkt w als Zentrum, so ist die n^{te} Unterordnung dieses Punktpaares, $A_{n+h} - A_{n+l}$, gleichnetzig mit $A_h - A_l$; denn es schneiden sich nach Voraussetzung, derzufolge das gegebene Vieleck ein zentrales ist, $A_h A_{n+h}$ und $A_l A_{n+l}$ in dem Wendepunkt w. Daraus ergibt sich aber auch die Art der Gleichnetzigkeit: $A_h - A_l$ ist perspektivisch zu $A_{n+h} - A_{n+l}$. Die zu den Systemringen der Diagonalpunktpaare gehörigen Vielecke sind also wieder zentrale $2n$-Ecke. — Ebenso einfach ist der Nachweis, daß auch die zweite Kategorie von Vielecken zentrale $2n$-Ecke sind, z. B. das Vieleck $A_{1,k} A_{2,k+1} \ldots A_{2n,k+2n-1}$.

Ein Blick auf die Figur 6 zeigt, daß, da $A_1 A_{n+1}$ und $A_k A_{n+k}$ sich in dem Wendepunkt w schneiden, auch die Linie der dritten Schnittpunkte, $A_{1,k} A_{n+1,n+k}$, durch diesen Wendepunkt gehen muß. Also hat das Vieleck $A_{1k} A_{2k+1} \ldots$ die Eigenschaft, daß ein Eckpunkt desselben, $A_{1,k}$ und seine n^{te} Unterordnung $A_{n+1,n+k}$ auf einer Geraden liegen, die durch w geht. Alle diese $(n-3)$ Vielecke, $A_{1,3} \ldots$, $A_{1,4} \ldots$, $\ldots A_{1,k} \ldots$, $\ldots A_{1,n-1} \ldots$, sind also wieder zentrale Vielecke mit w als Zentrum.

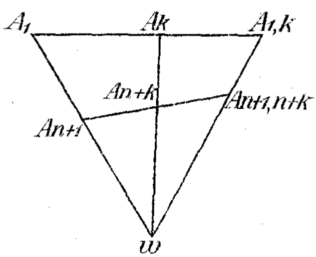

Fig. 6.

15a) Es liegt die Frage nahe, was für einem Vieleck der dritte Schnittpunkt derjenigen Linie angehört, die nicht zwei Eckpunkte eines und desselben Vielecks verbindet, sondern zweier beliebiger zentraler $2n$-Ecke. Die zwei Vielecke seien $A_1 A_2 \ldots A_k \ldots A_{2n} A_1$ und $B_1 B_2 \ldots B_l \ldots B_{2n} B_1$, ihre Zentren resp. die Wendepunkte w und w', der dritte Wendepunkt auf der Geraden ww' sei w''. Verbinden wir nun A_k mit B_l und ist der dritte Schnittpunkt von $A_k B_l$ mit der C_3 der Punkt C_m, so ist leicht zu erkennen, daß C_m wieder Eckpunkt eines zentralen $2n$-Ecks ist, dessen Zentrum der Punkt w'' ist. Zeichnen wir nämlich die n^{ten} Unterordnungen zu A_k, B_l, C_m, resp. A_{n+k}, B_{n+l}, C_{n+m}, so ist klar, daß diese drei Punkte auch wieder auf einer Geraden liegen, da die Tangentialpunkte dreier Punkte einer C_3, die auf einer Geraden liegen, auch wieder Punkte einer Geraden sind, also auch die n^{ten} Unmit C_m und w'' in einer Geraden. C_m gehört also einem zentralen $2n$-Eck mit dem Zentrum w'' an. Da somit die Verbindung zweier zentraler $2n$-Ecke wieder ein zentrales $2n$-Eck ergibt, so muß umgekehrt die Verbindung eines zentralen und eines nicht zentralen $2n$-Ecks ein nicht zentrales $2n$-Eck ergeben.

Der eben bewiesene Satz läßt noch eine interessante Verallgemeinerung zu, die sich so aussprechen läßt: Verbindet man einen Eckpunkt eines zentralen $2(2p+1)$-Ecks mit einem Eckpunkt eines zentralen $2(2q+1)$-Ecks, wo q und p irgendwelche positive ganze Zahlen sind, so ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der C_3 Eckpunkt eines zentralen $2s$-Ecks, wenn s das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu $(2p+1)$ und $(2q+1)$ ist. Sind die Zentren des $2(2p+1)$-Ecks und des $2(2q+1)$-Ecks resp. w und w', dann ist das Zentrum des $2s$-Ecks der Punkt w'', wenn w, w', w'' auf einer Geraden liegen. Der Beweis dieses Satzes ist genau derselbe, wie im vorigen Falle, wenn nur die n^{ten} Unterordnungen der Punkte A_k, B_l, C_m durch die s^{ten} Unterordnungen ersetzt werden. Es ist dabei zu bedenken, daß, da s ein ungerades Vielfaches von $(2p+1)$ und $(2q+1)$ ist, die s^{te} Unterordnung von A_k mit der $(2p+1)^{\text{ten}}$ Unterordnung dieses Punktes, ebenso die s^{te} Unterordnung des Punktes B_l mit der $(2q+1)^{\text{ten}}$ Unterordnung desselben identisch ist.

15 *b*) Es liegt nun die Frage nahe, was sich ergibt, wenn wir zwei zentrale Vielecke miteinander verbinden, deren Eckpunktzahl gegeben ist durch resp. $2\alpha = p\,2^a$ und $2\beta = n\,2^{a+b}$, wo p und n ungerade Zahlen, a und b beliebige ganze Zahlen $> o$ sind. Das eine Vieleck heiße $A_1 A_2 \ldots A_{\alpha+1} \ldots A_{2\alpha} A_1$, das andere $B_1 B_2 \ldots B_{\beta+1} \ldots B_{2\beta} B_1$; dann ist die Bedingung dafür, daß die Verbindungslinien $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ mit ihren dritten Schnittpunkten mit der C_3, C_1, $C_2 \ldots$ wieder ein zentrales Vieleck liefern, die, daß in der Reihe dieser Verbindungslinien, $A_1 B_1$, $A_2 B_2 \ldots$, auch die Linie $A_{\alpha+1} B_{\beta+1}$ sich findet, d. h., daß nach gleich vielen Unterordnungen von A_1 und B_1 aus die Punkte $A_{\alpha+1}$ und $B_{\beta+1}$ erreicht werden. Denn die Verbindungslinien $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ liefern mit ihren dritten Schnittpunkten ein Punktpaar $C_1 - C_2$, das ein Tripelpunktpaar zu $A_1 - A_2$ und $B_1 - B_2$ ist. Nun ist $A_{\alpha+1} - A_{\alpha+2}$ perspektivisch zu $A_1 - A_2$; ebenso $B_{\beta+1} - B_{\beta+2}$ perspektivisch zu $B_1 - B_2$; also wird auch das Punktpaar der dritten Schnittpunkte zu $A_{\alpha+1} B_{\beta+1}$ und $A_{\alpha+2} B_{\beta+2}$, wir wollen es $C_{m+1} - C_{m+2}$ heißen, perspektivisch zu $C_1 - C_2$ sein. Finden sich also in der Reihe der Linien $A_1 B_1$, $A_2 B_2 \ldots$ diese Linien $A_{\alpha+1} B_{\beta+1}$, $A_{\alpha+2} B_{\beta+2}$, dann wird das Vieleck $C_1 C_2 \ldots C_{m+1} C_{m+2} \ldots$ ein zentrales sein, da ja $C_1 - C_2$ und $C_{m+1} - C_{m+2}$ perspektivisch sind. Nun wird der Punkt $A_{\alpha+1}$ von A_1 aus nach α, 3α, 5α, ... $(2q+1)\,\alpha$ Unterordnungen erreicht; der Punkt $B_{\beta+1}$ ebenso nach β, 3β, terordnungen. Nun bilden die drei Geraden $A_k B_l C_m$, $w w' w''$,

$A_{n+k}\, B_{n+l}\, C_{n+m}$ eine zerfallene C_3; diese bildet mit der gegebenen C_3 einen Kurvenbüschel, dessen Basispunkte die 9 Schnittpunkte der 3 Geraden sind: A_k, B_l, C_m, w, w', w'', A_{n+k}, $B_{n+l}\, C_{n+m}$. Nach Voraussetzung aber, der zufolge $A_1 A_2 \ldots$ und $B_1 B_2 \ldots$ zentrale Vielecke sind, liegen auch A_k, w und A_{n+k} auf einer Geraden, ebenso auch B_l, w' und B_{n+l}. Also bilden die drei Geraden $A_k\, w\, A_{n+k}$, $B_l\, w'\, B_{n+l}$, $C_m w''$ wieder einen Kurvenbüschel mit der C_3, mit den 8 Basispunkten A_k, w, A_{n+k}, B_l, w, B_{n+l}, C_m, w''. Da diese 8 Punkte aber auch Basispunkte des erstgenannten Büschels sind, so sind diese Büschel identisch, haben also auch den 9ten Basispunkt, C_{n+m}, gemeinsam. Dieser 9. Basispunkt muß aber auch auf der 3. Geraden $C_m w''$ liegen, die mit den Geraden $A_k w A_{n+k}$ und $B_l w' B_{n+l}$ zusammen eine Kurve des Büschels bildet. Also: die n^{te} Unterordnung von C_m, C_{n+m}, liegt $5\beta \ldots (2r+1)\beta$ Unterordnungen. — Nach 2α, 4α, ... Unterordnungen kommt man wieder zu A_1 zurück, ebenso nach 2β, 4β ... Unterordnungen von B_1 aus wieder nach B_1. — Ist nun das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu $\alpha = p.2^{a-1}$ und $\beta = n.2^{a+b-1}$ $\gamma = s.2^{a+b-1}$, wo natürlich, ebenso wie p und n, auch s eine ungerade Zahl ist, so ist, da nach Voraussetzung $b \geqq 1$ ist, α eine gerade Anzahl von Malen in γ enthalten, dagegen β eine ungerade Anzahl von Malen; niemals kann also die Gleichung bestehen: $(2q+1)\alpha = (2r+1)\beta$, wo q und r irgend welche positive ganze Zahlen sind. Die Existenz einer solchen Gleichung wäre aber die Bedingung dafür, daß nach gleich vielen Unterordnungen resp. von A_1 und von B_1 aus ein Zusammentreffen von $A_{\alpha+1}$ mit $B_{\beta+1}$ stattfinden und die Verbindungslinie $A_{\alpha+1}\, B_{\beta+1}$ sich ergeben würde. Wir sehen also: Zwei zentrale Vielecke liefern durch ihre Verbindung beliebige, aber nicht zentrale Vielecke, wenn ihre Eckpunktzahlen den Faktor 2 in verschiedener Häufigkeit enthalten. Ebenso ist ohne weiteres klar, daß ein beliebiges nicht zentrales p-Eck und ein beliebiges zentrales $2n$-Eck im allgemeinen nicht wieder ein zentrales Vieleck geben.

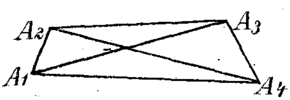

Fig. 7.

16. Wir wollen nun die Systemringe und zugehörigen Vielecke erörtern, die durch ein merkwürdiges $3n$-Eck $A_1 A_2 \ldots A_{3n} A_1$ veranlaßt werden; zunächst die Systemringe der Diagonalpunktpaare. Wir haben schon in 13. gesehen, daß diese Punktpaare wieder Systemringen n^{ter} Ordnung und zweiter Art angehören. Die zugehörigen Vielecke sind also entweder einfache n-Ecke oder merkwürdige $3n$-Ecke. Ich will nun zeigen, daß es eine Gruppe von Diagonalpunktpaaren gibt, die n-Ecke liefert, während alle anderen $3n$-Ecke ergeben.

Sind A_1, A_2, A_3, A_4 (Fig. 7) aufeinanderfolgende Punkte unseres $3n$-Ecks und gehört $A_1 - A_2$ dem System S_1 des dem Vieleck zu Grunde liegenden Systemringes $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$ an, $A_2 - A_3$

dem untergeordneten System S_2, u. s. w., so ist $A_1 - A_3$ ebenfalls ein Punktpaar von S_1, weil $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ aufeinanderfolgende Tangenten sind (s. Einleitung II); die Unterordnung von $A_1 - A_3$ ist $A_2 - A_4$; dieses Punktpaar gehört somit dem System S_2 an. Nun ist das erste Tripelsystem (s. Einleitung III), das zu S_1 und S_2 gehört, S_1 selbst, da in dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ $A_1 - A_3$, wie eben erwähnt, S_1 angehört, während $A_1 - A_2$ und $A_2 - A_3$ beziehungsweise Punktpaare von S_1 und S_2 sind. Das zweite Tripelsystem zu S_1 und S_2, S'_1, wird durch das Dreieck $A_1 A_2 A_4$ gegeliefert, welches $A_1 - A_2$ mit dem Dreieck $A_1 A_2 A_4$ gemeinsam hat, während $A_2 - A_4$ das andere zu A_2 gehörige Punktpaar von S_2 ist (s. Einleitung III a); also gehört $A_1 - A_4$ dem zweiten Tripelsystem zu S_1 und S_2, S'_1, an. Bestimmt man nun die zwei zu dem Wendepunkt w gehörigen Punktpaare von S_1, $w - \mathfrak{A}_1$ und $w - \mathfrak{A}'_1$ (s. Fig. 8), so ist $\mathfrak{A}'_1$ der dritte Schnittpunkt von $w\mathfrak{A}_1$ mit der C_3, wie man sofort erkennt, wenn man $w - \mathfrak{A}_1$ von dem w unendlich benachbarten Punkte aus projiziert: der Wendepunkt w projiziert sich in sich selbst und $\mathfrak{A}_1$ projiziert sich in den dritten Schnittpunkt von $w\mathfrak{A}_1$. Zeichnet man nun zu $\mathfrak{A}_1$ die Reihe der Unterordnungspunkte, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ u. s. w., so ist leicht zu erkennen, daß das Vieleck $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 \ldots$ ein einfaches n-Eck ist. Da nämlich sämtliche Unterordnungen des Wendepunktes w mit w selbst zusammenfallen, ist die Reihe der Unterordnungen von $w - \mathfrak{A}_1$ $w - \mathfrak{A}_2$, $w - \mathfrak{A}_3$ u. s. w., ebenso die Reihe der Unterordnungen von $w - \mathfrak{A}'_1$ $w - \mathfrak{A}'_2$, $w - \mathfrak{A}'_3$ u. s. w. Die n^{te} Unterordnung von $w - \mathfrak{A}_1$ ist $w - \mathfrak{A}_{n+1}$. Nun ist der Systemring $S_1 S_2 \ldots S_n S_1$, dem $w - \mathfrak{A}_1$ angehört, n^{ter} Ordnung und zweiter Art; daraus folgt, daß $w - \mathfrak{A}_{n+1}$ mit $w - \mathfrak{A}_1$ gleichnetzig ist, und zwar so, daß $\mathfrak{A}_{n+1}$ und $\mathfrak{A}_1$ von derselben Art sind. Da aber die einzigen zwei zu w gehörigen Punktpaare von S_1 $w - \mathfrak{A}_1$ und $w - \mathfrak{A}'_1$ sind, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'_1$ aber verschiedener Art sind, so muß $\mathfrak{A}_{n+1}$ mit $\mathfrak{A}_1$ zusammenfallen. Es ist nun leicht zu beweisen, daß dieses n-Eck $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n \mathfrak{A}_1$ ein Vieleck des Systemringes $S'_1 S'_2 \ldots S'_n S_1$ ist, von dem, wie wir sahen, $A_1 - A_4$ ein Punktpaar ist. Das ergibt sich aus der Betrachtung der Dreiecke $\mathfrak{A}_1 w \mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_1 w \mathfrak{A}'_2$, welche ganz ähnlich der vorhin angestellten Betrachtung der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $A_1 A_2 A_4$ ist. Die beiden Dreiecke (s. Fig. 8) haben das dem System S_1 zugehörigen Punktpaare $w - \mathfrak{A}_1$ gemeinsam; $w - \mathfrak{A}_2$ und $w - \mathfrak{A}'_2$ sind gleichnetzig und gehören dem System S_2 an; also sind wieder $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}'_2$ Punktpaare je eines der beiden Tripelsysteme von S_1 und S_2. Da nun $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}'_2$ ein Punktpaar von S_1 ist, da dieses Punktpaar die Projektion von $w - \mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}_2$ aus ist, so gehört das andere Punktpaar, $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2$, dem zweiten Tripelsystem, S'_1,

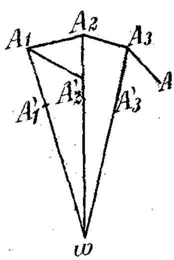

Fig. 8.

an. Wir sehen also: das Diagonalpunktpaar $A_1 - A_4$ unseres $3n$-Ecks $A_1 A_2 \dots A_{3n} A_1$ gehört einem Systemring $S_1' S_2' \dots$ an, dessen Vielecke einfache n-Ecke sind. Betrachten wir nun das Dreieck $A_1 A_4 A_7$ und die drei zugehörigen Punktpaare $A_1 - A_4$, $A_4 - A_7$, $A_1 - A_7$, so sehen wir: $A_1 - A_4$ gehört dem System S_1' an, $A_4 - A_7$ der dritten Unterordnung von S_1', S_4', und $A_1 - A_7$ einem der zwei Tripelsysteme von S_1' und S_4', S_4''. Ich will nun beweisen, daß auch der Systemring $S_1'' S_2'' \dots S_n''$, dem das Punktpaar $A_1 - A_7$ angehört, n-Ecke liefert. Hat man zwei der C_3 um- und einbeschriebene n-Ecke, $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ und $B_1 B_2 \dots B_n B_1$, die beziehungsweise den Systemringen $S_1 S_2 \dots S_n S_1$ und $T_1 T_2 \dots T_n T_1$ angehören, und zeichnen wir die Linien $A_1 B_1$ mit dem dritten Schnittpunkt C_1 und $A_2 B_2$ mit dem dritten Schnittpunkt C_2, so gehört das Punktpaar $C_1 - C_2$ dem einen Tripelsystem zu S_1 und T_1, R_1, an. Es ist nun klar, daß, wenn man ebenso $A_3 B_3$ mit dem dritten Schnittpunkte C_3, $A_4 B_4$ mit dem dritten Schnittpunkte C_4 u. s. w. konstruiert, $C_1 C_2 C_3 \dots$ wieder ein n-Eck wird, das dem Tripelsystemring $R_1 R_2 \dots R_n R_1$ angehört. — Die Bedeutung des Wortes „Tripelsystemring" ergibt sich aus dem Zusammenhang von selber. Projizieren wir nun $B_1 B_2 \dots B_n B_1$ von einem Wendepunkt w aus und erhalten wir das Vieleck $b_1 b_2 \dots b_n b_1$, dann ist $b_1 - b_2$ gleichnetzig mit $B_1 - B_2$; aber wenn B_1 Nullpunkt ist, dann ist b_1 Eckpunkt; wenn B_2 Nullpunkt ist, ist b_2 Eckpunkt. Bringt man also statt der Vielecke $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ und $B_1 B_2 \dots B_n B_1$ die Vielecke $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ und $b_1 b_2 \dots b_n b_1$ in Verbindung, indem man wieder die Geraden $A_1 b_1$, $A_2 b_2 \dots$ zieht, so erhält man an Stelle des Vielecks $C_1 C_2 \dots C_n C_1$ ein Vieleck $C_1' C_2' \dots C_n'$ und es ist klar, daß $C_1' - C_2'$ dem zweiten zu S_1 und T_1 gehörigen Tripelsystem, R_1', angehört. Da dieses Vieleck $C_1' C_2' \dots C_n' C_1'$, weil entstanden aus der Verbindung zweier n-Ecke, offenbar auch wieder ein n-Eck ist, so können wir den Satz aussprechen: liefern zwei Systemringe $S_1 \dots S_n$ und $T_1 \dots T_n$ einfache n-Ecke und greift man irgend ein System aus jedem der zwei Ringe heraus, beziehungsweise S_1 und T_1, und bildet die zwei zu diesen Systemen gehörigen Tripelsysteme, R_1 und R_1', so sind das ebenfalls Systeme von Ringen n^{ter} Ordnung, $R_1 R_2 \dots R_n R_1$ und $R_1' R_2' \dots R_n' R_1'$, und die zugehörigen Vielecke sind ebenfalls einfache n-Ecke. — Machen wir von dieser Erkenntnis die Anwendung auf das Dreieck $A_1 A_4 A_7$, so sehen wir, $A_1 - A_7$ liefert, weil einem der Tripelsysteme, S_1'', zu $A_1 - A_4$ und $A_4 - A_7$ angehörig, ebenfalls einfache n-Ecke. So kann man nun fortfahren und die ganze Reihe der Dreiecke $A_1 A_7 A_{10}$, $A_1 A_{10} A_{13}$, $A_1 A_{13} A_{16} \dots$ einer ähnlichen Betrachtung unterziehen. In $A_1 A_7 A_{10}$ zum Beispiel liefert, wie wir eben bewiesen haben, $A_1 - A_7$ einfache n-Ecke, $A_7 - A_{10}$ ist die 6. Unterordnung von $A_1 - A_4$, liefert also ebenfalls einfache n-Ecke, also liefert das Tripelpunktpaar $A_1 - A_{10}$ ebenfalls einfache n-Ecke.

Also: die Diagonalpunktpaare $A_1 - A_4$, $A_1 - A_7$, $A_1 - A_{10} \ldots A_1 - A_{3n-2}$ gehören Ringsystemen an, die einfache n-Ecke liefern. Man kann das auch so ausdrücken: A_1 verbunden mit allen den Punkten A_k, deren Ordnungszahl k der Kongruenz genügt: $k \equiv 1 \pmod 3$, liefert Diagonalpunktpaarsysteme mit einfachen n-Ecken. Betrachten wir nun das Dreieck $A_1 A_3 A_6$, so sehen wir: $A_1 - A_3$ ist ein Punktpaar von S_1, veranlaßt also $3n$-Ecke; $A_3 - A_6$ ist die zweite Unterordnung von $A_1 - A_4$, einem Punktpaar von S_1', liefert also einfache n-Ecke. Wenn aber die drei Punktpaare eines der C_3 einbeschriebenen Dreiecks Systemringen n^{ter} Ordnung angehören, resp. A, B und C und der Ring A $3n$-Ecke liefert, B aber einfache n-Ecke, dann muß C auch $3n$-Ecke liefern. Denn der Ring A ist ein Tripelring zu B und C. Also müssen sich seine Vielecke durch Kombination der Vielecke von B und C ergeben. Aber ein $3n$-Eck kann sich niemals aus der Kombination zweier einfacher n-Ecke ergeben. Wenn also A $3n$-Ecke, B einfache n-Ecke ergibt, muß C $3n$-Ecke enthalten. Dieses, angewandt auf unser Dreieck $A_1 A_3 A_6$, ergibt, daß der Systemring, dem $A_1 - A_6$ angehört, $3n$-Ecke liefern muß, weil der Systemring $(A_1 - A_3)$ $3n$-Ecke und der Systemring $(A_3 - A_6)$ einfache n-Ecke enthält. — „Systemring $(A_p - A_q)$" heiße der Ring, dem das Punktpaar $A_p - A_q$ angehört. — Dieselbe Betrachtung läßt sich nun auch mit dem Dreieck $A_1 A_6 A_9$ anstellen und führt zu dem Ergebnis, daß der Ring $(A_1 - A_9)$ ebenfalls $3n$-Ecke enthält. Also: die Diagonalpunktpaare $A_1 - A_3$, $A_1 - A_6 \ldots$ liefern $3n$-Ecke; oder: A_1 verbunden mit allen den Punkten A_l, deren Ordnungszahl l durch 3 ohne Rest teilbar ist, liefert Diagonalpunktpaare, deren Systemringe $3n$-Ecke enthalten. Betrachten wir nun noch das Dreieck $A_1 A_4 A_5$, so erkennen wir: $A_1 - A_4$ liefert einfache n-Ecke; $A_4 - A_5$, die dritte Unterordnung von $A_1 - A_2$, liefert $3n$-Ecke, also enthält der Ring $(A_1 - A_5)$ $3n$-Ecke. Dieselbe Betrachtung läßt sich mit den Dreiecken $A_1 A_5 A_8$, $A_1 A_8 A_{11} \ldots$ anstellen. In $A_1 A_5 A_8$ z. B. liefert, wie wir eben gesehen haben, $A_1 - A_5$ $3n$-Ecke; $A_5 - A_8$ ist die vierte Unterordnung von $A_1 - A_4$, liefert also n-Ecke; also ergibt der Ring $(A_1 - A_8)$ wieder $3n$-Ecke. Wir kommen so zu dem Ergebnis: die Diagonalpunktpaare $A_1 - A_5$, $A_1 - A_8$, $A_1 - A_{11} \ldots$ liefern $3n$-Ecke. Man erhält alle diese Diagonalpunktpaare, wenn man A_1 mit allen Punkten A_m verbindet, deren Ordnungszahl m der Kongruenz genügt: $m \equiv 2 \pmod{3}$; die Punkte A_k, A_l, A_m, die den genannten Kongruenzen genügen, ergeben aber sämtliche Vieleckspunkte. Es ist also gezeigt, daß außer einer Gruppe von Diagonalpunktpaaren, der Gruppe $A_1 - A_4$, $A_1 - A_7 \ldots A_1 - A_{3n-2}$, alle übrigen $3n$-Ecke ergeben.

Einfacher, wie die Frage nach den Vielecken, die von den Diagonalpunktpaaren veranlaßt werden, erledigt sich die Untersuchung der Vielecke der dritten Diagonalschnittpunkte. Betrachten wir wieder das merkwürdige $3n$-Eck

$$A_1\, A_2 \,..\, A_k\, A_{k+1} \,...\, A_n\, A_{n+1} \,..\, A_{n+k}\, A_{n+k+1} \,..\, A_{2n}\, A_{2n+1} \,..\,..\, A_{2n+k}\, A_{2n+k+1} \,..\, A_{3n}\, A_1$$

und zeichnen $A_{1,k}$, den dritten Schnittpunkt der Diagonale $A_1 A_k$ mit der C_3; der Tangentialpunkt dieses Punktes ist $A_{2,k+1}$, der dritte Schnittpunkt von $A_2 A_k$, die n^{te} Unterordnung $A_{n+1,n+k}$, die $2n^{te}$ Unterordnung $A_{2n+1,2n+k}$; die $3n^{te}$ Unterordnung, $A_{3n+1,3n+k}$, ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie von A_{3n+1} und A_{3n+k}; aber A_{3n+1} ist identisch mit A_1, A_{3n+k} identisch mit A_k; also auch $A_{3n+1,3n+k}$ identisch mit $A_{1,k}$. Wir haben es also wieder mit einem $3n$-Eck zu tun, vorausgesetzt, daß nicht je drei Eckpunkte in einen Punkt zusammenfallen, z. B. $A_{p,k+p-1}$, $A_{n+p,n+k+p-1}$, $A_{2n+p,2n+k+p-1}$, wobei p irgend eine Zahl zwischen 1 und n bedeutet. Nehmen wir an, es sei ein $3n$-Eck, so ist aus Fig. 9 leicht zu erkennen, daß es ein merkwürdiges $3n$-Eck ist. Denn $A_k - A_{n+k}$ ist die $(k-1)^{te}$ Unterordnung von $A_1 - A_{n+1}$ und gehört ebenso wie $A_1 - A_{n+1}$ dem ausgezeichneten System Σ an; dann ist aber das Tripelpunktpaar $A_{1,k} - A_{n+1,n+k}$ ebenfalls ein Punktpaar von Σ, weil zwei Punktpaare eines Systems entweder perspektivisch liegen oder ein Punktpaar der Unterordnung ergeben, welche in diesem Falle wieder mit Σ zusammenfällt. Wenn die Punktpaare $A_1 - A_{n+1}$ und $A_k - A_{n+k}$ perspektivisch liegen würden, dann würde der Fall eintreten, daß $A_{1,k}$, $A_{n+1,n+k}$ und $A_{2n+1,2n+k}$ zusammenfallen würden und ein einfaches n-Eck entstünde. Aber in 13) haben wir gezeigt, daß ein Punktpaar eines Systems Σ und die sämtlichen zugehörigen Unterordnungen derselben Punktpaarmannigfaltigkeit angehören, also nicht perspektivisch liegen. Da nun das Vieleck die Diagonalpunktpaare $A_{1,k} - A_{n+1,n+k}$, $A_{2,k+1} - A_{n+2,n+k+1}$, $A_{3,k+2} - A_{n+3,n+k+2} \ldots$ hat, welche Punktpaare von Σ sind, so ist es ein merkwürdiges $3n$-Eck, das demselben System Σ angehört, wie das Ausgangsvieleck.

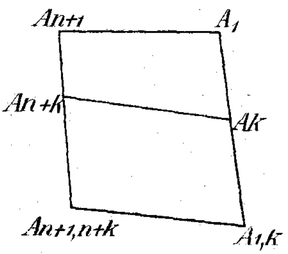

Fig. 9.

16 a) Die Vollständigkeit erfordert eine kurze Erläuterung der Frage, was für ein Vieleck entsteht, wenn man irgend ein um- und einbeschriebenes p-Eck $A_1\, A_2 \ldots A_p\, A_1$ mit einem merkwürdigen $3n$-Eck $B_1\, B_2 \ldots B_{3n}\, B_1$ verbindet; ob namentlich ein solches Vieleck $C_1\, C_2 \ldots$, dessen Eckpunkte C_1, $C_2 \ldots$ resp. die dritten Schnittpunkte von $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, .. mit der C_3 sind, auch wieder ein merkwürdiges Vieleck ist, oder nicht. Daß das erstere der Fall ist, geht aus folgender Überlegung hervor: es ist klar, daß bei dem Vieleck $A_1 \ldots A_p\, A_1$ die p^{te} Unterordnung von A_1

wieder mit A_1 zusammenfällt, ebenso auch die pq^{te} Unterordnung, wenn q irgend eine ganze Zahl ist; desgleichen ist auch, wenn r ebenfalls eine ganze Zahl ist, die $3nr^{\text{te}}$ Unterordnung von B_1 in dem $3n$-Eck $B_1 \ldots B_{3n} B_1$ identisch mit B_1. Ist nun $pq = 3s = 3nr$ und ist $3s$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu p und $3n$, überdies p nicht durch 3 teilbar, dann ist das Vieleck $C_1 C_2 \ldots$ ein $3s$-Eck: nach $3s$-maliger Unterordnung der Geraden $A_1 B_1 C_1$, und nicht früher, ergibt sich wieder diese Gerade. Ist nämlich p nicht durch 3 teilbar, dann muß q diesen Faktor enthalten. Es sei $q = 3q'$, dann ist $p.3q' = 3s$; also $pq' = s$; ebenso ist $3nr = 3s$, also $nr = s$; folglich $pq' = nr$. Daraus folgt aber, daß man nach pq'-maliger Unterordnung der Geraden $A_1 B_1$ zu einer Geraden $A_1 B_{rn+1}$ kommt; denn die pq'^{te} Unterordnung von A_1 ist, wie schon erwähnt, wieder A_1; die nr^{te} Unterordnung von B_1 anderseits ergibt einen Punkt B_{rn+1}, der entweder mit B_{n+1} oder mit B_{2n+1} zusammenfallen muß; mit B_{3n+1} oder B_1 kann er nicht zusammenfallen, da ja $3s$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von p und $3n$ ist, also erst nach $3s$-maliger Unterordnung die Gerade $A_1 B_1$ wieder erreicht werden kann. Nun sind aber in dem $3n$-Eck $B_1 B_2 \ldots B_{3n} B_1$ $B_1 - B_2$, $B_{n+1} - B_{n+2}$, $B_{2n+1} - B_{2n+2}$ gleichnetzig mit gleicher Art der Berührungspunkte B_1, B_{n+1}, B_{2n+1}; also liefern die Linienpaare $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, $A_1 B_{n+1}$ und $A_2 B_{n+2}$, $A_1 B_{2n+1}$ und $A_2 B_{2n+2}$ mit ihren dritten Schnittpunkten auch wieder drei gleichnetzige Punktpaare $C_1 - C_2$, $C_{s+1} - C_{s+2}$, $C_{2s+1} - C_{2s+2}$; aber das bloße Vorhandensein zweier von diesen letztgenannten drei gleichnetzigen Punktpaaren ist schon ein Beweis dafür, daß $C_1 C_2 \ldots$ ein merkwürdiges $3s$-Eck ist.

Anders verhält sich die Sache, wenn p durch 3 teilbar ist. Wir haben in 13) gesehen, daß sämtliche merkwürdigen Vielecke, die zu einem System Σ gehören, in zwei Kategorien sich teilen. Ich habe schon dort festgestellt, daß ein merkwürdiges $3n$-Eck der ersten Kategorie und ein solches der zweiten ein einfaches n-Eck ergeben. In derselben Weise läßt sich zeigen, daß ein merkwürdiges $3n$-Eck der ersten Kategorie und ein merkwürdiges $3p$-Eck der zweiten, wenn p und n von einander verschiedene positive ganze Zahlen sind, ein einfaches s-Eck liefern, wenn s das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu p und n ist.

Eine zweite Ausnahme macht offenbar das gewöhnliche, nicht merkwürdige $3p$-Eck. Verbinden wir ein solches, $A_1 A_2 \ldots A_{3p} A_1$, mit dem merkwürdigen $3n$-Eck $B_1 \ldots B_{3n} B_1$ und ist wieder $3s$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu $3n$ und $3p$, so daß $3nr = 3pq = 3s$ ist, also $nr = pq = s$. Dann wird nach pq-maliger Unterordnung der Geraden $A_1 B_1$ die Gerade $A_{qp+1} B_{rn+1}$ erreicht werden, wo q entweder $= 1$ oder $= 2$ ist, ebenso r. Wir wollen annehmen, es bedeuten beide Buchstaben dieselbe Zahl, also entweder beide 1 oder beide 2. Sind nun $A_{p+1} - A_{p+2}$ und $A_{2p+1} - A_{2p+2}$ nicht gleichnetzig mit $A_1 - A_2$, dann wird auch

$C_{s+1} - C_{s+2}$ und $C_{2s+1} - C_{2s+2}$, die Tripelpunktpaare zu resp. $A_{p+1} - A_{p+2}$, $B_{n+1} - B_{n+2}$ und $A_{2p+1} - A_{2p+2}$, $B_{2n+1} - B_{2n+2}$ nicht gleichnetzig mit $C_1 - C_2$, dem Tripelpunktpaar zu $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$. also $C_1 C_2 \ldots$ kein merkwürdiges Vieleck sein. Der Beweis erleidet keine wesentliche Veränderung, wenn wir annehmen, A_{qp+1} sei $= A_{2p+1}$ und $B_{rn+1} = B_{1n+1}$ oder umgekehrt, $A_{qp+1} = A_{p+1}$ und $B_{rn+1} = B_{2n+1}$.

17. Ich will zum Schlusse noch die Diagonalpunktpaare eines nicht zentralen $2n$-Ecks einer kurzen Betrachtung unterziehen. Das Vieleck heiße $C_1 C_2 \ldots C_{2n} C_1$. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß das Diagonalpunktpaar $C_1 - C_{n+1}$ ein Punktpaar eines Systemringes 1. Art ist, der zentrale $2n$-Ecke enthält. Es sei $c_1 - d_1$ gleichnetzig und perspektivisch zu $C_1 - C_{n+1}$, gehöre also nicht derselben Punktpaarmannigfaltigkeit des Systems an, wie $C_1 - C_{n+1}$; dann sind auch die 1., 2., ... n^{ten} Unterordnungen dieser Punktpaare wieder perspektivisch. Nun ist die n^{te} Unterordnung von $C_1 - C_{n+1}$ $C_{n+1} - C_1$, die von $c_1 - d_1$ sei $c_{n+1} - d_{n+1}$; also sind $C_{n+1} - C_1$ und $c_{n+1} - d_{n+1}$ perspektivisch; dann sind $C_1 - C_{n+1}$ und $c_{n+1} - d_{n+1}$ nicht perspektivisch, sondern gehören derselben Punktpaarmannigfaltigkeit an, es sei dies die Mannigfaltigkeit I; da sodann das zu $C_1 - C_{n+1}$ perspektivische Punktpaar $c_1 - d_1$ der Mannigfaltigkeit II angehört, so sind $c_1 - d_1$ und die n^{te} Unterordnung $c_{n+1} - d_{n+1}$ perspektivisch zu einander, also ist der Systemring $(C_1 - C_{n+1})$ nach 2) Anm. 1. ein Systemring 1. Art, enthält also zentrale $2n$-Ecke.

Es hat, um auch diesen Punkt noch kurz zu berühren, keine Schwierigkeit, die Vielecke der anderen Diagonalpunktpaares eines nicht zentralen $2n$-Ecks auf ihre Art zu prüfen. Nehmen wir an, $C_1 - C_{k+1}$ wäre ein zweites Diagonalpunktpaar, das einem Systemring 1. Art angehört, dann müßte also $C_{n+1} - C_{n+k+1}$ gleichnetzig und perspektivisch mit $C_1 - C_{k+1}$ sein, also $C_1 C_{n+1}$ und $C_{k+1} C_{n+k+1}$ sich in demselben Punkte B_1 der C_3 schneiden. Nun haben wir gesehen — s. Anmerkung am Ende von 9 a) —, daß zu einem nicht zentralen $2n$-Eck $C_1 C_2 \ldots C_{2n} C_1$ ein „begleitendes" n-Eck, $B_1 B_2 \ldots B_n B_1$ gehört; von diesem n-Eck ist also in unserem Falle der dritte Schnittpunkt von $C_1 C_{n+1}$, B_1, ein Eckpunkt. Anderseits muß die k^{te} Unterordnung der Diagonale $C_1 C_{n+1}$, $C_{k+1} C_{n+k+1}$, auch die k^{te} Unterordnung von B_1, B_{k+1}, ausschneiden. Da nun die Voraussetzung, daß $C_1 - C_{k+1}$ einem Systemring 1. Art angehört, zur Folge hat, daß $C_1 C_{n+1}$ und $C_{k+1} C_{n+k+1}$ sich in demselben Punkte der C_3 schneiden, so muß B_{k+1} identisch mit B_1 sein, d. h. das begleitende n-Eck sich auf ein k-Eck reduzieren. Nun hat aber jedes $2n$-Eck ein begleitendes n-Eck; denn betrachten wir die Diagonale $C_1 C_{n+1} B_1$, so ist die n^{te} Unterordnung von $C_1 C_{n+1}$, $C_{n+1} C_1$, aber die Geraden $C_1 C_{n+1}$ und $C_{n+1} C_1$ decken sich, also fällt die n^{te} Unterordnung von B_1 wieder mit B_1 zusammen. Daraus folgt, daß k in n ohne Rest enthalten sein muß und daß, wenn $kp = n$ ist, unser begleitendes n-Eck ein uneigentliches n-Eck, nämlich ein p-fach zu rechnendes k-Eck ist. In der Tat kommt man ja dann nach kp Unterordnungen von B_1 wieder nach B_1 zurück. Daraus folgt: Ist n eine Primzahl, dann liefert keines der übrigen Diagonalpunktpaare außer $C_1 - C_{n+1}$ zentrale $2n$-Ecke. Ist dagegen n durch eine Zahl k teilbar und z. B. $kp = n$, dann kann es sein, daß $C_1 - C_{k+1}$ einem Systemring 1. Ar- angehört. Das wird dann der Fall sein, wenn das bet gleitende n-Eck ein p-fach zu rechnendes k-Eck ist.