Bestimmung von $d\lg\vartheta(0, 0, \dots 0)$ durch die Classenmoduln.

(Von Herrn *J. Thomae* zu Laucha a. d. Unstrut.)

In der „Theorie der *Abel*schen Functionen" §. 25 *) zeigt *Riemann*, dass $\lg\vartheta(v_1, v_2, \dots v_\mu)$ durch eine Summe von π-Functionen und $\lg\vartheta(0, 0, \dots 0)$ ausgedrückt werden kann. Zur Bestimmung letzterer Grösse durch die Classenmoduln kann man gelangen, indem man in der Gleichung

$$d\lg\vartheta = \sum_{1}^{p}{}^{(z)}_{(\mu\mu')} \frac{\partial \lg\vartheta}{\partial a_{\mu\mu'}} da_{\mu\mu'}$$

die Differentialcoefficienten durch Integrale algebraischer Functionen ausdrückt. Bei der hier folgenden Ausführung dieser Rechnung ist die *Riemann*sche Bezeichnung überall unverändert beibehalten. Zur grösseren Bequemlichkeit setzen wir noch voraus, dass ausser den sich aufhebenden Verzweigungspunkten nur einfache in T vorkommen, deren keiner mit einem unendlich fernen Punkte zusammenfällt. Mit k_1, k_2, k_3 ... bezeichnen wir diese, – die wir alle als willkürliche betrachten, obschon es hinreicht, $3p-3$, die Classenmoduln, als solche zu betrachten, — so dass $z = k_\mu$ nicht alle übereinander liegenden Punkte von T, sondern eben nur den über $z = k_\mu$ befindlichen Verzweigungspunkt bedeutet. Wir schicken noch eine Bemerkung über die Differentiation nach den Verzweigungswerthen voraus. Eine beliebige einwerthige Function s in T ist eine Wurzel einer Gleichung $G(s, z) = 0$ und daher $\frac{ds}{dk_\mu} = -\frac{\partial G}{\partial k_\mu} : \frac{\partial G}{\partial s}$. Hieraus erhellt von selbst die Einwerthigkeit von $\frac{ds}{dk_\mu}$ in T. Für $z = \infty$ werden Zähler und Nenner in gleicher Ordnung unendlich gross, also bleibt $\frac{ds}{dk_\mu}$ endlich. Für $s = \infty$ wird aber $\frac{\partial G}{\partial s}$ vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade unendlich, wenn G in Bezug auf s vom n^{ten} Grade ist, $\frac{\partial G}{\partial k_\mu}$ aber ist in Bezug auf s im allgemeinen von einem höheren Grade, so dass $\frac{ds}{dk_\mu}$, da wo s

---

*) Bd. 54, p. 151 dieses Journals, auch in besonderem Abdruck, Berlin bei *Reimer* 1857, p. 51.

unendlich wird, im allgemeinen auch unendlich wird, aber niemals von einer höhern als der zweiten Ordnung. Ausserdem kann $\frac{ds}{dk_\mu}$ nur noch da, wo $\frac{\partial G}{\partial s}$ Null wird, also in allen Verzweigungspunkten, unendlich werden. Die sich nicht aufhebenden sind unabhängig von einander, und daher kann offenbar $\frac{ds}{dk_\mu}(z=k_\nu)$ nicht unendlich werden, wenn k_ν von k_μ verschieden ist, in welchem Falle $\frac{ds}{dk_\mu}$ für $z=k_\mu$ um eine um 1 höhere Ordnung ∞ wird als s, oder wenn nicht s für $z=k_\nu$ unendlich wird, in welchem Falle $\frac{ds}{dk_\mu}$ wie s für $z=k_\nu$ unendlich wird. In den sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkten, wo $\frac{\partial G}{\partial z}$ und $\frac{\partial G}{\partial s}$ gleichzeitig verschwinden, bleibt $\frac{ds}{dk_\mu}$ endlich, wenn dort s endlich ist. Denn ist dort $s=\alpha$, $z=\zeta$, so ist

$$G = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}\overline{s-\alpha}.\overline{s-\alpha}+2\frac{\partial^2 G}{\partial s\,\partial z}\overline{s-\alpha}.\overline{z-\zeta}+\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\overline{z-\zeta}.\overline{z-\zeta}\right\}+\cdots,$$

aus welcher Form unsere Behauptung über $-\frac{\partial G}{\partial k_\mu}:\frac{\partial G}{\partial s}=\frac{ds}{dk_\mu}$ sofort erhellt.

Bei unseren ferneren Untersuchungen liegt die Zerschneidung der Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' zu Grunde, wie sie *Riemann* (§. 18, p. 143) angiebt, und die Verzweigung von T ist durch die Gleichung $F(s,z)=0$ gegeben.

Differentiiren wir das überall endliche Integral $u_\nu(s,z)=\int\frac{\varphi_\nu(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\partial z$, welches am Querschnitt $b_{\nu'}$ den Periodicitätsmodul $a_{\nu\nu'}$, bei $a_{\nu'}$ den Periodicitätsmodul Null, bei a_ν aber den Periodicitätsmodul $i\pi$ hat, nach k_μ, was unter dem Integralzeichen geschieht, so finden wir mit Rücksicht auf die oben angegebenen Regeln, dass $\frac{du_\nu(s,z)}{\partial k_\mu}$ ein Integral zweiter Gattung mit dem Periodicitätsmodul $\frac{\partial a_{\nu\nu'}}{\partial k_\mu}$ am Schnitte $b_{\nu'}$ und dem Periodicitätsmodul 0 an jedem Schnitte a_ν, $a_{\nu'}$ . . . sei und im Punkte $z=k_\mu$ unendlich gross erster Ordnung wird (*Riemann*, §. 4, p. 120).

Ein Integral zweiter Gattung, welches als Function von z_1 im Punkte $\varepsilon=(s,z)$ wie $-\frac{1}{z-z_1}$ unendlich gross wird, bringt man daher leicht in die Form

$$t\{\varepsilon,(s_1,z_1)\} = \sum_1^p{}_{(\mu)}\frac{\partial u_\nu(s_1,z_1)}{\partial k_\mu}c_{\nu\mu}-\frac{\psi(s_1,z_1)}{\chi(s_1,z_1)}\cdot\lim_{z=z_1}\frac{\chi(s_1,z_1)}{\overline{z-z_1}\,\psi(s_1,z_1)},$$

worin $\dfrac{\psi}{\chi}$ in p willkürlich gewählten Verzweigungspunkten, über die sich die Summation erstreckt, und im Punkt ε unendlich gross erster Ordnung wird. Setzen wir

$$v_\nu = u_\nu(s, z) - \sum_1^p {}_\varrho\, u_\nu(s_\varrho, z_\varrho),$$

so ist

$$(1.) \qquad \frac{\partial \lg\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial z} = \sum_1^p {}_\varrho\, t\{\varepsilon, (s_\varrho, z_\varrho)\} + C,$$

(*Riemann*, §. 25, p. 151), woraus folgt, dass $t\{\varepsilon, (s_\varrho, z_\varrho)\}$ bei b_λ den Periodicitätsmodul $\dfrac{2\varphi_\lambda(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$ besitzt. Für $z = k_\mu$ folgt hieraus, wenn $K_{\nu\mu} = \lim\limits_{z=k_\mu}\left(c_{\nu\mu}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right)$ gesetzt wird:

$$(2.) \qquad \sum_1^p {}_\varrho \frac{\partial \lg\vartheta}{\partial v_\varrho}\varphi_\varrho(z = k_\mu) = \sum_1^p {}_\varrho \frac{\partial u_\nu(s_\varrho, z_\varrho)}{\partial k_\mu} k_{\nu\mu} + C,$$

woraus durch Vergleichung der Periodicitätsmoduln noch eine Relation gezogen wird, die $da_{\nu\nu'}$ durch dk_1, dk_2, ... ausgedrückt liefert, nämlich

$$(3.) \qquad \frac{\partial a_{\nu\nu'}}{\partial k_\mu} = 2\varphi_{\nu'}(z = k_\mu) : K_{\nu\mu}$$

(confer: *Jacobi*, fundam. nova, pag. 74). Man beweist noch leicht die Identität:

$$(4.) \qquad \sum_1^p {}_\varrho \frac{\partial \lg\vartheta}{\partial v_\varrho \partial z_{\varrho'}}\varphi_\varrho(z = k_\mu) = \frac{\partial^2 u_\nu(s_{\varrho'}, z_{\varrho'})}{\partial k_\mu . \partial z_{\varrho'}} K_{\nu\mu} = \lim_{z=k_\mu}\left[\frac{\partial F(s, z)}{\partial s} . \frac{\partial t\{\varepsilon_{\varrho'}, (s, z)\}}{\partial z}\right].$$

Bestimmt man nun $\dfrac{\partial \lg\vartheta}{\partial v_\varrho}$ nach *Riemanns* Regeln, so findet man aus Gleichung (1.):

$$\frac{\partial \log\vartheta}{\partial v_\varrho} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(s_1, z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_1(s_2, z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_1(s_p, z_p)}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{\varrho-1}(s_1, z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_{\varrho-1}(s_2, z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_{\varrho-1}(s_p, z_p)}{\partial z_p} \\ -t(\varepsilon_1, (s, z)), & -t(\varepsilon_2, (s, z)), & \dots & -t(\varepsilon_p, (s, z)) \\ \frac{\partial u_{\varrho+1}(s_1, z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_{\varrho+1}(s_2, z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_{\varrho+1}(s_p, z_p)}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_p(s_1, z_1)}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_p(s_2, z_2)}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_p(s_p, z_p)}{\partial z_p} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}, & \frac{\partial u_\varrho}{\partial z_2}, & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_p}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix} + U,$$

worin U von (s, z) unabhängig ist, aber von $(s_1, z_1) \dots (s_p, z_p)$ abhängt.

Diese Gleichung differentiiren wir nach z, multipliciren mit $\frac{\partial F}{\partial s}$ und setzen $z = k_\mu$. Sodann wenden wir (4.) an, wodurch die rechte Seite den Factor $K_{\nu\mu}$ erhält. Für das willkürliche ν wählen wir die Zahl ϱ, welche auf der linken Seite vorkommt, dividiren mit $K_{\varrho\mu}$ und summiren über ϱ und erhalten so mit Rücksicht auf (3.):

$$\frac{1}{2}\sum_{\varrho\varrho'} \frac{\partial^2 \lg\vartheta}{\partial v_\varrho . \partial v_{\varrho'}} \frac{\partial a_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\mu} = -\frac{\partial \lg}{\partial k_\mu} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial z_p} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial z_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_p}{\partial z_1}, & \frac{\partial u_p}{\partial z_2}, & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial z_p} \end{vmatrix}.$$

Wählen wir nun die Grössen $(s_1, \overset{\mu}{} z_1), (s_2, \overset{\mu}{} z_2), \dots (s_p, \overset{\mu}{} z_p)$ für jeden Verzweigungspunkt k_μ so, dass $v_1, v_2, \dots v_p \equiv 0, 0, \dots 0$ (*Riemann*, §. 16) und verstehen unter dem Functionszeichen Δ die Determinante, so ist:

$$(5.) \qquad d\log\vartheta(0,0,\dots 0) = -\frac{1}{2}\sum_{(\mu)} \frac{\partial \lg}{\partial k_\mu}\left[\frac{\Delta\, \partial u_\nu(s_{\nu'}, \overset{\mu}{} z_{\nu'})}{\partial z_{\nu'}}\right] dk_\mu,$$

worin beim Differentiiren nach k_μ der Punkt $(s_{\nu'}, \overset{\mu}{} z_{\nu'})$ noch als unabhängig gilt.

Die Werthe $(s_\varrho, \overset{\mu}{} z_\varrho)$ können durch rein algebraische Operationen gefunden werden. Die p willkürlichen Constanten in φ lassen sich, wie nothwendig aus *Riemann*, §. 23, p. 147 folgt, so bestimmen, dass diese Function da, wo sie verschwindet, unendlich klein zweiter Ordnung wird ausser in den sich aufhebenden Windungspunkten. Diese Punkte seien $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{p-1}$. Es ist dann (*Riemann*, §. 23, p. 147) $\sum_1^{p-1}{}_\nu u_1(\eta_\nu), \sum_1^{p-1}{}_\nu u_2(\eta_\nu), \dots \sum_1^{p-1}{}_\nu u_p(\eta_\nu)$ $\equiv \sum_1^p{}_\nu \frac{1}{2}h_\nu a_{1\nu} + \frac{1}{2}g_1 i\pi, \sum_1^p{}_\nu \frac{1}{2}h_\nu a_{2\nu} + \frac{1}{2}g_2 i\pi, \dots \sum_1^p{}_\nu \frac{1}{2}h_\nu a_{p\nu} + \frac{1}{2}g_p i\pi;$ h_ν, g_ν ganze Zahlen. Sodann setzen wir

$$v_\nu = u_\nu(s,z) - u_\nu(\sigma,\zeta) - \sum_1^{p-1}{}_\varepsilon u_\nu(\eta_\varepsilon)$$

und drücken nach *Riemann*, §. 27, p. 154

$$\frac{e^{-\sum_1^p{}_\nu \frac{1}{2}h_\nu v_\nu} . \vartheta(\dots, v_\nu - \sum_1^p{}_{\nu'} \frac{1}{2}h_\nu a_{\nu\nu'} - \frac{1}{2}g_\nu i\pi, \dots)}{\vartheta(\dots, v_\nu, \dots)}$$

durch eine algebraische Function aus. Wird diese in den Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ unendlich klein, so wird offenbar

$$(\ldots, u_\nu(\sigma, \zeta) - \sum_1^p {}_\varrho u_\nu(\varepsilon_\varrho), \ldots) \equiv 0, 0, \ldots 0.$$

Setzen wir hier für (σ, ζ) den Punkt k_μ, so werden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ die Punkte $(\overset{\mu}{s_1}, z_1), (\overset{\mu}{s_2}, z_2), \ldots (\overset{\mu}{s_p}, z_p)$.

Die Coefficienten von $dk_1, dk_2, \ldots$ sind daher ausser den in $u_1, u_2, \ldots u_p$ vorkommenden Constanten, — welche man durch den Multiplicationssatz der Determinanten aussondern kann, — algebraische Functionen der Verzweigungswerthe. Für den Fall nur zweiwerthiger Functionen kann man diese Operationen leicht ausführen, integriren und den constanten Factor von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch geeignete Annäherung der Verzweigungspunkte an einander vollständig bestimmen, wie dies von mir an einem anderen Orte bereits für $p = 2$ geschehen ist.

Halle, im December 1865.