

**4. Versuch einer Anwendung der Quantenlehre
auf die Theorie des lichtelektrischen Effekts und
der β -Strahlung radioaktiver Substanzen;
von Paul S. Epstein.**

§ 1. *Einleitung.* — Die von N. Bohr¹⁾ begründete Anwendung der Quantenlehre auf die Atomistik hat in der kurzen Zeit ihres Bestehens bereits zu einer Reihe bemerkenswerter Erfolge geführt. Schon die von Bohr durch Anwendung eines Quantenansatzes in einer einzigen Koordinate gemachte Auswahl von „statischen“ Kreisbahnen brachte die Erklärung einiger spektraler Linienserien; und die überraschende experimentelle Bestätigung einer aus der Mitbewegung des Kerns theoretisch geforderten kleinen Verschiebung zwischen H- und He-Linien²⁾, sowie der für das Wasserstoffmolekül berechneten Dispersion³⁾ zeigte, daß es sich hier nicht um eine oberflächliche Analogie handelt, sondern daß das Bohrsche Modell der Wirklichkeit weitgehend entspricht. Neue Wege wurden der Atomistik durch die von Sommerfeld⁴⁾ und Planck⁵⁾ ausgeführte Erweiterung der Quantenansätze auf mehrere Freiheitsgrade eröffnet. Durch geeignete Modifikation dieser Ansätze hat Sommerfeld⁶⁾ eine Theorie der Wasserstoffdoublets und der Röntgenspektren, K. Schwarzschild⁷⁾ und der Verfasser⁸⁾ eine Theorie des Starkeffekts gegeben. In beiden Fällen ist die Übereinstimmung mit der Erfahrung vorzüglich.

1) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 1, 476, 857. 1913.

2) N. Bohr, Phil. Mag. 27. p. 506. 1914.

3) P. Debye, Münchener Ber. p. 1. 1915; A. Sommerfeld, Elster u. Geitel-Festschrift, p. 549, Braunschweig 1915.

4) A. Sommerfeld, Münchener Ber. p. 425. 1915.

5) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. p. 407, 438. 1915; Ann. d. Phys. 50. p. 385. 1916.

6) A. Sommerfeld, Münchener Ber. p. 459. 1915.

7) K. Schwarzschild, Berliner Ber. p. 548. 1916.

8) P. S. Epstein, Physik. Zeitschr. 17. p. 148. 1916.

In der erwähnten Arbeit setzt Sommerfeld voraus, daß sich das Elektron in einer *Ellipse* um den Atomkern bewegt, und fragt nach den möglichen (d. h. mit den Quantenansätzen verträglichen) Flächenkonstanten und Exzentrizitäten dieser Ellipsen. Den Quantenbedingungen gibt er dabei die folgende Form

$$(1) \quad \iint dp_{\varphi} d\varphi = nh, \quad \iint dp_r \cdot dr = n'h.$$

Es bedeuten hier (r, φ) Polarkoordinaten in der Ellipsenebene mit dem Kern als Nullpunkt, p_r, p_{φ} die bzw. Impulse des Elektrons, h das Plancksche Wirkungsquantum, n und n' ganze Zahlen. Es ergibt sich, daß zu jeder vorgegebenen Kombination der Zahlen n, n' eine statische Ellipse gehört, so daß eine doppelt unendliche Schar von Ellipsenbahnen möglich ist, welche als Grenzfall ($n' = \infty$) auch ∞^1 Parabeln enthält. Berücksichtigt man die relativistische Veränderlichkeit der Elektronenmasse, so erhalten die Ellipsen eine Präzessionsbewegung; dadurch sind für die Strahlung gegenüber den Bohrschen Kreisbewegungen Abweichungen bedingt, welche mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmen.

Der Kern der vorliegenden Arbeit ist nun die Frage: *Gibt es außer diesen statischen Ellipsen auch statische Hyperbeln?* Bekanntlich beschreibt ein gravitierender Körper um ein Newtonsches Anziehungszentrum eine Hyperbelbahn, wenn er schon im Unendlichen (relativ zum Zentrum) eine radiale Bewegungsgröße (\bar{p}_r) besitzt. Die Analogie zu den elliptischen Bahnen legt die Vermutung nahe, daß auch die möglichen Hyperbeln quantenhaft verteilt sind, und es fragt sich, wie die Quantenbedingungen abzuändern sind, um diese „statischen“ Bahnen zu erhalten. Ein Elektron, welches auf eine solche Bahn gerät, wird auf ihr ins Unendliche schießen und als lichtelektrischer Kathodenstrahl oder als β -Strahl in Erscheinung treten.

Im folgenden (§§ 2, 3) wird auf Grund der Gesichtspunkte, die für den Verfasser bei Behandlung des Starkeffekts maßgebend waren, eine Auswahl von hyperbolischen Bahnen getroffen und der Vergleich dieser Theorie mit der Erfahrung durchgeführt. Es sei von vornherein bemerkt, daß in einem weiter unten (§ 3) hervorzuhebenden Punkte eine willkürliche Annahme gemacht wird, die uns allerdings die einfachste zu

sein scheint. In bezug auf die Erklärung der β -Strahlen scheint die Theorie noch unvollständig zu sein. Immerhin aber ergeben sich einige bemerkenswerte Übereinstimmungen mit der Erfahrung, ferner sind einige Folgerungen, die sich auf den lichtelektrischen Effekt beziehen, experimentell prüfbar, wodurch eine Publikation dieser Überlegungen gerechtfertigt erscheint.

§ 2. *Die relativistische Hyperbelbewegung.* — Da wir es in den Anwendungen mit hohen Geschwindigkeiten zu tun haben werden (vgl. § 5), müssen wir das Problem auf relativistischer Grundlage behandeln. Die Berücksichtigung der Relativitätstheorie in der Keplerbewegung ist mehrfach ausgeführt worden, zum letztenmal wohl in der erwähnten Arbeit von Sommerfeld. Da wir jedoch für unsere Zwecke die Formeln in etwas anderer Form brauchen, ist es am einfachsten, sie nach einer andern, für uns bequemen Methode abzuleiten.

Wir betrachten ein Elektron von der Ladung $-e$ und der Ruhmasse m , welches um einen festen Kern von der Ladung $+E = \kappa e$ kreist. Der relativistische Ausdruck für die Gesamtenergie ist dann

$$(2) \quad A = m c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right] - \frac{e E}{r},$$

wo der erste Term die kinetische Energie, der zweite die potentielle darstellt. Dabei bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit, $\beta = v/c$ das Verhältnis der Geschwindigkeit des Elektrons zur Lichtgeschwindigkeit. Wir führen noch die Bezeichnung $\sigma = 1/r$ ein und deuten durch einen Punkt die Ableitung nach der Zeit (t) an. Dann gibt (2) nach β^2 aufgelöst

$$(3) \quad \beta^2 = \frac{1}{c^2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) = \frac{\left(\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1 \right)^2 - 1}{\left(\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1 \right)^2}.$$

Jetzt ersetzen wir die Geschwindigkeiten durch die zugehörigen Impulse, welche mit ihnen durch die Relationen

$$(4) \quad p_{\varphi} = \frac{m r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_r = \frac{m \dot{r}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

verknüpft sind, woher nach (2)

$$(5) \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{m r^2} \cdot \frac{p_{\varphi}}{\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1}, \quad \dot{r} = \frac{1}{m} \cdot \frac{p_r}{\frac{e E \sigma + A}{m c^2} + 1}.$$

Es folgt

$$\sigma^2 p_\varphi^2 + p_r^2 = \left(\frac{e E \sigma}{c}\right)^2 + 2 m e E \sigma \left(1 + \frac{A}{m c^2}\right) + m A \left(2 + \frac{A}{m c^2}\right),$$

oder mit den Abkürzungen

$$(6) \quad p_0 = \frac{e E}{c}, \quad C = m e E \left(1 + \frac{A}{m c^2}\right), \quad D = m A \left(2 + \frac{A}{m c^2}\right),$$

$$\sigma^2 p_\varphi^2 + p_r^2 = p_0^2 \sigma^2 + 2 C \sigma + D.$$

Wir führen die Jacobische Wirkungsfunktion ein

$$(7) \quad W = \int p_\varphi d\varphi + \int p_r dr = \int p_\varphi d\varphi - \int p_r \cdot \frac{d\sigma}{\sigma^2},$$

woher

$$(8) \quad p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}; \quad p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = -\sigma^2 \frac{dW}{d\sigma},$$

und

$$(9) \quad \sigma^2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} \right)^2 \right] = p_0^2 \sigma^2 + 2 C \sigma + D.$$

Das Integral dieser Gleichung

$$(10) \quad W = W(\sigma, \varphi, A, p),$$

wo A und p Konstanten sind, ist uns einerseits für die Aufstellung der Quantenbedingungen nach (1) nützlich; andererseits liefert es nach einem bekannten Satz von Jacobi¹⁾ sofort die Bewegungsgleichungen des Elektrons in der Form

$$(11) \quad \frac{\partial W}{\partial p} = \varphi_0, \quad \frac{\partial W}{\partial A} = t - t_0,$$

wobei φ_0 und t_0 zwei neue Konstanten sind.

Gleichung (9) läßt sich sehr einfach durch den Ansatz integrieren (Separation der Variablen)

$$(12) \quad W = p \varphi - W'(\sigma),$$

woher nach (9)

$$\sigma^2 \left[p^2 + \sigma^2 \left(\frac{dW'}{d\sigma} \right)^2 \right] = p_0^2 \sigma^2 + 2 C \sigma + D,$$

$$(13) \quad \frac{dW'}{d\sigma} = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{D + 2 C \sigma - (p^2 - p_0^2) \sigma^2}$$

und nach (12)

$$(14) \quad W = p \varphi - \int \frac{d\sigma}{\sigma^2} \sqrt{D + 2 C \sigma - (p^2 - p_0^2) \sigma^2}.$$

1) C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von A. Clebsch. p. 157. Berlin 1884.

Dies ist der explizite Ausdruck der Wirkungsfunktion, aus welchem wir nach (11) durch Differentiation die Bewegungsgleichungen des Elektrons erhalten. Von diesen zwei Gleichungen interessiert uns nur die erste, welche die geometrische Form der Bahn gibt. Der durch die zweite gegebene zeitliche Ablauf der Erscheinung ist für unsere späteren Anwendungen ohne Belang.

$$(15) \quad \varphi - \varphi_0 + p \int \frac{d\sigma}{\sqrt{D + 2C\sigma - (p^2 - p_0^2)\sigma^2}} = 0.$$

Wir wollen noch durch Einführung der neuen Variablen v und ν

$$(16) \quad v = \frac{p^2 - p_0^2}{\sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}} \left(\sigma - \frac{C}{p^2 - p_0^2} \right) = \cos \nu$$

die Ausdrücke (14) und (15) vereinfachen, die sich dann so schreiben:

$$(17) \quad W = p\varphi - \sqrt{p^2 - p_0^2} \int \sqrt{1 - v^2} \frac{dv}{(v + M)^2},$$

$$(18) \quad - \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma(\varphi - \varphi_0),$$

wo

$$(19) \quad \begin{cases} M = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}}, \\ \gamma = \frac{\sqrt{p^2 - p_0^2}}{p}. \end{cases}$$

Gleichung (18) ergibt die Bahn des Elektrons in der Form

$$(20) \quad v = \cos \gamma(\varphi - \varphi_0) = \cos \nu.$$

Wenn wir an Stelle von v wieder den Ausdruck (16) einsetzen, überzeugen wir uns, daß diese Gleichung für *negative* Werte der Konstanten A genau die Sommerfeldschen präzessierenden Ellipsen darstellt. Bei positivem A dagegen ergibt sie in den Koordinaten $r, \gamma\varphi$ eine Hyperbel, in den Koordinaten des physikalischen Raumes r, φ eine Hyperbel mit Präzessionsbewegung, welche letztere genau durch denselben Faktor γ dargestellt wird wie im Sommerfeldschen Fall.

Das Perihel dieser Hyperbel liegt bei

$$v_1 = \gamma(\varphi - \varphi_0) = 0, \quad v_1 = 1, \quad \sigma_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{C + \sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}}{p^2 - p_0^2}.$$

r nimmt dann mit dem Winkel ständig zu, bis es bei

$$\bar{v} = \gamma(\overline{\varphi - \varphi_0}) = \pi - \arccos M, \quad v = -M, \quad \sigma = \frac{1}{r} = 0$$

unendlich wird. Bei weiterem Zunehmen des Winkels erhalten wir den zweiten Ast der Hyperbel am bequemsten, wenn wir φ_0 und r eine andere Bedeutung beilegen, nämlich φ jetzt von der negativen φ_0 -Richtung ab zählen und r gleichfalls negativ werden lassen. Unter dieser Festsetzung schließen sich die Werte der Variablen $v = \gamma(\varphi - \varphi_0)$ und r für den zweiten Ast stetig an, was für unsere spätere Integration von Vorteil ist. r wird also bei weiterem Wachsen von v negativ und nimmt an Absolutwert ab, bis bei

$$v_2 = \gamma(\varphi - \varphi_0) = \pi, \quad v_2 = -1, \quad \sigma_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{C - \sqrt{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}}{p^2 - p_0^2}$$

das Perihel des zweiten Astes erreicht wird. Von hier ab bis $v = \gamma(\varphi - \varphi_0) = 2\pi$ werden dieselben Werte von v und r symmetrisch rückwärts durchlaufen.

Demgemäß ist die Konstante M

$$(21) \quad M = -\cos \bar{v} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

wo \bar{v} die Bedeutung des Asymptotenwinkels hat, welcher bekanntlich in der angegebenen Weise mit der Exzentrizität ε der Hyperbel zusammenhängt. Den Ausdruck (17) für W können wir jetzt mit Verfügung über die additive Konstante so schreiben:

$$(22) \quad W = p\varphi - \sqrt{p^2 - p_0^2} \int_0^v \sin v \frac{d \cos v}{(\cos v - \cos \bar{v})^2}.$$

§ 3. Die Quantenbedingungen. Berechnung der Bahnenergie. — Wir führen in der Quantenbedingung (1) die Integration nach $d p_\varphi$ bzw. $d p_r$ aus:

$$(23) \quad \int (p_\varphi - \bar{p}_\varphi) d\varphi = n h, \quad \int (p_r - \bar{p}_r) dr = n' h.$$

Es entstehen jetzt für uns zwei Fragen: Erstens, über welchen Bereich ist die Integration nach $d\varphi$ und dr auszudehnen;

zweitens, wie ist über die Anfangswerte \bar{p}_φ und \bar{p}_r zu verfügen? Die Antwort auf die erste Frage wird durch allgemeine Gesichtspunkte gegeben, welche ich an anderer Stelle¹⁾ für die Quantelung von Bewegungen, die sich durch Separation der Variablen integrieren lassen, aufgestellt habe. Der geometrische Sinn der dort zum Teil analytisch eingekleideten Prinzipien ist bei drei oder weniger Freiheitsgraden der folgende: Die erwähnte Klasse von Bewegungen hat die Eigenschaft, daß in ihnen die Bahnkurve einen dreidimensionalen (bzw. zweidimensionalen) Bereich B überall dicht erfüllt. Dieses Gebiet B ist im allgemeinen durch drei Flächenpaare (bzw. zwei Kurvenpaare) begrenzt und variiert mit den Anfangswerten der Bewegung: für alle möglichen Anfangswerte bilden die jeweiligen Grenzflächen drei Flächenscharen, welche uns die für die Quantelung berechtigten Koordinaten definieren. Die Integration der Quantenbedingungen ist (zweimal) über den ganzen Bereich B (für ein vorgegebenes System von Anfangswerten) zu erstrecken.

Auch die relativistische Keplerbewegung gehört zu dieser Klasse. Gehen wir zunächst auf den Fall der Ellipse ein ($A < 0$), so erfüllt die Bahnkurve infolge der Präzession einen Bereich B der Ebene (r, φ) zwischen zwei konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt von den Radien r_1 (Abstand des Perihels) und r_2 (Abstand des Aphels). Und zwar wird dieser Bereich doppelt überdeckt, nämlich einmal während der Bewegung des Elektrons vom Perihel zum Aphel, das zweite Mal während der rückwärtigen Bewegung vom Aphel zum Perihel. Diesem Umstand kann man dadurch Rechnung tragen, daß man die folgende zweiblättrige Riemannsche Fläche konstruiert: Man denke sich das Ringgebiet zwischen den konzentrischen Kreisen $r = r_1$ und $r = r_2$ in zwei aufeinandergelegten Exemplaren vorhanden, welche längs der beiden Grenzkreise miteinander verbunden sind. Es entsteht ein Gebilde, das sich zu einer Toroidfläche aufblasen läßt. Wir lassen nun die Bahnkurve von r_1 bis r_2 im ersten Blatt verlaufen, rückwärts von r_2 bis r_1 im zweiten Blatt.

Je nach dem Wert der Konstanten der Bewegung (A und p) haben die Verzweigungskreise $r = r_1$ und $r = r_2$ alle möglichen Lagen und bilden eine Schar von konzentrischen Kreisen.

1) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 50. p. 489. 1916.

Daraus folgt nach unserer Regel, daß die eine der für die Quantelung berechtigten Koordinaten die Entfernung vom Kern r ist, und durch die konstruierte zweiblättrige Riemannsche Fläche haben wir es anschaulich gemacht, daß das Quantenintegral von r_1 bis r_2 (im ersten Blatt) und wieder zurück von r_2 bis r_1 (im zweiten Blatt) zu erstrecken ist. Mit anderen Worten, man muß *zweimal* von r_1 bis r_2 integrieren. Der von der Bahnkurve erfüllte Bereich wird nur von einem einzigen Paar von Kurven begrenzt, daher ist in diesem Fall keine zweite Schar von Koordinatenebenen unmittelbar durch die Bewegung ausgezeichnet. Es ist jedoch durchaus nicht willkürlich, wenn wir als zweite Koordinate für die Quantelung den Winkel φ benutzen, denn die Stäckelsche Theorie¹⁾, deren Resultate wir im Obigen benutzt haben, setzt ein *orthogonales* Koordinatensystem voraus. In φ ist die Integration naturgemäß von 0 bis 2π zu erstrecken.²⁾

Läßt man die Energiekonstante A allmählich abnehmen, so rückt der äußere Verzweigungskreis $r = r_2$ immer weiter vom Nullpunkt weg und ist bei $A = 0$ (Parabelbahn) bereits im Unendlichen. Für positive Werte von A ist die Bahn hyperbolisch, sie besteht aus zwei Ästen, und ein Teil der Ebene wird von ihr vierfach überdeckt. Der Bereich B bildet jetzt dem Obigen entsprechend eine *vierblättrige* Riemannsche Fläche: Von einem ersten Verzweigungskreis $r = r_1$ ab erstrecken sich zwei Blätter ins Unendliche. Über diesen liegen von dem zweiten Verzweigungskreis $r = r_2$ ab noch zwei Blätter, welche im Unendlichen mit den beiden ersten zusammenhängen. Die Integration ist in φ wieder von 0 bis 2π zu erstrecken, in r dagegen *zweimal* von r_1 bis ∞ und von ∞ bis r_2 . Dies entspricht bei Einführung unserer Hilfsvariablen v einer zweimaligen Integration von 0 bis π .

Während sich also die Integrationsgrenzen eindeutig aus Prinzipien ergeben, die sich bereits in den Anwendungen auf

1) Vgl. z. B. C. L. Charlier, *Mechanik des Himmels* I, 2. Abschn. Leipzig 1902.

2) Unsere Wahl des Integrationsbereiches entspricht der Planckschen Forderung, daß derselbe mit dem gesamten Variabilitätsbereich der betreffenden Koordinate zusammenfallen muß. Auch Sommerfeld (l. c.) benutzt dieselben Integrationsgrenzen und gelangt zu numerischen Werten der Liniendubletts, welche mit der Erfahrung sehr gut übereinstimmen.

Röntgenspektren und Starkeffekt bewährt haben, liegt in der Verfügung über die Anfangswerte \bar{p}_φ , \bar{p}_r , zu der wir jetzt übergehen eine gewisse Willkür. Bis jetzt wurden sie in allen Anwendungen gleich Null gesetzt, und wir wollen dies in bezug auf die Größe \bar{p}_φ übernehmen. Dagegen können wir nicht \bar{p}_r gleich Null setzen, ohne auf die ganze Theorie zu verzichten, denn dann würde das zweite Integral unendlich werden. Die Abhängigkeit des Impulses p_r von der Koordinate r wird uns nämlich nach (8) und (13) durch die Beziehung

$$(14') \quad p_r = \pm \sqrt{D + 2c\sigma - (p^2 - p_0^2)\sigma^2}$$

gegeben, die graphisch durch die beiden Figuren 1 und 2 veranschaulicht wird.

Fig. 1 bezieht sich auf den Fall $A < 0$ (Ellipse). Da die Kurve geschlossen ist, ist es vollkommen gleichgültig, welchen Wert man \bar{p}_r beilegt, sofern dieser nur konstant ist. In jedem Fall wird das Integral

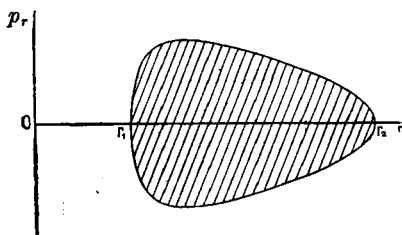


Fig. 1.

$$(23') \quad n'h = \int (p_r - \bar{p}_r) dr$$

durch den Flächeninhalt der Kurve dargestellt, und ausgezeichnete Werte des Impulses sind nicht vorhanden.

Anders im Fall der Fig. 2, die sich auf die Hyperbel bezieht ($A > 0$). Die Kurve besteht aus zwei Ästen, die sich beiderseits ins Unendliche erstrecken, indem sie sich zwei Geraden asymptotisch anschmiegen. Die Ordinaten dieser Geraden entsprechen also den Werten des Impulses im Unendlichen. Es liegt nahe für \bar{p}_r diese ausgezeichneten Werte des Impulses einzusetzen, denn nur unter dieser Annahme kann das Integral (23') endlich werden:

$$(24) \quad \bar{p}_r = \lim_{r \rightarrow \infty} p_r = \lim_{v \rightarrow v} \bar{p}_r.$$

Graphisch wird dann das Integral (23') durch die in Fig. 2 schraffierte Fläche dargestellt, wobei die Teile dieser Fläche außerhalb der Asymptoten $p_r = \pm \bar{p}_r$ positiv, diejenigen innerhalb dieser Geraden negativ zu rechnen sind.

Man kann dies vielleicht so auffassen, daß derjenige Teil des Impulses p_r , welchen das Elektron aus dem Unendlichen mitbringt und welcher also gar nicht von der Wirkung des Kernes herrührt, bei der Quantelung abzuziehen ist.

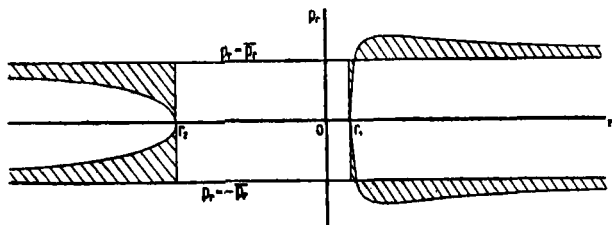


Fig. 2.

In unserer Bezeichnungsweise ist

$$p_r = \sqrt{\frac{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}{p^2 - p_0^2}} \sin v,$$

und demnach schreiben sich unsere Festsetzungen

$$(25) \quad \begin{cases} \bar{p}_\varphi = 0, \\ \bar{p}_r = \sqrt{\frac{C^2 + D(p^2 - p_0^2)}{p^2 - p_0^2}} \sin \bar{v}, \end{cases}$$

wodurch die Bedingungen (23) die folgende Form erhalten:

$$(26) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} p \, d\varphi = n h, \\ -2 \sqrt{p^2 - p_0^2} \int_0^\pi \frac{\sin v - \sin \bar{v}}{(\cos v - \cos \bar{v})^2} d \cos v = n' h. \end{cases}$$

Das erste Integral liefert

$$(27) \quad p = \frac{n h}{2 \pi};$$

da p notwendig dasselbe Vorzeichen haben muß wie $d\varphi$, ist n eine wesentlich *positive* ganze Zahl. Das zweite Integral läßt sich leicht allgemein zwischen beliebigen Grenzen a und b ausführen:

$$(28) \quad \begin{cases} - \int_a^b \frac{\sin v - \sin \bar{v}}{(\cos v - \cos \bar{v})^2} d \cos v \\ = \left[-v + \cotg \bar{v} \log \frac{\sin \frac{\bar{v} - v}{2}}{\sin \frac{\bar{v} + v}{2}} + \frac{\sin v - \sin \bar{v}}{\cos v - \cos \bar{v}} \right]_a^b. \end{cases}$$

Den Hauptwert unseres Integrals erhalten wir, wenn wir den Anteil des ersten Astes von 0 bis in die Nähe der Unendlichkeitsstelle ($\bar{v} - \eta$) nehmen:

$$-\bar{v} + \cotg \bar{v} \cdot \log \frac{\sin \eta/2}{\sin(\bar{v} + \eta/2)} + \frac{\sin(\bar{v} - \eta) - \sin \bar{v}}{\cos(\bar{v} - \eta) - \cos \bar{v}} + \frac{\sin \bar{v}}{1 - \cos \bar{v}},$$

denjenigen des zweiten von $\bar{v} + \eta$ bis π

$$-\pi + \bar{v} + \eta - \cotg \bar{v} \cdot \log \frac{\sin \eta/2}{\sin(\bar{v} + \eta/2)} + \frac{\sin(\bar{v} + \eta) - \sin \bar{v}}{\cos(\bar{v} + \eta) - \cos \bar{v}} + \frac{\sin \bar{v}}{1 + \cos \bar{v}}.$$

Wir summieren und gehen zur Grenze $\eta = 0$ über, dabei liefern die beiden letzten Terme in jedem Ausdruck $1/\sin \bar{v}$, während sich die logarithmischen Glieder in der Summe wegheben. Es folgt

$$(29) \quad n'h = 2\pi \sqrt{p^2 - p_0^2} \cdot \left[\frac{2}{\pi \sin \bar{v}} - 1 \right].$$

Während die Quanzentzahl n wesentlich positiv sein muß, ist dies für n' nicht der Fall. Denn das zweite Integral (26) kann je nach dem Wert des Asymptotenwinkels \bar{v} größer oder kleiner als Null ausfallen. Eine notwendige Beschränkung, welcher die Zahl n' unterworfen ist, ist jedenfalls die, daß sie so gewählt werden muß, daß (29) nach $\sin \bar{v}$ aufgelöst einen Wert $|\sin \bar{v}| \leq 1$ ergibt. Man sieht ferner aus (29), daß für n der Wert Null auszuschließen ist, da $p = 0$ zu einer imaginären Zahl n' (und wie wir sehen werden auch zu einer imaginären Energie) führen würde.

Gleichung (29) kann nach (21) und (19) so geschrieben werden:

$$n'h + 2\pi \sqrt{p^2 - p_0^2} = 4 \sqrt{\frac{G^2}{D} + p^2 - p_0^2},$$

und diese Beziehung liefert unter Berücksichtigung von (6) und (27) die Abhängigkeit der Energiekonstante A von den Quantenzahlen n und n' :

$$(30) \quad \frac{A^2}{m c^2} + 2A = \frac{m c^2 \alpha^2 \pi^2}{R^2},$$

wo zur Abkürzung bezeichnet ist

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi p_0}{h} \cdot \frac{e}{E} = \frac{2\pi e^2}{h c}, \\ \kappa = \frac{E}{e}, \\ R^2 = \frac{\pi^2}{4} \left(n \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \kappa^2}{n^2}} + n' \right)^2 - n^2. \end{cases}$$

Mit dem Asymptotenwinkel \bar{v} und dem Grenzpuls \bar{p}_r hängt die Konstante R auf die folgende Weise zusammen:

$$(31') \quad \begin{cases} R^2 = n^2 \left(\frac{1 - \frac{\alpha^2 \kappa^2}{n^2}}{\sin^2 \bar{v}} - 1 \right), \\ \bar{p}_r = \frac{m c \alpha \kappa}{R}. \end{cases}$$

Nach A aufgelöst, gibt Gleichung (30)

$$(32) \quad A = m c^2 \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 \kappa^2}{R^2}} - 1 \right],$$

die zweite Lösung hat keine physikalische Bedeutung und entspringt dem Umstand, daß im Anfang der Rechnung die Energiegleichung (2) quadriert wurde.

Jetzt können wir auch die Beschränkung, welcher die Auswahl der Zahlen n' zu unterwerfen ist, schärfer fassen. Es muß offenbar $R^2 \geq 0$ sein, da sonst die Energie negativ und unsere Bahnkurve überhaupt keine Hyperbel wäre. Man sieht, daß diese engere Bedingung die frühere notwendige ($\sin^2 \bar{v} < 1$) einschließt.

Bevor wir zu den Anwendungen der Schlußformel (32) übergehen, wollen wir noch die Gestalt der statischen Hyperbeln für den Fall diskutieren, daß man die relativistischen Glieder vernachlässigen kann. Die Formeln (29) und (32) reduzieren sich dann auf

$$(33) \quad \sin \bar{v} = \frac{2}{\pi} \frac{n}{n + n'},$$

$$(34) \quad A = \frac{2 \pi^2 m \kappa^2 e^4}{h^3} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} (n + n')^2 - n^2} = \frac{N_0 h \kappa^2}{Z},$$

wo N_0 die Rydbergsche Konstante und Z eine Abkürzung ist.

$$(34') \quad \begin{cases} N_0 = \frac{2 \pi m e^4}{h^3}, \\ Z = \frac{\pi^2}{4} (n + n')^2 - n^2. \end{cases}$$

Andererseits ist nach unseren Überlegungen auf p. 820 und nach (6) die reelle Halbachse der Hyperbel

$$(35) \quad a = \frac{C}{D} = \frac{e^2 \kappa}{2 A} = \frac{e^2}{2 N_0 h \kappa} \left[\frac{\pi^2}{4} (n + n')^2 - n^2 \right].$$

Bei Hyperbeln von großer Energie weicht der Ausdruck $\frac{\pi}{2} \frac{n+n'}{n}$ wenig von der Einheit ab, daher haben sie eine kleine Halbachse und einen so großen Asymptotenwinkel, daß sie sich einer Geraden nähern. Im Spezialfall $n' = 0$ ist $\sin \bar{\varphi} = 2/\pi$ und der Asymptotenwinkel wird $2\bar{\varphi} = 79^\circ 4' 48''$. Die Entfernung des Perihels vom Brennpunkt ist

$$(36) \quad \begin{cases} a \cdot \left[\frac{1}{\cos \bar{\varphi}} - 1 \right] \\ = a \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[\frac{\pi}{2} (n + n') - \sqrt{Z} \right], \end{cases}$$

sie ist also bei ungefähr gleicher Energie um so größer, je größer die Summe $n + n'$ ist. Wir illustrieren die Form der dem Kern benachbarten Äste der vier Hyperbeln ($n = 3, n' = -1$), ($n = 1, n' = 0$), ($n = 2, n' = 0$) und ($n = 1, n' = 1$) durch eine Zeichnung (Fig. 3).

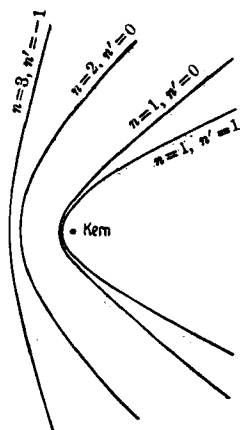


Fig. 3.

§ 4. Anwendung auf die lichtelektrischen Erscheinungen. — Wir sind in den letzten Paragraphen von der Anschauung ausgegangen, daß außer den geschlossenen Bahnen eines Atoms, auf welchen ein Elektron nach Bohr in normaler Weise kreist, es noch andere Bahnen gibt, welche ins Unendliche reichen und für wasserstoffähnliche (aus einem Kern und einem Elektron bestehende) Atome hyperbolische Gestalt haben. Damit das Elektron von einer geschlossenen Bahn auf eine Hyperbel übergeht, muß man ihm Energie zuführen, und eines der Mittel dafür ist die Bestrahlung. Diese Auffassung des lichtelektrischen Effekts unterscheidet sich von der üblichen dadurch, daß die Frequenz des einfallenden Lichts die Elektronengeschwindigkeit nicht direkt bestimmt, sondern eine nur sekundäre auslösende Bedeutung hat (siehe unten); es sind vielmehr in jedem Atom nur gewisse diskrete Geschwindigkeiten möglich, die durch unsere Formel (32) gegeben werden.

Diese Geschwindigkeiten lassen sich naturgemäß nur dann angeben, wenn der Bau des Atoms genau bekannt ist. Dies trifft bis jetzt nur für das Wasserstoffatom zu, welchem auch unsere Theorie angepaßt ist; und es ist ein glücklicher

Umstand, daß Gehrke und Janicki¹⁾ an mit Wasserstoff beladenen Metallelektroden lichtelektrische Erscheinungen beobachtet und gemessen haben, welche sie mit überzeugenden Argumenten als photoelektrischen Effekt des Wasserstoffs deuten. Bei Wasserstoff ist die Kernladung $E = e$, also in unseren Formeln $\kappa = 1$. Die relativistischen Glieder werden so klein, daß man den Ausdruck (34) für die Energie A benutzen kann. Die Geschwindigkeit, wie üblich in Volten ausgedrückt, erhalten wir, wenn wir A (in erg) durch e teilen und mit 300 multiplizieren

$$(37) \quad V = \frac{300}{e} A = 300 N_0 \frac{h}{e} \frac{1}{Z} \text{ Volt.}$$

Bekanntlich ist der numerische Wert der Rydbergschen Konstante $N_0 = 3,29 \cdot 10^{15}$; der Quotient h/e läßt sich aus der Konstante C des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes bestimmen, und zwar ergibt sich aus dem Wert

$$C = 1,4800 \text{ cm/Grad Cels.}$$

den Warburg und Müller²⁾ für den besten halten und der deshalb auch in Kohlrauschs *Leitfaden* übernommen wurde, $h/e = 1,3698 \cdot 10^{-17}$. Dieser Wert dürfte keinen größeren Fehler als 0,5 % enthalten. Man erhält hiernach für den Ausdruck von V den numerischen Faktor

$$(38) \quad V = \frac{13,52}{Z} \text{ Volt,}$$

was die folgenden diskreten Geschwindigkeiten der lichtelektrischen Elektronen liefert:

$n = 3$	1	2	1	3	2	} usw.
$n' = -1$	0	0	1	0	1	
$V = 15,55$	$9,20$	$2,30$	$1,52$	$1,05$	$0,76$ Volt	

Um uns ein Bild zu machen, unter welchen Umständen die verschiedenen Geschwindigkeiten zustande kommen, müssen wir uns wenigstens einige provisorische Vorstellungen über Lichtabsorption bilden. Über diesen Gegenstand findet man in der Literatur zwei verschiedene Anschauungen, von denen sich die eine auf Absorption ohne Auslösungen lichtelektrischer Elektronen, die andere auf Absorption mit einer solchen be-

1) E. Gehrke u. L. Janicki, Ann. d. Phys. 47. p. 679. 1915.

2) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. 40. p. 609. 1913; 48. p. 410. 1915.

zieht. Bohr¹⁾ äußert bereits in seiner ersten Abhandlung die Vermutung, daß es sich bei Absorption um die Umkehrung des von ihm angenommenen Emissionsvorganges handelt: genau dieselbe Frequenz, welche nach der Beziehung $h\nu = A_1 - A_2$ beim spontanen Übergang aus einer Kreisbahn in eine andere emittiert wird, kann rückwärts den Übergang des Elektrons aus der zweiten Bahn in die erste bewirken. Der Umstand, daß in einem leuchtenden Gas unter Wahrung des Kirchhoffschen Gesetzes genau dieselben Wellenlängen absorbiert und emittiert werden (Selbstumkehrung, Fraunhofersche Linien), verleiht dieser Vermutung eine nicht geringe Überzeugungskraft. Andererseits zeigen die Spektrogramme von Wagner²⁾, welche die Absorption von Röntgenstrahlen in verschiedenen Substanzen illustrieren, eine *Absorptionskante*. Von einer bestimmten Grenzwellenlänge λ_g ab, welche nach der Bohrschen Beziehung der Auslösung eines lichtelektrischen Elektrons von der Geschwindigkeit Null (im Unendlichen) entspricht, beobachtet man kontinuierliche Absorption. Dies wurde immer in der Weise gedeutet, daß alle Wellenlängen, die kürzer sind als λ_g , gleichfalls ein lichtelektrisches Elektron auslösen können. Weitere experimentelle Belege für diese Auffassung finden sich in einer Arbeit über die Absorption von Röntgenstrahlen von W. Kossel.³⁾

Auf diesen Tatsachen fußend, bilden wir uns die folgende Arbeitshypothese: Bestrahlung eines Atoms mit Licht von der Schwingungszahl ν kann den Übergang eines Elektrons aus einer geschlossenen (elliptischen) Bahn von der Energie A_e in eine andere geschlossene Bahn von der Energie A_e' ($A_e' > A_e$) bewirken, wenn

$$(39) \quad h\nu = A_e' - A_e;$$

sie kann den Übergang aus einer elliptischen Bahn (A_e) in eine hyperbolische von der Energie A_h bewirken, wenn

$$(40) \quad h\nu \geq A_h - A_e = h\nu_g.$$

Nach der üblichen Anschauung kommt der Überschuß von $h\nu$ über die gegen das Atomfeld geleistete Arbeit dem Elektron als kinetische Energie zugute. Dagegen liegt unserer

1) N. Bohr, Phil. Mag. 26. p. 1. 1913.

2) E. Wagner, Ann. d. Phys. 46. p. 868. 1915.

3) W. Kossel, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16. p. 898, 953. 1914.

Hypothese die Auffassung zugrunde (die wir übrigens mit Sommerfeld und, wie es scheint, auch mit Bohr teilen), daß die Bohrsche Beziehung (89) lediglich eine „Frequenzbedingung“ ist, welche mit dem eigentlichen energetischen Vorgang nichts zu tun hat.

Gleichung (40) sagt aus, daß jede der auf p. 828 berechneten Geschwindigkeiten nur auftreten kann, wenn die einstrahlende Wellenlänge unterhalb einer bestimmten Grenze λ_g liegt. Diese Grenzen berechnen sich zu den folgenden Werten:

$$\begin{array}{cccc} V = & 15,55 \text{ Volt,} & 9,20 & 2,30 & 1,52 \\ \lambda_g = & 792,7 \text{ \AA,} & 1365,6 & 5350,4 & 8085,2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} V \\ \lambda_g \end{array}} \right\} \text{ usw.}$$

In ihren Versuchen haben Gehrcke und Janicki (l.c.) die Quarzquecksilberlampe als Lichtquelle benutzt, deren Grenze bei etwa 2300 Å liegt. Die größte Geschwindigkeit, die unter diesen Umständen vom Standpunkt unserer Theorie möglich ist, ist 2,30 Volt.¹⁾ Beobachtet wurden die folgenden Aufladepotentiale (nach Zerstäubung der Metalle in reinem Wasserstoff):

Mittelwert von 24 Messungen an Platin:	2,30 Volt
„ „ 6 „ „ Gold:	2,25 „
„ „ 16 „ „ Zink:	2,29 „
„ „ 7 „ „ Kupfer:	2,28 „

Die Zuverlässigkeit dieser Zahlenwerte übersteigt nach Angabe der Verfasser nicht $\pm 0,1$ Volt, so daß die Übereinstimmung mit unserer Theorie eine sehr gute ist.

Die oben angegebenen Werte λ_g entsprechen dem Übergang in die betreffende Hyperbel aus einer sehr entfernten Kreis- oder Ellipsenbahn (von der Energie $A_e = 0$). In Wirklichkeit sind diese Bahnen um so weniger wahrscheinlich, je größer ihre (dem Vorzeichen nach negative) Energie ist, so daß bei Bestrahlung mit Wellenlängen, welche nur wenig kürzer sind als λ_g , der lichtelektrische Effekt eine nahezu verschwindende Intensität haben muß. Läßt man die Wellenlänge des monochromatischen einfallenden Lichtes abnehmen,

1) Durch Kombination sehr großer Quantenzahlen n, n' wäre es vielleicht möglich, aus der Formel (38) Geschwindigkeiten zu erhalten, welche zwischen 2,30 Volt und 9,20 Volt liegen. Indessen würden solche Bahnen (vgl. Schluß von § 3) ihr Perihel in sehr großer Entfernung vom Kern haben, was ihre praktische Möglichkeit zweifelhaft macht.

so beeinflußt dies die Intensität aus zwei verschiedenen Gründen. Erstens erfolgt eine sprungartige Zunahme derselben jedesmal, wenn λ über einen Wert rückt, welcher nach Ungleichung (40) das Auslösen eines Elektrons aus einem neuen, weiter innen liegenden Bohrschen Ring ermöglicht. Dies bedingt ein treppenförmiges Ansteigen der Intensitätskurve; bei den uns interessierenden Strahlen von der Geschwindigkeit 2,80 Volt liegen die Hauptgeschwindigkeitsstufen bei

$\lambda = 5053,6 \text{ \AA.}$	4988,6	4901,0	4777,9	4600,2	4332,9
$n = 10$	9	8	7	6	5
$\lambda = 3914,4 \text{ \AA.}$	3238,3	2168,4	778,8		
$n = 4$	3	2	1		

Hierbei bedeutet n die Ordnungszahl des innersten Bohrschen Ringes, welcher noch in Mitleidenschaft gezogen wird. Diesem Effekt überlagert sich ein zweiter: eine vorübergehende Steigerung der Intensität erfolgt nach Gleichung (39), wenn λ über eine Serienlinie des Wasserstoffs rückt. In diesem Falle werden nämlich Elektronen aus einem inneren Ring in einen äußeren befördert, und dies steigert die Zahl der „prädisponierten“ Elektronen, welche von dem eben besprochenen Effekt erfaßt werden können.¹⁾

Diese zwei Arten des Anwachsens der Intensität haben eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Verhalten des *normalen* und *selektiven* photoelektrischen Effekts von Pohl und Pringsheim²⁾; dabei bleibt allerdings unerklärt, warum das einfallende Licht für die Anregung der beiden Effekte verschieden polarisiert sein muß.

Es ist zu betonen, daß die obigen Erörterungen sich auf den Fall *freier* Atome beziehen. Aus der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment scheint hervorzugehen, daß der okkludierte Wasserstoff diese Voraussetzung erfüllt. Da-

1) Herr K. Glitscher (Münchener Ber., im Erscheinen begriffen) hat es neuerdings plausibel gemacht, daß es sich bei dem Viellinienspektrum des Wasserstoffs um Übergänge aus den Bohr-Sommerfeldschen Ringen in ähnliche Bahnen eines noch unbekannten Systems von kleinerer Energie handelt. Bestätigt sich dies, so ist aus dem eben dargelegten Grunde ein Parallelismus zwischen Intensität des lichtelektrischen Effekts und Dichte der Linien im Viellinienspektrum zu erwarten.

2) R. Pohl u. P. Pringsheim, Die lichtelektrischen Erscheinungen. p. 13, 14. Braunschweig 1914.

gegen müßte man für die Auslösung lichtelektrischer Elektronen aus dem Verband fester und flüssiger Körper noch einen Energieverlust beim Durchdringen der Oberfläche in Rechnung setzen, genau wie dies in der Einsteinschen Formel geschehen ist. Noch in einer anderen Beziehung sind die Verhältnisse aus Wasserstoff für die Prüfung unserer Theorie günstig: Die verschiedenen Geschwindigkeitsstufen entsprechenden Grenzwellenlängen λ , liegen hier gerade in dem experimentell bequem zugänglichen Bereich ziemlich weit auseinander. Wäre dies nicht der Fall, wie sich z. B. aus unserer Formel (32) für verhältnismäßig große Kernladungen ergeben würde, so würde der Versuch ein ungefähr lineares Anwachsen des Potentials V mit der Wellenlänge feststellen, wie er auch durch die Einsteinsche Formel gegeben wird. Aus diesem Grunde kann man aus den Ergebnissen der schönen Messungen von Millikan¹⁾ keinen Widerspruch mit unserer Theorie konstruieren.

Zusammenfassend können wir sagen: Unsere Theorie, verbunden mit der durch die Beziehungen (39), (40) gegebenen Arbeitshypothese, ist mit den Versuchen insofern in Übereinstimmung, als sie bei den Versuchsbedingungen von Gehrke und Janicki den Wert 2,30 Volt für das Aufladepotential ergibt, welcher tatsächlich beobachtet wurde. Der experimentellen Prüfung sind die folgenden weiteren Folgerungen der Theorie zugänglich:

1. Das Aufladepotential (2,30 Volt) ist in ziemlich weiten Grenzen von der Wellenlänge des anregenden Lichtes unabhängig.

2. Bei Bestrahlung mit sehr viel kürzeren Wellenlängen treten höhere Aufladepotentiale (9,20 bzw. 13,55 Volt) auf.

3. Die Intensität des lichtelektrischen Effekts als Funktion der anregenden Wellenlänge, läßt gewisse, oben eingehend geschilderte Regelmäßigkeiten erwarten.

Bei den Versuchen könnte allerdings eine Komplikation dadurch eintreten, daß sich dem lichtelektrischen Effekt am okkludierten Wasserstoff die Eigenstrahlung des Elektrodenmetalls überlagert.

§ 5. *Anwendung auf die β -Strahlen.* — Neuere Versuche über die magnetische Ablenkbarkeit der β -Strahlen radio-

1) R. A. Millikan, *Physik. Zeitschr.* **17.** p. 217. 1916.

aktiver Substanzen¹⁾ haben zu dem Ergebnis geführt, daß diese Stoffe im allgemeinen mehrere homogene Bündel von β -Strahlen aussenden. Bei einigen Präparaten ist die Zahl dieser Bündel überraschend groß. Auf einer photographischen Platte hinterlassen die durch ein Magnetfeld von der Feldstärke H auseinandergezogenen Bündel diskrete Linien, weshalb man von einem „magnetischen Spektrum der β -Strahlen“ spricht. Die Lage dieser Linien gestattet es, den Krümmungsradius ρ der betreffenden Strahlen im Magnetfeld und die für jede Strahlenart konstante, für sie charakteristische Größe $H\rho$ (*Steifigkeit*) zu bestimmen. Aus der Steifigkeit berechnet sich die Geschwindigkeit der β -Strahlen nach der Formel

$$(41) \quad \beta = \frac{v}{c} = \left[\left(\frac{m c}{H \rho e} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2},$$

während sich die (kinetische) Energie jedes Elektrons nach (2) so darstellt:

$$(42) \quad A = m c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right].$$

In den Anwendungen der Quantentheorie auf Röntgenspektren²⁾ hat es sich gezeigt, daß man für die Berechnung der K - und L -Terme der Spektralformeln die Atome von hoher Kernladung als wasserstoffähnlich behandeln kann. Wir versuchen es, auch unsere Formel (32) so anzuwenden, als ob das System aus einem Kern und einem Elektron bestünde, ohne uns um die übrigen Elektronen zu kümmern. Auch die Frage, woher das β -Strahl-Elektron kommt, wird von unserer Theorie nicht umfaßt; nach der gut begründeten Meinung von Bohr kommt es aus dem Kern selbst und ist daher schon vom Kern losgelöst, wenn es auf unsere Hyperbelbahn gelangt.

1) O. v. Baeyer u. O. Hahn, *Physik. Zeitschr.* 11. p. 488. 1910; O. v. Baeyer, O. Hahn u. L. Meitner, *Physik. Zeitschr.* 12. p. 273. 1911; 12. p. 378. 1911; 12. p. 1099, 1911; 13. p. 264. 1912; 14. p. 321. 1913; 15. p. 649. 1914; 16. p. 6. 1915; J. Danysz, *C. R.* 153. p. 339. 1911; *Le Radium* 9. p. 1. 1911; 10. p. 4. 1913; *Ann. de Chim. phys.* 30. p. 241. 1913; J. Danysz et J. Götz, *Le Radium* 9. p. 6. 1912; E. Rutherford and A. Robinson, *Phil. Mag.* 26. p. 717. 1913. Ein zusammenfassender Bericht wurde von O. v. Baeyer (*Jahrb. der Radioaktiv. und Elektronik* 11. p. 66. 1914) veröffentlicht.

2) A. Sommerfeld, l. c.

Aus diesem Grunde ist für κ in unseren Formeln stets *die Ordnungszahl des entstehenden Produkts* zu setzen.

Der Vergleich von (32) und (42) gibt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha \kappa}{R}\right)^2},$$

woher

$$(43) \quad \beta = \left[\left(\frac{R}{\alpha \kappa} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2},$$

und nach (41)

$$(44) \quad H\varrho = \frac{m c \alpha \kappa}{e R}.$$

Da nicht alle Autoren die Werte von $H\varrho$ angeben, berechnen wir die Werte von β für alle Ordnungszahlen zwischen 92 (*Ur*) und 82 (*Pb*).¹⁾ Es zeigt sich, daß Formel (43) äußerst empfindlich auf kleine Änderungen der Konstanten α reagiert, deren Wert daher mit großer Sorgfalt zu bestimmen ist. Dabei wurde auf folgende Weise vorgegangen: da die Rydbergsche Konstante nach Bohr so lautet: $N_0 = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}$, so läßt sich α^2 nach (31) wie folgt schreiben:

$$(45) \quad \alpha^2 = \frac{2 N_0}{e^2} \cdot \frac{h}{e} \cdot \frac{e}{m}.$$

Für N_0 und h/e nehmen wir wieder die bereits in § 4 benutzten Werte ($3,29 \cdot 10^{-17}$ und $1,3693 \cdot 10^{17}$) an, für e/m gilt als bester Wert $5,310 \cdot 10^{17}$, der sich aus Zeemanneffekt-messungen ergibt, c setzen wir gleich $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Dies führt zu dem Zahlenwert

$$(46) \quad \alpha^2 = 5,316 \cdot 10^{-5},$$

welcher allen nachstehenden Rechnungen zugrunde liegt.²⁾

Zunächst stellen wir in Tab. I die Gruppe von Geschwindigkeiten zusammen, welche sich aus (43) und (31) für $n = 1$, $n' = 0$ ergeben.

1) Sämtliche Daten über radioaktive Elemente sind dem Bericht über radioaktive Umwandlungen von K. Fajans (Physik. Zeitschr. 16. p. 456. 1915) entnommen.

2) Eine Veränderung dieser Zahl um $\pm 0,02$ zieht eine Änderung der Werte von β in der Tabelle I um $\pm 0,002$ (mit demselben Vorzeichen) nach sich.

Tabelle I.

Berechnet		Gemessen von				v. Baeyer, Hahn und Meitner (RaC)
		Danyasz (RaB, C)	Rutherford und Robinson			
α	β	β Int.	β Int.	β Int.	β	
92	0,747	0,753 st.	0,751 1	0,750 4		0,74
91	0,732	0,733 s.s.	0,731 4	—		
90	0,718	0,722 s.	0,719 3	—		
89	0,704	0,706 st.	0,700 1	—		0,69
88	0,690	—	—	—		
87	0,677	0,682 s.s.	—	0,675 4		
86	0,664	0,660 s.	—	—		
85	0,652	—	0,656 3	—		
84	0,640	0,642 st.	} 0,635 1	0,648 6		0,63
83	0,628	—		0,632 6		
82	0,616	—		—		

Intensitätsbezeichnungen:

Danyz, st. = stark, s. = schwach, s.s. = sehr schwach.

Ruth u. Rob., 1 — sehr stark, 7 — sehr schwach.

Es ist zu bemerken, daß wir in diese Tab. *sämtliche* von den angegebenen Autoren im Bereich $0,753 > \beta > 0,680$ gemessenen Geschwindigkeiten eingetragen haben, so daß unsere konstantenfreie Formel bei geeigneter Wahl von α wirklich alle beobachteten Geschwindigkeitsstufen wiedergibt. Dabei entsprechen die zu den stärksten Linien gehörenden Zahlen α notorisch starken β -Strahlern (Ordnungszahl der entstehenden Produkte: 92 — aus Brevium, 89 — Ra, 84 — RaB, 83 — RaC).¹⁾ Es wäre indessen noch verfrüht, daraus schließen zu wollen, daß diese Substanzen in den benutzten Präparaten wirklich vorhanden waren. Mehr Wert legen wir auf folgendes Zusammen treffen: Da es keine Ordnungszahlen über 92 gibt, und da die Elemente mit solchen unter (oder gleich) 82 inaktiv sind, müssen wir theoretisch erwarten, daß die β der Tab. I eine isolierte Gruppe darstellen und daß dieses Spektrum nach unten und oben abbricht. Dies trifft in der Tat für die untere Grenze zu, am RaB-Präparat wurden überhaupt keine β be-

1) Aus verschiedenen Gründen sind wir geneigt anzunehmen, daß die von Rutherford u. Robinson mit 0,635 angegebene Geschwindigkeit in Wirklichkeit eine Doppellinie ist, die zu den Werten $\alpha = 84$ und $\alpha = 83$ gehört.

obachtet, die unter 0,632 liegen; bei RaC folgen weitere Geschwindigkeiten erst nach einer größeren Lücke (vgl. Tab. III). Nach oben scheint sich das Spektrum stetig weiter fortzusetzen, indessen ist es wahrscheinlich, daß diese Stetigkeit eine nur scheinbare ist und daß sich hier eine ganz andere β -Gruppe durch Zufall kontinuierlich anschließt. Das ersieht man aus Tab. II, in welcher diejenigen Geschwindigkeiten verzeichnet sind, welche aus derselben Formel mit $n = 3$, $n' = -1$ hervorgehen.

Tabelle II.

Berechnet		Danysz	Gemessen von			v. Baeyer, Hahn und Meitner		
			Rutherford und Robinson					
α	β	β	Int.	RaB	RaC	β		
				β	Int.	β		
92	0,877	—	—	—	0,876	5	0,86	
	—	0,867	st.	—	0,868	2		
91	0,864	—	—	—	0,861	6		
	—	—	—	—	0,857	6		
90	0,850	—	—	—	0,847	5	0,80	
89	0,837	—	—	—	0,831	6		
88	0,823	—	—	0,823	6	—		
87	0,809	0,803	s.	0,805	3	—		
86	0,796	0,798	st.	0,797	2	0,797		6
85	0,783	—	—	0,787	7	—		
84	0,771	0,772	s.s.	—	—	0,776		4
83	0,759	0,763	s.	0,762	3	—		

Im Gegensatz zu Tab. I finden sich hier zwei Geschwindigkeiten, welche durch unsere Formel nicht umfaßt werden. Das könnte davon herrühren, daß eine dritte β -Strahlengruppe in dasselbe Gebiet übergreift. Vielleicht könnte man die größeren Geschwindigkeiten, die nach Danysz bis 0,996 reichen, durch Kombination von größeren Quantenzahlen n und n' erhalten; wir halten dies indessen für nicht sehr wahrscheinlich.¹⁾ Man darf nicht außer acht lassen, daß auch ins Unendliche gehende Bahnen möglich sind, welche teilweise im Innern des Kerns verlaufen und sich daher unserer Theorie entziehen.

1) Um dies zu prüfen, müßte man die Konstante α mit größerer Genauigkeit kennen, da die Unsicherheit derselben mit wachsendem β immer größeren Einfluß gewinnt und eine Zuordnung der gemessenen Geschwindigkeiten immer schwieriger wird.

Die Gruppe der nächstkleineren Geschwindigkeiten, welche unsere Formel (bei kleinen Werten von n und n') enthält, bekommt man, wenn man $n = 2$, $n' = 0$ setzt:

α	92	91	90	89	88	87	86	85	84	83
β	0,294	0,290	0,287	0,283	0,280	0,276	0,272	0,269	0,265	0,262

Die Geschwindigkeit $\beta = 0,29$ wurde von Baeyer, Hahn und Meitner an Präparaten der Thoriumreihe gemessen.

Um die zwischen 0,63 und 0,29 liegenden Geschwindigkeiten zu erklären, wollen wir, ohne uns auf eine bestimmte Deutung festzulegen, auf die folgende Möglichkeit hinweisen: Die bis jetzt betrachteten Geschwindigkeitsstufen erhielten wir, indem wir von der Betrachtung des isolierten Kerns ausgingen. Fassen wir das System ins Auge, welches aus dem Kern und den N -Elektronen des innersten Atomringes besteht und denken uns alle übrigen Elektronen weg, so erhalten wir neue Bahnen, deren Geschwindigkeit sich mit guter Näherung aus Formel (43) ergibt, wenn wir an Stelle von α die Zahl $\alpha - N$ einsetzen. Ebenso können wir das System aus Kern und zwei Elektronenringen betrachten usw. Von diesem Standpunkt weisen die an Ra-Präparaten festgestellten weicheren β -Strahlen eine interessante Regelmäßigkeit auf.

Tabelle III.

Gemessen von		Danysz	Berechnet nach Formel (43)		
Rutherford und Robinson an RaB			$\alpha - N$	β	$\alpha - N$
$H\alpha$	β	β			
950	0,489		70	0,490	84—2·7
914	0,474		69	0,481	83—2·7
861	0,452		[66]	[0,453]	
836	0,442		[65]	[0,444]	
798	0,426	0,422	63	0,427	84—3·7
770	0,414	0,412	62	0,418	83—3·7
663	0,365	{0,362	56	0,369	84—4·7
		{0,361	55	0,361	83—4·7

Die Geschwindigkeit $\beta = 0,635$ der Tab. I haben wir als zu $\alpha = 84$ und $\alpha = 83$ gehörende Doppellinie gedeutet. Es ist merkwürdig, daß die Mehrzahl der am selben Präparat beobachteten kleineren Werten von β sich in das Schema

$\alpha - N = 84 - 7m$ (bzw. $\alpha - N = 83 - 7m$) einordnet. Ein Analogon hierzu bilden die Messungen von Baeyer, Hahn und Meitner an Radioaktiniumpräparaten.

Tabelle IV.

Gemessen von Baeyer, Hahn und Meitner	Berechnet nach Formel (43)		
β	$\alpha - N$	β	$\alpha - N$
0,73	91	0,733	
0,67	87	0,677	87
0,60	81	0,604	87—1.6
0,53	75	0,533	87—2.6
0,49	69	0,481	87—3.6
0,43	63	0,427	87—4.6
0,38	57	0,377	87—5.6

Dem Radioaktinium selbst wird die Kernladung 90 zugeschrieben¹⁾, diejenige des durch die β -Strahlung entstehenden Produkts ist daher 91, und es ist sehr befriedigend, daß gerade die zugehörige Geschwindigkeit gemessen wurde. Im übrigen sind die Verhältnisse in der Aktiniumreihe noch nicht ganz geklärt, so daß die Existenz eines β -Strahlers von der Kernladung 86 sehr wohl möglich ist. Alle anderen Werte unserer Tabelle gehören zu dem Schema $\alpha - N = 87 - 6m$.

Es liegt uns fern, aus dieser immerhin interessanten Regelmäßigkeit weitgehende Schlüsse ziehen zu wollen, aber eine prüfbare Folgerung wollen wir noch besprechen: Wenn die Bahnen der Serie $\alpha - N = 83 - 7m$ wirklich in einem und demselben Atom vorhanden sind, so kann man mit dem Überspringen des Elektrons aus einer dieser Bahnen in eine andere rechnen, was mit γ -Strahlenemission nach der Bohrschen Frequenzbeziehung ($h\nu = A_1 - A_2$) verbunden sein könnte. Wir haben die Wellenlängen berechnet, welche dem Überspringen aus einer jeden der Bahnen der Serie $\alpha - N = 83 - 7m$ in alle anderen, deren Energiekonstante kleiner ist, entsprechen. Sie fallen zum Teil in den Bereich der Messungen, die von Rutherford und Andrade²⁾ an RaB- und RaC-Präparaten ausgeführt wurden, und sind in Tabelle V zusammengestellt.

1) K. Fajans, l. c.

2) Sir Ernest Rutherford and E. N. da C. Andrade, Phil. Mag. 27. p. 854; 28. p. 263. 1914.

Tabelle V (γ -Strahlen).

Berechnet	Gemessen von Rutherford und Andrade
$\lambda \cdot 10^9$	$\lambda \cdot 10^9$
1,14 cm	1,15
1,33	1,37
1,68	1,69
(1,95)	1,96
(2,53)	2,62 ?
(2,78)	—
3,53	—
(4,30)	4,28
6,18	—
8,50	8,53

Die eingeklammerten Wellenlängen sind mit Benutzung des Wertes $\kappa - N = 83 - 7 = 76$ berechnet, welchem kein beobachtetes β -Strahlenbündel entspricht.

Ebenso ist das Überspringen eines Elektrons aus den Bahnen der Gruppe $n = 1$, $n' = 0$ (Tab. I) in die der Gruppe $n = 2$, $n' = 0$ möglich, was auf harte γ -Strahlen führt. Die härtesten von Rutherford und Andrade gemessenen Wellenlängen sind $0,99 \cdot 10^{-9}$ cm und $0,72 \cdot 10^{-9}$ cm, bei dem eben erwähnten Übergang ergeben sich für $\kappa = 83$ und $\kappa = 88$ die Wellenlängen $0,977 \cdot 10^{-9}$ cm und $0,710 \cdot 10^{-9}$ cm. Die Übereinstimmung könnte indessen auf Zufall beruhen, denn $\kappa = 88$ ist die einzige Kernladung der Tab. I, zu welcher keine beobachtete Geschwindigkeit gehört; es wäre gewagt, anzunehmen, daß gerade dieser Zahl eine besonders starke γ -Strahlung entspricht.

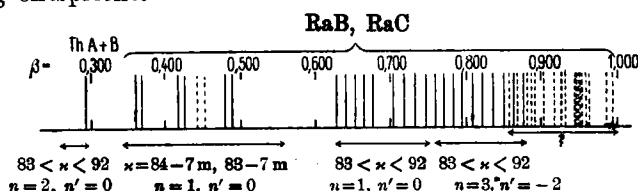


Fig. 4.

In Fig. 4 haben wir es graphisch veranschaulicht, wie weit sich die verschiedenen Geschwindigkeiten der β -Strahlen durch unsere Formel erklären lassen. Die senkrechten Striche entsprechen den *gemessenen* Geschwindigkeitsstufen, unten sind

die Werte der Zahlen n , n' , α angegeben, welche man in Formel (42) einsetzen muß, um dieselben zu berechnen. Punktiierte Striche entsprechen Geschwindigkeiten, deren Einordnung noch nicht gelungen ist.

§ 6. *Zusammenfassung.* — 1. Es wurde die Auffassung zugrunde gelegt, daß sich ein Elektron um einen Atomkern nicht nur in Bohr-Sommerfeldschen Kreisen und Ellipsen bewegen kann, sondern auch in quantenhaft ausgezeichneten („statischen“) Hyperbeln. Auf diesen gelangt es ins Unendliche und tritt als lichtelektrischer Kathodenstrahl oder als β -Strahl in Erscheinung.

2. Beim Versuch, die Quantentheorie auf die Bestimmung von hyperbolischen Bahnen auszudehnen, zeigte es sich, daß sich zwar der Bereich, über welchen die Quantenintegrale zu erstrecken sind, aus allgemeinen Gesichtspunkten eindeutig ergibt, daß aber diese Integrale im allgemeinen unendlich werden. Der Weg, welcher eingeschlagen wurde, um diese Schwierigkeit zu überwinden, scheint uns der einfachste zu sein, ist aber wahrscheinlich nicht der einzige mögliche und entbehrt daher nicht der Willkür. Aus diesem Grunde ist die Theorie in der mitgeteilten Gestalt noch nicht als definitiv zu betrachten und wird sich vielleicht noch einige Formänderungen gefallen lassen müssen.

3. Schon in der gegenwärtigen Form weist die Theorie einige bemerkenswerte Übereinstimmungen mit der Erfahrung auf. Es berechtigt zu den besten Hoffnungen, daß die von empirischen Konstanten freie Formel, zu welcher man gelangt, bei geeigneter Wahl der Kernladung sowohl im lichtelektrischen Effekt als besonders im Gebiet der β -Strahlen Geschwindigkeiten liefert, welche wirklich beobachtet wurden.

München, Juni 1916.

(Eingegangen 1. Juli 1916.)
