26.

Über die Taylorsche Reihe; nebst einer Anwendung auf die Zerlegung der algebraischen Brüche.

(Von Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

Es sei

$$1.\quad xy = z,$$

wo y und z Functionen von x sind, so ist, wenn man nach x differenziirt,

$$2.\quad \begin{cases} y + x\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ 2\dfrac{\partial y}{\partial x} + x\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ 3\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ n\dfrac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + x\dfrac{\partial^n y}{\partial x^n} = \dfrac{\partial^n z}{\partial x^n}. \end{cases}$$

Die successive Substitution der Werthe von y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ... aus diesen Gleichungen in (1.) giebt

$$3.\quad z = \frac{x}{(1,+1)}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x^2}{(1,+1)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{x^3}{(1,+1)^3}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n y}{\partial x^n},$$

wo wir uns der Bezeichnung des Herausgebers d. J. bedient haben, welcher

$$4.\quad u(u+a)(u+2a)(u+3a)\dots(n+(n-1)a) = (u,+a)^n$$

setzt. (S. Band VII. Heft 3. dieses Journals.) Hiernach ist also

$$(1,+1)^n = 1.2.3.4\dots n.$$

Als Anwendung der Reihe (3.) nehmen wir an

$$5.\quad f(x+h) - f(a+h) = (x-a)y,$$

wo $f(x+h)$ kein a enthalten soll, y eine Function von x, a, h ist, und auch den Factor $(x-a)$ in irgend einer positiven Potenz enthalten kann. Vergleicht man diese Ausdrücke mit (1.), indem man y dem y, $x-a$ dem x und $f(x+h)-f(a+h)$ dem z gleichstellt, und differenziirt nach a, so verwandelt sich (3.) in

$$6.\quad f(x+h)-f(a+h)=\frac{(x-a)}{(1,+1)}\frac{\partial f(a+h)}{\partial a}+\frac{(x-a)^2}{(1,+1)^2}\frac{\partial^2 f(a+h)}{\partial a^2}+\frac{(x-a)^3}{(1,+1)^3}\frac{\partial^3 f(a+h)}{\partial a^3}+\dots$$
$$\dots+\frac{(x-a)^n}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n f(a+h)}{\partial a^n}+\frac{(x-a)^{n+1}}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{f(x+h)-f(a+h)}{x-a}\right).$$

Dies ist die Taylorsche Reihe in ihrer anwendbarsten Form. Um nur ein Beispiel davon zu geben, so setzen wir $h=0$, schreiben $n-1$ statt n und dividiren die ganze Reihe durch $(x-a)^n$; dann entsteht

$$7.\quad \frac{fx}{(x-a)^n}=\frac{1}{(x-a)^n}fa+\frac{1}{(1,+1)(x-a)^{n-1}}\frac{\partial fa}{\partial a}+\frac{1}{(1,+1)^2(x-a)^{n-2}}\frac{\partial^2 fa}{\partial a^2}+\frac{1}{(1,+1)^3(x-a)^3}\frac{\partial^3 fa}{\partial a^3}+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{(1,+1)^{n-1}(x-a)}\frac{\partial^{n-1}fa}{\partial a^{n-1}}+\frac{1}{(1,+1)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{fx-fa}{x-a}\right).$$

Soll jetzt der Bruch $\frac{\varphi x}{Fx}$, in welchem φx und Fx algebraische rationale Functionen von x sind, in Partialbrüche zerlegt werden, und man hat $Fx=(x-a)^n\psi x$, so kann man setzen:

$$8.\quad \frac{\varphi x}{Fx}=\frac{\varphi x}{(x-a)^n\psi x}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-2}}+\dots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\frac{X}{\psi x}.$$

Die Vergleichung dieser Reihe mit (7.) ergiebt auf der Stelle, dafs irgend ein Zähler A_ν dieser Partialbrüche ausgedrückt wird durch

$$9.\quad A_\nu=\frac{1}{(1,+1)^\nu}\frac{\partial^\nu}{\partial a^\nu}\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right).$$

Es sei z. B. $\frac{2x-3}{(x+1)^3(x-2)}$ zu zerlegen. Wir setzen

$$u=\frac{2x-3}{x-2}=2+\frac{1}{x-2},\quad \partial u=-\frac{1}{(x-2)^2},\quad \partial^2 u=\frac{2}{(x-2)^3}.$$

Für $x=-1$ erhält man hieraus nach (9.) sogleich die 3 Zähler

$$\frac{5}{3},\quad -\frac{1}{9},\quad -\frac{1}{27},$$

welche zu den 3 entsprechenden Nennern

$$(x+1)^3,\quad (x+1)^2,\quad (x+1)$$

gehören. Der vierte, zum Nenner $x-2$ gehörige Zähler findet sich eben so gleich $\frac{1}{27}$, daher ist

$$\frac{2x-3}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{5}{3(x+1)^3}-\frac{1}{9(x+1)^2}-\frac{1}{27(x+1)}+\frac{1}{27(x-2)}.$$

In solchen und ähnlichen Fällen möchte vielleicht kein anderes Verfahren so schnell zum Ziele führen.

Die höhern Differenziale eines zweiseitigen Products lassen sich bekanntlich binomisch entwickeln; es ist nemlich

10. $\partial^n . xy = x\partial^n y + \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)\partial x\,\partial^{n-1}y + \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^2\partial^2 x\,\partial^{n-2}y + \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^3\partial^3 x\,\partial^{n-3}y + \ldots + \partial^n x . y.$

Setzt man hier $x = \frac{\varphi a}{\psi a}$ **und** $y = \psi a$, **so kommt:**

11. $\partial^n \varphi a = \frac{\varphi a}{\psi a}\partial^n \psi a + \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)\partial\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right)\partial^{n-1}\psi a + \left(\frac{n,-1}{1,+1}\right)^2\partial^2\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right)\partial^{n-2}\psi a + \ldots + \partial^n\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right).\psi a.$

Diese Reihe geht mit Rücksicht auf (9.) über in

12. $\partial_n \varphi a = A_0\,\partial^n \psi a + (n,-1)A_1\,\partial^{n-1}\psi a + (n,-1)^2 A_2\,\partial^{n-2}\psi a + (n,-1)^3 A_3\,\partial^{n-3}\psi a + \ldots + (n,-1)^n A_n \psi a.$

Durch diese Formel lassen sich die spätern Zähler aus den schon berechneten frühern finden. Sie liefert die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi a &= A_0\,\psi a,\\
\partial\varphi a &= A_0\,\partial\psi a + A_1\psi a,\\
\partial^2\varphi a &= A_0\partial^2\psi a + 2A_1\,\partial\psi a + 2A_2\psi a,\\
\partial^3\varphi a &= A_0\,\partial^3\psi a + 3A_1\partial^2\psi a + 6A_2\partial\psi a + 6A_3\psi a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

deren allgemeines Gesetz aber gewöhnlich nicht dargelegt wird.

Berlin, im Juli 1833.