Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen.

Von P. Gordan in Erlangen.

Im neunten Bande dieser Annalen (p. 183—188) hat sich Herr Klein mit dem Probleme beschäftigt:

Alle endlichen Gruppen zu construiren, die sich aus linearen Transformationen einer Veränderlichen bilden lassen,

und dasselbe zu einem einfachen Schlussresultate geführt. Aber die geometrischen Betrachtungen, deren er sich zu diesem Zwecke bedient, sind sehr abstract und jedenfalls mit der Fragestellung nicht nothwendig verknüpft; ich werde daher im Folgenden zeigen, wie man diese Aufgabe algebraisch behandeln kann.

§ 1.

Fundamentalformeln.

Bekanntlich zerfallen die linearen Substitutionen:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0),$$

sofern man von der sogenannten *identischen* Substitution:

$$\eta' = \eta$$

absieht, in zwei Arten, je nachdem die beiden Werthe, welche durch die Substitution sich nicht ändern, gleich sind oder nicht.

Im ersteren Falle kann man statt η', η solche lineare Functionen η_1', η_1 von η' bez. η einführen, dass die Substitution die kanonische Form annimmt:

$$(1) \qquad \eta_1' = \eta_1 + r;$$

im zweiten Falle hat man als kanonische Form:

$$(2) \qquad \eta_1' = \varrho\eta_1.$$

Die einzelne lineare Substitution ist in dieser kanonischen Form am einfachsten zu behandeln. Wird aber die Aufgabe gestellt, verschiedene lineare Substitutionen zu combiniren, so erscheint es nicht zweckmässig, von vornherein kanonische Veränderliche einzuführen; ich bediene mich dann folgender Formeln:

Sei $\eta = \frac{x_1}{x_2}$, $\eta' = \frac{y_1}{y_2}$, so kann die Substitution, die ich S nennen will, dargestellt werden durch das Verschwinden einer bilinearen Form:

$$r_x s_y = 0.$$

Eine solche Form hat zwei Invarianten (rs) und $(rr')(ss')$, deren zweite mit der Determinante der Substitution gleichbedeutend ist. Ich will die Coefficienten der bilinearen Form in der Weise absolut bestimmen, dass

$$\frac{1}{2}(rr')(ss') = 1.$$

Dann setze man:

$$\frac{1}{2}(rs) = -\cos\varphi$$

und die quadratische Covariante

$$r_x s_x = i \sin\varphi \cdot a_x^2.$$

Dann ist

$$(ab)^2 = -2,$$

und es wird:

$$r_x s_y = i \sin\varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos\varphi. \tag{3}$$

Diese Gestalt der bilinearen Form nenne ich die *Normalform der linearen Substitution* S, a_x^2 heisse die *zugehörige quadratische Form*, φ das *Argument*. Setzt man $a_x^2 = 0$, so erhält man diejenigen Werthe von $\frac{x_1}{x_2}$, welche bei der linearen Substitution ungeändert bleiben. Da für die Substitutionen erster Art diese beiden Werthe zusammenfallen, so ist das Resultat $(ab)^2 = -2$ für sie nur dadurch möglich, dass die Coefficienten von a_x^2 unendlich gross werden. Dann ist nothwendig $\sin\varphi = 0$, und also $\varphi = 0$ oder π. Auch für die identische Substitution ist $\varphi = 0$ oder π; aber a_x^2 verschwindet für sie identisch; ihre Normalform lautet:

$$\pm (yx).$$

Man hat also diesen Satz:

> *Wenn bei der Substitution S, die keine identische sein soll, das Argument φ verschwindet oder π ist, dann und nur dann ist die Substitution von der ersten Art.* —

Die Normalform einer Substitution ist nicht eindeutig bestimmt; statt a_x^2 und φ darf man auch setzen $-a_x^2$ und $-\varphi$, oder statt φ $\varphi + \pi$. Wenn wir also von der quadratischen Form einer Substitution sprechen, sehen wir stets vom Vorzeichen ab. —

Sollen zwei in der Normalform gegebene Substitutionen

$$S = r_x s_y = i \sin\varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos\varphi,$$
$$T = \varrho_y \sigma_z = i \sin\psi \cdot \alpha_y \alpha_z + (zy) \cdot \cos\psi$$

nach einander angewandt werden, so entsteht:

$$ST = r_x (s\varrho)\, \sigma_z = i \sin \Theta \cdot p_x p_z + (zx) \cdot \cos \Theta,$$

wo:

$$(4) \begin{cases} \cos \Theta = \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{2} (a \alpha)^2 \sin \varphi \sin \psi, \\ \sin \Theta \cdot p_x{}^2 = \sin \varphi \cos \psi \cdot a_x{}^2 + \cos \varphi \sin \psi \cdot \alpha_x{}^2 + i \sin \varphi \sin \psi (a \alpha) a_x \alpha_x. \end{cases}$$

Ist also insbesondere $S = T$ und schreibt man wieder y statt z, so kommt:

$$S^2 = i \sin 2\varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos 2\varphi,$$

und überhaupt:

$$S^\nu = i \sin \nu\varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos \nu\varphi.$$

Nennt man dementsprechend:

$$- i \sin \varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos \varphi = S^{-1}$$

und bildet das Argument H der Substitution $S^{-1}T$, wo T die obige Bedeutung hat, so giebt die Vergleichung mit der ersten der beiden Gleichungen (4) folgende wichtige Formel:

$$(5) \qquad \cos \Theta + \cos \mathrm{H} = \cos (\varphi + \psi) + \cos (\varphi - \psi).$$

§ 2.

Endliche Gruppen von Substitutionen.

Eine Substitution S kann die Eigenschaft haben, nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen die identische Substitution zu ergeben. Es tritt das nach der soeben für S^ν gegebenen Formel dann und nur dann ein, wenn φ ein (reelles) rationales Multiplum von π ist. Ich nenne dann die Substitution *iterirend* und die kleinste Zahl n, für welche

$$S^n = \pm (yx),$$

die *Periode* von S.

Bei Substitutionen der ersten Art war $\varphi = 0$; man hat also den folgenden Satz, der sich auch unmittelbar aus der kanonischen Form (1) ergiebt: *Substitutionen der ersten Art sind nie iterirend.*

Bei einer iterirenden Substitution ist daher stets die kanonische Form (2) am Platze. Dieselbe nimmt für sie (sofern wir die unteren Indices bei η', η unterdrücken) die Gestalt an:

$$\eta' = \varepsilon \eta,$$

wo ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel bezeichnet.

Die Werthe, welche aus einem Anfangswerthe η durch Wiederholung der Substitution entstehen, sind diese n:

$$\eta, \; \varepsilon\eta, \; \varepsilon^2\eta, \; \cdots\cdots \; \varepsilon^{n-1}\eta;$$

sie sind, so lange η nicht $=0$ oder $=\infty$, alle von einander verschieden.

Die allgemeine Aufgabe nun, mit der wir uns im Folgenden beschäftigen wollen, ist diese: *Substitutionen* S, T, $\cdots$ *in endlicher Zahl* *derart zusammenzustellen, dass sie eine Gruppe bilden*, d. h. dass *jede* Substitution, die sich aus den $S, T, \cdots$ durch Combination oder Wiederholung bilden lässt, selbst zu den $S, T, \cdots$ gehört. Vor allem Dingen müssen dann sämmtliche Substitutionen $S, T, \cdots$ iterirend sein; denn die Gruppe soll ja nur eine endliche Zahl von Substitutionen umfassen.

Ich zeige nun zunächst: *Wenn die quadratischen Formen zweier Substitutionen S, T — ohne identisch zu sein — einen linearen Factor gemein haben, so lässt sich aus S, T eine Substitution der ersten Art zusammensetzen, die also nicht iterirend ist.*

Zu dem Zwecke seien $a_x^2 = b_x^2$ und $\alpha_x^2 = \beta_x^2$ die quadratischen Formen von S und T. Die Resultante von a_x^2 und α_x^2 verschwindet; mithin ist

$$((a\alpha)^2)^2 = (ab)^2 (\alpha\beta)^2 = 4 \text{ und } (a\alpha)^2 = \pm 2.$$

Wir wollen das Vorzeichen von a_x^2, α_x^2 so bestimmen, dass $(a\alpha)^2 = -2$ ist. Es seien nun $\frac{\pi}{m}$ und $\frac{\pi}{n}$ die Argumente von S und T; nach Formel (4) ist dann $\frac{\lambda\pi}{m} - \frac{\mu\pi}{m}$ das Argument von $S^\lambda T^\mu = U$. Jetzt bestimme man λ, μ in der Weise, dass $\lambda n - \mu m = \varrho$ der grösste gemeinsame Factor von m und n ist. Es wird dann das Argument ψ von U ein Theiler des Argumentes φ von S, etwa $\varphi = \nu\psi$. Daher hat die Substitution $S^{-1} U^\nu$ das Argument Null. Sie ist aber nicht identisch. Denn sonst wäre $S = U^\nu$; S hätte dieselbe quadratische Form wie U, also auch wie $S^{-\lambda} U = T^\mu$, also auch wie T, was der Voraussetzung widerspricht. Mithin ist $S^{-1} U^\nu$ eine Substitution erster Art, w. z. b.

Zwei Substitutionen daher, welche zu einer endlichen Gruppe gehören, haben entweder dieselbe quadratische Form (von nicht verschwindender Determinante), oder ihre quadratischen Formen sind durchaus verschieden.

Im ersteren Falle sei

$$S = i \sin\varphi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos\varphi,$$
$$T = i \sin\psi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos\psi.$$

Bedeutet dann χ den grössten Winkel, der gleichzeitig in φ und ψ als Theil enthalten ist, so dass

$$\varphi = \lambda \cdot \chi, \quad \psi = \mu \cdot \chi,$$

wo λ, μ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, so kann man S und T und jede Combination derselben als Potenzen darstellen der Substitution

$$U = i \sin\chi \cdot a_x a_y + (yx) \cdot \cos\chi;$$

umgekehrt lassen sich alle Potenzen von U darstellen durch Combinationen von S und T. Daher der Satz:

Alle Substitutionen einer endlichen Gruppe, welche dieselbe quadratische Form besitzen, lassen sich ersetzen durch die Potenzen einer einzigen Substitution.

Ist n die Periode der letzteren, so heisse n zugleich die in der Gruppe *der quadratischen Form zugehörige* Periode.

§ 3.

Aufzählung der einfachsten Gruppen.

Man kann die gesuchten Gruppen jedenfalls in folgende zwei Classen theilen:

1) in solche, deren Substitutionen alle dieselbe quadratische Form besitzen,
2) in solche, bei denen verschiedene quadratische Formen auftreten.

Die Gruppen der *ersten* Art lassen sich, dem letzten Satze zufolge, erzeugen durch Wiederholungen einer einzigen Substitution. Hat diese die Periode n und bedeutet ε eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit, so ist also die Gruppe in kanonischer Form dargestellt durch folgendes Schema:

$$\text{(I)} \qquad \eta, \ \varepsilon\eta, \ \varepsilon^2\eta, \ \cdots\cdots \ \varepsilon^{n-1}\eta$$

in dem Sinne, dass das Schema diejenigen n Werthe angiebt, welche aus einem beliebig angenommenen Werthe der Veränderlichen $\frac{x_1}{x_2}$ durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehen, sofern man statt $\frac{x_1}{x_2}$ eine geeignete lineare Function von $\frac{x_1}{x_2}$ als Grösse η einführt. Es bezeichnen $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ die beiden Wurzeln der allen Substitutionen der Gruppe gemeinsamen quadratischen Form.

Die Gruppen der *zweiten* Art lassen sich folgendermassen weiter eintheilen. Zu jeder quadratischen Form, welche bei einer Substitution der Gruppe auftritt, gehört nach dem Obigen eine Periode. Ich betrachte nun insonderheit diejenigen quadratischen Formen, welche die *grösste* überhaupt auftretende Periode besitzen.

Möglicherweise ist nur *eine* quadratische Form vorhanden, der die betr. grösste Periode zukommt. Alle derartige Gruppen bestimmt man durch folgende Ueberlegung.

Die Substitutionen, welche zu der betreffenden ausgezeichneten quadratischen Form gehören, lassen sich darstellen als Wiederholungen einer einzigen:

$$S, \ S^2, \ S^3, \ \cdots\cdots \ S^n.$$

Sei T eine Substitution der Gruppe, welche nicht in dieser Reihe enthalten ist. Aus ihr und S lässt sich die Substitution zusammensetzen:

$$T^{-1} S T,$$

von der man sofort zeigt, dass sie dasselbe Argument besitzt, wie S. Sie muss daher auch dieselbe quadratische Form haben, wie S. Mithin führt T die quadratische Form von S (bis auf das Vorzeichen) in sich über. Ist nun diese quadratische Form a_x^2 und

$$T = i \sin \psi \cdot \alpha_x \alpha_y + (y x) \cdot \cos \psi,$$

so entsteht aus a_x^2:

$$(i \sin \psi \cdot \alpha_x (\alpha a) + \cos \psi \cdot a_x)\,(i \sin \psi \cdot \beta_x (\beta a) + \cos \psi \cdot a_x),$$

oder:

$$- \sin^2 \psi\, \alpha_x \beta_x (\alpha a)(\beta a) + \cos^2 \psi \cdot a_x^2 + i \sin 2\psi \cdot \alpha_x a_x (\alpha a)$$

$$= - \sin^2 \psi \left(\alpha_x^2 (\beta a)^2 - \frac{1}{2} a_x^2 (\alpha \beta)^2\right) + \cos^2 \psi \cdot a_x^2 + i \sin 2\psi \cdot \alpha_x a_x (\alpha a)$$

$$= \cos 2\psi \cdot a_x^2 - \sin^2 \psi \cdot (a \alpha)^2 \cdot \alpha_x^2 + i \sin 2\psi \cdot \alpha_x a_x (\alpha a).$$

Daher folgt:

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad (a \alpha)^2 = 0.$$

Die Substitutionen $S T^{\nu}$ und $T^{n-\nu} S$ sind dann identisch, und die Gruppe umfasst, neben den schon aufgeführten Potenzen von S, nur noch diese Substitutionen:

$$TS,\ TS^2,\ TS^3,\ \cdots\ TS^n.$$

Um die Gruppe in kanonischer Form darzustellen, wähle man eine lineare Function η von $\frac{x_1}{x_2}$ so, dass die Wurzelpunkte der zu S gehörigen quadratischen Form durch $\eta = 0$, $\eta = \infty$ dargestellt sind, während die zu T gehörige quadratische Form gegeben sei durch: $\eta^2 + 1 = 0$. Dann erscheinen die $2n$ Werthe, welche aus einem durch die Substitutionen der Gruppe entstehen, in folgender Gestalt:

$$\text{(II.)} \qquad \begin{cases} \eta, & \varepsilon\eta, & \varepsilon^2\eta, & \cdots & \varepsilon^{n-1}\eta, \\ -\dfrac{1}{\eta}, & -\dfrac{\varepsilon}{\eta}, & -\dfrac{\varepsilon^2}{\eta}, & \cdots & -\dfrac{\varepsilon^{n-1}}{\eta}. \end{cases}$$

Hier ist ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel und n der Voraussetzung nach > 2. Nehmen wir $n = 2$, so haben wir eine Gruppe, die nur Substitutionen von der Periode 2 umfasst, und die sich im Laufe unserer Aufzählung erst später einstellt (§ 10.).

Es bleiben jetzt nur noch solche endliche Gruppen linearer Substitutionen aufzusuchen, bei denen *verschiedene* quadratische Formen auftreten, denen der grösste unter den vorhandenen Periodenwerthen zukommt. Ich werde den letzteren zugleich den Periodenwerth der

Gruppe nennen. Vor allen Dingen entsteht die Frage, welche Zahlen als Periodenwerthe derartiger Gruppen auftreten können. Mit dieser Untersuchung werde ich mich in den nächstfolgenden Paragraphen beschäftigen.

§ 4.

Formulirung des Problems.

Unter den quadratischen Formen der noch gesuchten Gruppen finden sich, der Voraussetzung nach, jedenfalls zwei, welche die grösste Periode besitzen. Diejenigen beiden zu ihnen gehörigen Substitutionen, welche die kleinste Amplitude φ besitzen, will ich S und T nennen. Für die Amplituden Θ und H der Substitutionen ST und $S^{-1}T$ liefert dann Formel (5) folgende Gleichung:

$$\cos \Theta + \cos H = \cos 2\varphi + 1.$$

Hier müssen, damit die Gruppe endlich wird, Θ, H in rationalem Verhältnisse zu π stehen. Es dürfen ferner $\cos \Theta$, $\cos H$ nicht 1 sein, weil die entsprechenden Substitutionen ST resp. $S^{-1}T$, die keine identische sein können, dann der ersten Art angehören, also nicht iteriren würden. Endlich kann Θ, H nicht kleiner als φ sein. Doch lassen wir vorab diese Nebenbedingungen bei Seite, schreiben

$$2\varphi = \varphi_1, \quad \pi - \Theta = \varphi_2, \quad \pi - H = \varphi_3,$$

so haben wir die Hauptaufgabe vor uns: *die Gleichung*

$$1 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 = 0$$

durch rationale Winkel zu lösen. Es wird sich zeigen, dass die Zahl dieser Lösungen sehr beschränkt ist.

Ich gebrauche bei dieser Untersuchung einen Satz, den Kronecker im 19ten Bande von Liouville's Journal (1854) bewiesen hat:

Ist p eine Primzahl und α eine ganze Zahl, so kann der Ausdruck:

$$X_{p,\alpha} = 1 + x^{p^{\alpha-1}} + x^{2p^{\alpha-1}} + \cdots\cdots + x^{(p-1)p^{\alpha-1}}$$

nicht in Factoren niederen Grades zerlegt werden, deren Coefficienten rationale ganzzahlige Functionen sind von Einheitswurzeln, die sich auf nicht durch p theilbare Exponenten beziehen.

Hieraus kann man schliessen:

Sind in der Function:

$$f(x) = \Sigma c_i x^i$$

die Coefficienten c rationale und ganzzahlige Functionen von Einheitswurzeln, deren Exponenten nicht durch p theilbar sind, und ist:

$$f\left(e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}\right) = 0,$$

so ist $f(x)$ durch $X_{p,\alpha}$ theilbar.

Unter den Exponenten i der Reihe $f(x)$ können Zahlen vorkommen, welche nicht nach dem Modul $p^{\alpha-1}$ congruent sind. Man wird dann f der Art in eine Anzahl von Summen zerlegen:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots,$$

dass in jedem einzelnen f_k alle diejenigen Glieder $c_i x^i$ und nur diejenigen vorkommen, bei denen i, durch $p^{\alpha-1}$ dividirt, den nämlichen Rest r_k liefert, und sieht leicht ein, dass dann jede Summe f_k für sich den Ausdruck $X_{p,\alpha}$ zum Factor hat.

§ 5.

Einfachste Lösungen.

Sei in der Gleichung

$$1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0,$$

$$\varphi_i = \frac{2a_i}{m_i}\pi,$$

wo die a_i, m_i ganze Zahlen ohne gemeinsamen Factor vorstellen. Da $\cos(2\pi+\varphi) = \cos\varphi$, so kann man jedenfalls wählen $\frac{a_i}{m_i} \leqq \frac{1}{2}$. Dies vorausgesetzt, soll also sein:

$$1 + \cos\frac{2a_1}{m_1}\pi + \cos\frac{2a_2}{m_2}\pi + \cos\frac{2a_3}{m_3}\pi = 0.$$

Betrachten wir zunächst den Fall, in welchem eins der m, etwa m_1, $= 2$ ist. Dann ist $\varphi_1 = \pi$, $\cos\varphi_1 = -1$, also:

$$\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0.$$

In diesem einfachsten Falle erhalten wir also die Auflösung:

(A) $$\varphi_1 = \pi, \quad \varphi_2 = \varphi_2, \quad \varphi_3 = \pi - \varphi_2,$$

wo φ_2 ein beliebiger, zu π in rationalem Verhältniss stehender, Winkel $\leqq \pi$ ist.

Für die übrigen Auflösungen sind alle $m_i > 2$; wir wollen zunächst diejenigen unter ihnen aufsuchen, bei denen $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$ rationale Werthe besitzen. Die einzigen rationalen Werthe solcher Cosinus sind bekanntlich:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad 0, \quad -\frac{1}{2}, \quad -1;$$

ihnen entsprechen die Winkel:

$$0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi.$$

Von diesen Werthen sind hier π, 0, $\frac{\pi}{3}$ auszuschliessen; π, weil das betr. $m_i = 2$, und 0 und $\frac{\pi}{3}$, weil die Formeln

$$1 + 1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0,$$
$$1 + \tfrac{1}{2} + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$$

nur erfüllt werden können, wenn man statt φ_2, φ_3 andere Werthe setzt als

$$0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}.$$

Es bleiben für die φ_i also nur die Werthe $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{2\pi}{3}$ übrig. *In der That findet man für*

(B) $$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \frac{2\pi}{3},$$
$$1 + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = 0,$$

und dies ist die einzige hier aufzuführende Lösung.

§ 6.

Hülfssatz, betr. irrationale Lösungen.

Für etwaige irrationale Werthe der $\cos\varphi_i$, die unserer Gleichung genügen, muss mindestens eine der Zahlen m_1, m_2, m_3 von 1, 2, 3, 4, 6 verschieden sein.

Ich nehme zunächst an, dass mindestens ein m_i durch das Quadrat einer Primzahl theilbar sei. Man setze:

$$m_k = r_k \cdot p^{\nu_k}, \qquad a_k = \alpha_k r_k + \beta_k p^{\nu_k},$$

und wähle die m in solcher Reihenfolge, dass

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3.$$

Es wird dann:

$$1 + \sum_{k=1}^{k=3} \cos 2\pi \left(\frac{\alpha_k}{p^{\nu_k}} + \frac{\beta_k}{r_k}\right) = 0,$$

oder:

$$0 = 2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left\{ e^{\frac{2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot e^{\frac{2i\alpha_k\pi}{p^{\nu_k}}} + e^{\frac{-2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot e^{\left(2i\pi - \frac{2i\alpha_k\pi}{p^{\nu_k}}\right)} \right\}.$$

Also ist der Ausdruck:

$$U = 2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left\{ e^{\frac{2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot x^{\alpha_k p^{(\nu_1-\nu_k)}} + e^{\frac{-2i\beta_k\pi}{r_k}} \cdot x^{\left(p^{\nu_1} - \alpha_k p^{(\nu_1-\nu_k)}\right)} \right\}$$

durch

$$X_{p,\nu_1} = 1 + x^{p^{\nu_1-1}} + \dots\, x^{(p-1)\cdot p^{\nu_1-1}}$$

theilbar. Man unterscheide jetzt drei Fälle:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \nu_1 > \nu_2,\\ &\text{b)}\ \nu_1 = \nu_2 > \nu_3,\\ &\text{c)}\ \nu_1 = \nu_2 = \nu_3. \end{aligned}$$

a) Im ersten Falle sind die Exponenten α_1 und $p^{\nu_1} - \alpha_1$ den übrigen nach dem Modul p incongruent, da die letzteren den Factor p besitzen. Es muss also schon die Theilsumme

$$e^{\frac{2i\beta_1\pi}{r_1}} \cdot x^{\alpha_1} + e^{\frac{-2i\beta_1\pi}{r_1}} \cdot x^{(p^{\nu_1}-\alpha_1)}$$

durch X_{p,ν_1} theilbar sein, also für $x = e^{\frac{2i\nu_1\pi}{p}}$ verschwinden. Es ist dann:

$$\cos 2\pi \left(\frac{\beta_1}{r_1} + \frac{\alpha_1}{p_1}\nu_1\right) = \cos\varphi_1 = 0,$$

also:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad p = 2, \quad m_1 = 4, \quad \nu_1 = 2, \quad \nu_2 < 2, \quad \nu_3 < 2,$$

und m_2 und m_3 nicht durch 4 theilbar.

b) Im zweiten Falle $\nu_1 = \nu_2 > \nu_3$ sind die Exponenten

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad p^{\nu_1} - \alpha_1, \quad p^{\nu_1} - \alpha_2$$

den übrigen nach dem Modul p incongruent, da die letzteren durch p theilbar sind. Hieraus folgt, dass die Summe

$$2 + e^{\frac{2i\beta_3\pi}{r_3}} \cdot x^{\alpha_3 p^{(\nu_1-\nu_3)}} + e^{\frac{-2i\pi\beta_3}{r_3}} \cdot x^{\left(p^{\nu_1} - \alpha_3 p^{(\nu_1-\nu_3)}\right)}$$

durch X_{p,ν_1} theilbar ist, also für $x = e^{\frac{2i\pi}{p^{\nu_1}}}$ verschwindet. Es ist also

$$0 = 2 + 2\cos\varphi_3,$$

was unserer Voraussetzung $m_3 > 2$ widerstreitet.

c) Im dritten Falle $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$ ist keiner der Exponenten

$$\alpha_i, \quad p^{\nu_1} - \alpha_i$$

durch p theilbar, also der Zahl Null nach p congruent. Es müsste also die Zahl 2 durch X_{p,ν_1} theilbar sein, was unmöglich ist.

Wir haben also den Satz:

Der einzige Fall, dass einer der Nenner m_i durch das Quadrat einer Primzahl p theilbar ist, ist der, wo $p = 2$, eine der $m = 4$ und die beiden anderen nicht durch 4 theilbar sind.

Hieraus folgt, dass für alle Auflösungen unserer Gleichung, von den Systemen (A), (B) abgesehen, mindestens eine der Zahlen m_i durch eine Primzahl $p > 3$ theilbar sein muss und dass keine der m_i durch p^2 theilbar sein darf.

§ 7.

Bestimmung der irrationalen Lösungen.

Ich unterscheide wieder drei Fälle:

1) Alle drei Zahlen m_i sind durch p theilbar.
2) Zwei der Zahlen m_i, etwa m_1 und m_2, sind durch p theilbar, m_3 aber nicht.
3) Eine der Zahlen m_i, etwa m_1, ist durch p theilbar, m_2 und m_3 aber nicht.

1) Im ersten Falle setze ich:

$$m_k = r_k p, \quad a_k = \alpha_k r_k + \beta_k p.$$

Es wird dann:

$$1 + \sum_{k=1}^{k=3} \cos 2\pi \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{r_k}\right) = 0,$$

oder:

$$2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\frac{2i\pi\alpha_k}{p}} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\left(2i\pi - \frac{2i\pi\alpha_k}{p}\right)} \right) = 0;$$

mithin der Ausdruck:

$$U = 2 + \sum_{k=1}^{k=3} \left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot x^{\alpha_k} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot x^{p-\alpha_k} \right)$$

durch

$$X_p = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$$

theilbar. Der Coefficient von x^0 in U ist 2, mithin ist $U = 2X_p$, und, wenn man $x = 1$ setzt:

$$2 + \sum_{k=1}^{k=3} 2 \cos \frac{2\pi\beta_k}{r_k} = 2p.$$

Dies ist aber unmöglich, da $p \geqq 5$.

2) Im zweiten Falle setze ich:

$$m_1 = r_1 p, \quad m_2 = r_2 p, \quad a_1 = \alpha_1 r_1 + \beta_1 p, \quad a_2 = \alpha_2 r_2 + \beta_2 p.$$

Es wird dann:

$$1 + \cos \frac{2a_3\pi}{m_3} + \sum_{k=1}^{k=2} \cos 2\pi \left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{r_k}\right) = 0,$$

oder

$$2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{m_3} + \sum_{k=1}^{k=2} \left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\frac{2i\pi\alpha_k}{p}} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot e^{\left(2i\pi - \frac{2i\pi\alpha_k}{p}\right)} \right) = 0,$$

also:

$$U = 2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{m_3} + \sum_{k=1}^{k=2}\left(e^{\frac{2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot x^{\alpha_k} + e^{\frac{-2i\pi\beta_k}{r_k}} \cdot x^{p-\alpha_k}\right)$$

durch X_p theilbar. U enthält fünf verschiedene Potenzen von x, also ist $p = 5$. Setzt man

$$U = \varrho X_p,$$

so wird:

$$\varrho = 2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{r_3} = e^{\frac{2i\pi\beta_1}{r_1}} = e^{\frac{-2i\pi\beta_1}{r_1}} = e^{\frac{2i\pi\beta_2}{r_2}} = e^{\frac{-2i\pi\beta_2}{r_2}}$$

und die vier Zahlen α_1, α_2, $5-\alpha_1$, $5-\alpha_2$ bilden eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4. — Hieraus folgt $\varrho^2 = 1$, also

$$\varrho = 2 + 2\cos\frac{2a_3\pi}{r_3} = \pm 1, \quad \cos\varphi_3 = \pm\frac{1}{2} - 1,$$

Da die numerischen Werthe der $\cos \cdot < 1$ wird, so muss das obere Vorzeichen gelten, also $\varrho = 1$ sein.

Hieraus folgen die Formeln:

$$\cos\varphi_3 = \cos\frac{2a_3\pi}{m_3} = -\frac{1}{2},$$

$$1 = e^{\frac{2i\pi\beta_1}{r_1}} = e^{\frac{2i\pi\beta_2}{r_2}}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0;$$

$a_1 = \alpha_1 r_1$, $a_2 = \alpha_2 r_2$ und da a_1 mit m_1, a_2 mit m_2 keinen Factor gemein hat, $r_1 = r_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 5$.

Die Formel wird jetzt:

$$1 + \cos\frac{2\alpha_1\pi}{5} + \cos\frac{2\alpha_2\pi}{5} - \frac{1}{2} = 0$$

oder

$$1 + 2\cos\frac{2\alpha_1\pi}{5} + 2\cos\frac{2\alpha_2\pi}{5} = 0,$$

und da α_1, α_2, $5-\alpha_1$, $5-\alpha_2$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4 bilden:

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$

Dieser Formel entsprechen die Werthe:

$$(\Gamma) \qquad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{4\pi}{5}$$

für die φ.

3) Im dritten Falle setze ich:

$$m_1 = rp, \quad a_1 = \alpha r + \beta p.$$

Es wird dann:

$$1 + \sum_{k=2}^{k=3}\cos\frac{2a_k\pi}{m_k} + \cos\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{r}\right)2\pi = 0$$

oder:

$$2+2\sum_{k=2}^{k=3}\cos\frac{2\alpha_k\pi}{m_k}+e^{\frac{2\beta i\pi}{r}}\cdot e^{\frac{2\alpha i\pi}{p}}+e^{\frac{-2\beta i\pi}{r}}\cdot e^{\left(2i\pi-\frac{2\alpha i\pi}{p}\right)}=0,$$

und der Ausdruck:

$$U=2+2\sum_{k=2}^{k=3}\cos\frac{2\alpha_k\pi}{m_k}+e^{\frac{2\beta i\pi}{r}}\cdot x^{\alpha}+e^{\frac{-2\beta i\pi}{r}}\cdot x^{p-\alpha}$$

durch X_p theilbar. Da er nur 3 ($< p$) Glieder besitzt, so verschwindet er identisch; es ist

$$e^{\frac{2i\beta\pi}{r}}=0,$$

was unmöglich ist.

§ 8.

Das Resultat.

Die Gleichung:

$$1+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3=0,$$

kann nach dem Vorangehenden, sobald die φ_i zu π in rationalem Verhältnisse stehen, nur dann Statt haben, wenn sie Glied für Glied mit einer der drei Gleichungen übereinstimmt:

$$(\mathrm{A})\qquad 1+\cos\pi+\cos\varphi_2+\cos(\pi-\varphi_2)=0,$$

$$(\mathrm{B})\qquad 1+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=0,$$

$$(\Gamma)\qquad 1+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0.$$

Schreiben wir wieder, wie ursprünglich (§ 4.):

$$1+\cos 2\varphi=\cos\Theta+\cos\mathrm{H}$$

und berücksichtigen, dass, zufolge der früheren Betrachtung, $\cos\Theta$ und $\cos\mathrm{H}$ von 1 verschieden sein muss, dass ferner φ nicht grösser als Θ, H angenommen zu werden braucht, so sehen wir, dass neue endliche Gruppen nur entstehen können, wenn:

$$1+\cos 2\varphi=\cos\Theta+\cos\mathrm{H}$$

Glied für Glied übereinstimmt mit einer der folgenden Gleichungen:

$$1+\cos\pi=\cos\Theta+\cos\Theta+\pi,$$

$$1+\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3},$$

$$1+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3},$$

$$1+\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{6}.$$

Mit anderen Worten: *Zu den bereits aufgestellten Gruppen linearer Substitutionen I und II sind nur noch (möglicherweise) solche zuzufügen, welche die Periode 2, 3, 4 oder 5 besitzen.*

Es wird sich in der That zeigen, dass für jeden dieser Periodenwerthe je eine Gruppe existirt. Ich bestimme zunächst, unter der Voraussetzung, dass solche Gruppen existiren, die Beziehungen, welche zwischen den quadratischen Formen derjenigen Substitutionen Statt finden, welche bez. die grösste Periode aufweisen. Dann erst stelle ich die Gruppen selbst auf. Besonderes Gewicht möchte ich legen auf die *Index-Relationen*, die ich später zur Darstellung der Gruppen verwende.

§ 9.

Bestimmung der quadratischen Formen.

1) Ist 2 die Periode der Gruppe, so hat man die Formel:

$$1 + \cos\pi = \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}.$$

Es haben alle Substitutionen der Gruppe die Periode 2, abgesehen von der einen identischen Substitution. Sind $\varphi, \psi, \chi \cdots$ die quadratischen Formen der Substitutionen von der Periode 2, so ist, nach Gleichung (4) des § 1.:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos^2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\varphi\psi)^2 \cdot \sin^2\frac{\pi}{2},$$

also:

$$(\varphi\psi)^2 = 0, \text{ ebenso } (\varphi, \chi)^2 = 0, \quad (\psi, \chi)^2 = 0.$$

Durch die beiden letzteren Formeln ist χ linear gegeben. *Es treten also nur drei quadratische Formen von der Periode 2 auf.*

2) Sei 3 die Periode der Gruppe. Dann hat man die Formel:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}.$$

Daher giebt die Gleichung (4) des § 1.:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos^2\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}(\varphi, \psi)^2 \sin^2\frac{\pi}{3}.$$

Hieraus $(\varphi, \psi)^2 = -\frac{2}{3}$. Sind also $f, \varphi, \psi, \chi \cdots$ quadratische Formen, welche zur Periode 3 gehören, so sind die simultanen Invarianten dieser Formen $= \pm\frac{2}{3}$. Man kann das Vorzeichen von φ, ψ, χ so wählen, dass $(f, \varphi)^2 = (f, \psi)^2 = (f, \chi)^2 = +\frac{2}{3}$ ist; ich behaupte, dass alsdann die 3 Invarianten $(\varphi, \psi)^2$, $(\varphi, \chi)^2$, $(\psi, \chi)^2$ ebenfalls den Werth $+\frac{2}{3}$ besitzen.

Beweis: Ich setze $(\psi, \chi)^2 = \frac{2}{3}\varrho$, $(\chi, \varphi)^2 = \frac{2}{3}\sigma$, $(\varphi, \psi)^2 = \frac{2}{3}\tau$, so dass $\varrho^2 = \sigma^2 = \tau^2 = 1$ wird und beweise, dass $\varrho = \sigma = \tau = 1$. Zu dem Zwecke bilde ich die Identität:

$$\begin{vmatrix} (ff)^2 & (f\varphi)^2 & (f\psi)^2 & (f\chi)^2 \\ (\varphi f)^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & (\chi\chi)^2 \end{vmatrix} = 0$$

und aus derselben für ϱ, σ, τ die Relation:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & \tau & \sigma \\ 1 & \tau & -3 & \varrho \\ 1 & \sigma & \varrho & -3 \end{vmatrix} = 30 - 6\varrho\sigma\tau - 2(\varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau) - 6(\varrho + \sigma + \tau) = 0,$$

aus welcher die Behauptung sich ergiebt.

Es ist also, wenn 3 der Formen $f, \varphi, \psi, \chi \cdots$ gegeben sind, die vierte linear bestimmt; *es giebt also bei Gruppen von der Periode 3 nur vier Formen von der Periode 3.*

3) Sei die Gruppe der Periode $= 4$. Dann haben wir unter den Formeln des § 8. diese anzuwenden:

$$1 + \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3},$$

also, nach Gleichung (4):

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos^2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\varphi, \psi)^2 \sin^2\frac{\pi}{4},$$

$$(\varphi, \psi)^2 = 0.$$

Sind also $\varphi, \psi, \chi \cdots$ die zur Periode gehörigen quadratischen Formen, so hat man wieder $(\varphi\psi)^2 = 0$, $(\varphi\chi)^2 = 0$, $(\psi, \chi)^2 = 0$, und es ist also wieder die Form χ durch φ und ψ linear bestimmt. E*s giebt also, wie bei den Gruppen von der Periode 2, und aus demselben Grunde, auch hier nur drei quadratische Formen vom grössten Periodenwerthe.*

4) Nehmen wir die Periode der Gruppe $= 5$, so hat man die Formel anzuwenden:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{6}.$$

Dann hat man nach Formel (4) des § 1.:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos^2\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}(f, \varphi)^2 \sin^2\frac{\pi}{5},$$

also:

$$(f\varphi)^2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Die simultanen Invarianten der quadratischen Formen $f, \varphi, \psi, \chi \cdots$, welche zur Periode 5 gehören, haben mithin die Werthe $\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ich wähle φ, ψ, χ so, dass:

$$(f\varphi)^2 = (f\psi)^2 = (f\chi)^2 = + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

und setze:

$$(\psi\chi)^2 = \frac{2\varrho}{\sqrt{5}}, \quad (\chi\varphi)^2 = \frac{2\sigma}{\sqrt{5}}, \quad (\varphi\psi)^2 = \frac{2\tau}{\sqrt{5}},$$

so dass $\varrho^2 = \sigma^2 = \tau^2 = 1$. Die Formel:

$$\Sigma \pm (ff)^2 (\varphi\varphi)^2 (\psi\psi)^2 (\chi\chi)^2 = 0$$

liefert dann zwischen ϱ, σ, τ die Relationen:

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{5} & \tau & \sigma \\ 1 & \tau & -\sqrt{5} & \varrho \\ 1 & \sigma & \varrho & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = 0 = -2 - 2\varrho\sigma\tau\sqrt{5} - 2(\varrho+\sigma+\tau)\sqrt{5} \\ - 2(\sigma\tau + \tau\varrho + \varrho\sigma) = 0.$$

Mithin ist:

$$1 + \varrho + \sigma + \tau = 0, \quad \varrho\sigma\tau + \sigma\tau + \tau\varrho + \varrho\sigma = 0.$$

Zwei der Grössen ϱ, σ, τ haben also den Werth -1, die dritte den Werth $+1$. Hieraus folgt, dass es nur drei Formen χ geben kann, deren simultane Invarianten mit f, φ, ψ die nothwendigen Bedingungen befriedigen, *dass es also in unserer Gruppe höchstens* 6 *Formen giebt, welche zu der Periode* 5 *gehören.* — Die so bestimmten Anzahlen quadratischer Formen erscheinen zunächst als Maximalzahlen; sie werden aber auch wirklich erreicht. Im Falle die Periode 3 oder 5 ist, erkennt man es sofort durch folgende Ueberlegung. Die 2, resp. 4 Substitutionen von der Periode 3 resp 5, welche eine der quadratischen Formen fest lassen, machen aus einer der übrigen nothwendig 2 bez. 4 neue, gleichberechtigte, so dass 4 und 6 als *Minimal*werth für die Anzahl der betr. quadratischen Formen erscheint. — Ist der Periodenwerth 2 oder 4, so ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung ohne Weiteres aus den sogleich mitzutheilenden Formeln.

§ 10.

Gruppen von der Periode 2.

Setzt man, um die Bedingungen des vorangehenden Paragraphen zu befriedigen:

$$\varphi = 2x_1x_2,$$
$$\psi = x_1^2 - x_2^2,$$
$$\chi = i(x_1^2 + x_2^2),$$

schreibt sodann:

$$\frac{x_1}{x_2} = \eta,$$

so erhält man folgendes Schema für Gruppen von der Periode 2:

$$(\mathrm{II_a}) \qquad \pm \eta, \quad \mp \frac{1}{\eta};$$

dasselbe entspricht dem schon oben hervorgehobenen Falle, dass in dem Schema (II) $n = 2$ gesetzt wird.

§ 11.

Gruppen von der Periode 3. (Tetraedergruppe.)

Bei den nun noch aufzustellenden Gruppen werde ich die Untersuchung in der Weise führen, dass ich die quadratischen Formen der bei ihnen vorkommenden linearen Substitutionen durch Indices unterscheide und die Beziehungen der Substitutionen zu einander und die Vollständigkeit der Gruppe den Index-Relationen entnehme. Bei Gruppen von der Periode 3, die hier zunächst betrachtet werden sollen, treten vier quadratische Formen von der Periode 3 auf; sie mögen:

$$\varphi_\infty, \ \varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2$$

genannt sein, wo die Indices nach dem Modul 3 zu nehmen sind. Ihnen entsprechen vier Substitutionen mit dem Argumente $\frac{\pi}{3}$:

$$S_\infty, \ S_0, \ S_1, \ S_2.$$

Wir wählen die φ so, dass $(\varphi_i, \varphi_k)^2 = + \frac{2}{3}$ ist und durch S_∞ die Formen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ cyclisch in einander übergehen.

Nach den Formeln für die Transformation einer quadratischen Form, welche in § 3. gelegentlich entwickelt wurden, erhält man, indem man die Substitutionen S_∞ und S_∞^2 auf die Form φ_ϱ anwendet:

$$\varphi_{\varrho+1} = \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \varphi_\varrho - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} \cdot \varphi_\infty + i \sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty \cdot \varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+2} = \cos\frac{4\pi}{3} \cdot \varphi_\varrho - \frac{2}{3}\sin^2\frac{2\pi}{3} \cdot \varphi_\infty - i \sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty \cdot \varphi_\varrho),$$

und andererseits, indem man S_ϱ und S_ϱ^2 auf φ_∞ anwendet:

$$\psi_1 = \cos\frac{2\pi}{3} \cdot \varphi_\infty - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} \cdot \varphi_\infty - i \sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

$$\psi_2 = \cos\frac{4\pi}{3} \cdot \varphi_\infty - \frac{2}{3}\sin^2\frac{2\pi}{3} \cdot \varphi_\infty + i \sin\frac{2\pi}{3}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

Hieraus folgt:

$$\varphi_\infty + \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = 0, \quad \psi_1 = \varphi_{\varrho+2}, \quad \psi_2 = \varphi_{\varrho+1}.$$

Es führt also S_ϱ die Formen $\varphi_\infty, \varphi_{\varrho+2}, \varphi_{\varrho+1}$ cyclisch in einander über.

Geht vermöge S_∞^μ φ_x in φ_y über, so hat man die Relation:

$$U_\infty^\mu = x - y - \mu \equiv 0, \text{ (mod 3)}.$$

Für S_ϱ^λ finden wir analog:

$$\frac{1}{x-\varrho} - \frac{1}{y-\varrho} \equiv \lambda \text{ (mod 3)}$$

oder:

$$U_\varrho^\lambda = \lambda xy + x(1-\lambda\varrho) - y(1+\lambda\varrho) + \lambda\varrho^2 \equiv 0, \text{ (mod 3)}.$$

Beides sind lineare Substitutionen, deren Determinante $\equiv 1$ (mod 3). Dasselbe gilt daher für alle Indexrelationen, die den Combinationen der S_∞, S_ϱ entsprechen. Sie haben die Form:

$$U = axy + bx + cy + d \equiv 0, \quad (ad-bc) \equiv 1, \quad \text{(mod 3)}.$$

Aber man hat:

$$U_\varrho^\lambda U_\infty^\mu = \lambda xy + x(1+\lambda\mu-\lambda\varrho) - y(1+\lambda\varrho) + \lambda\varrho^2 - \mu - \lambda\mu\varrho \equiv 0 \text{ (mod 3)}.$$

Man kann hier λ, μ, ϱ so bestimmen, dass ein beliebiges U resultirt. *Mithin entspricht jedem U eine Substitution der Gruppe, die durch Combination der S_∞, S_ϱ entsteht, und jede Substitution derselben ist in der Gestalt darstellbar $S_\varrho^\lambda S_\infty^\mu$.*

Diejenigen U, bei denen $a=0$ ist, lassen sich in die Form setzen:

$$x - y - \mu \equiv 0, \text{ (mod 3)};$$

sie entsprechen also den Substitutionen S_∞^μ.

Die übrigen U kann man schreiben:

$$(x-\alpha)(y-\beta) + 1 \equiv 0 \text{ (mod 3)}.$$

Ihre Anzahl ist 9, so dass unsere Gruppe aus 12 Substitutionen besteht. Ist $\alpha = \beta$, so entspricht U eine Substitution T mit der Periode 2; dieselbe lässt $\varphi_\alpha + \varphi_\infty$ ungeändert; mithin ist die quadratische Form f_α von T diesem Ausdrucke proportional. Wir gelangen so zu den Formeln:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} f_\alpha = \varphi_\alpha + \varphi_\infty; \quad (f_\alpha, f_\beta)^2 = 0; \quad \sqrt{3} \cdot \varphi_\infty = f_0 + f_1 + f_2.$$

Ist $\alpha \gtrless \beta$, so entspricht U eine Substitution mit der Periode 3, d. h. eine der Substitutionen S_ϱ^λ. — *Da sich alle U aus den beiden*

$$x - y - \mu \equiv 0, \quad (x-\alpha)(y-\alpha) + 1 \equiv 0 \text{ (mod 3)}$$

zusammensetzen lassen, so sind alle Substitutionen der Gruppe in der Form S_∞^μ und $S_\infty^\mu T_\alpha$ enthalten.

Um die Gruppe in kanonischer Form zu erhalten, setze man:

$$f_0 = 2x_1x_2, \quad f_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad f_2 = ix_1^2 + ix_2^2;$$

es wird dann:

$$\sqrt{3}\cdot\varphi_\infty = x_1^2(1+i) + 2x_1x_2 + x_2^2(i-1),$$

$$T_0 = x_1y_2 + x_2y_1; \quad T_1 = x_1y_1 - x_2y_2; \quad T_2 = ix_1y_1 + ix_2y_2;$$

$$S_\infty = x_1y_1\left(\frac{i-1}{2}\right) + \frac{i}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - x_2y_2\left(\frac{i+1}{2}\right) + \frac{1}{2}(y_1x_2 - y_2x_1)$$
$$= \frac{-1}{1+i}(x_1y_1 - ix_1y_2 + x_2y_1 + ix_2y_2).$$

Durch diese Substitutionen geht $\frac{x_1}{x_2} = \eta$ in folgende Werthe über:

$$\pm\eta, \quad \pm\frac{1}{\eta}, \quad i\frac{1+\eta}{1-\eta},$$

und also durch ihre Combinationen in:

$$\text{(III)} \quad \pm\eta, \quad \pm\frac{1}{\eta}, \quad \pm i\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad \pm i\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \pm\frac{i+\eta}{i-\eta}, \quad \pm\frac{i-\eta}{i+\eta}.$$

Dies sind die 12 *Substitutionen unserer Gruppe.*

Es ist leicht zu sehen, dass sie nicht noch in einer umfassenderen Gruppe enthalten sein kann, welche ebenfalls die Periode 3 besitzt. Denn durch die Substitutionen einer solchen Gruppe müssen die vier Formen φ_∞, φ_0, φ_1, φ_2 unter einander vertauscht werden, da es, von der identischen Substitution abgesehen, keine Substitution giebt, welche jedes der φ ungeändert lässt. Aber es giebt nur 24 Vertauschungen von vier Dingen und unter ihnen nur 12, deren Periode $\leqq 3$ ist, d. h. die, wiederholt angewandt, nach höchstens dreimaliger Anwendung die Identität ergeben. Eben diese sind es, die in unserer Gruppe vorkommen.

§ 12.

Gruppen von der Periode 4. (Oktaedergruppe.)

Zur Periode 4 gehören 3 quadratische Formen:

$$f_\infty, f_0, f_1;$$

ihnen entsprechen 3 Substitutionen mit dem Argumente $\frac{\pi}{4}$:

$$S_\infty, S_0, S_1,$$

und zwischen ihnen bestehen die Relationen $(f_i, f_k)^2 = 0$. Jedes S_ϱ lässt das zugehörige f_ϱ unverändert und vertauscht die beiden anderen f cyclisch bis auf das Vorzeichen. — Die Substitution S_ϱ^2 also lässt f_ϱ unverändert und ändert an den beiden anderen f nur das Vorzeichen. *Ueberhaupt also lassen die* 4 *Substitutionen*

$$(yx), \quad S_\infty^2, \quad S_0^2, \quad S_1^2$$

*die f bis aufs Vorzeichen ungeändert**), und man zeigt leicht, dass sie die einzigen Substitutionen sind, welche diese Eigenschaft besitzen.

---

*) Sie bilden für sich eine Gruppe von der Periode 2 (§ 10.).

Combinirt man sie mit irgend einer Substitution der Gruppe, so erhält man 4 Substitutionen, welche die Formen f in derselben Weise permutiren; andere, als diese 4 Substitutionen, müssen eine andere Permutation der f bewirken. *Da es 6 Vertauschungen von drei Dingen giebt, so umfasst unsere Gruppe (höchstens) 24 Substitutionen und ihnen entsprechen 6 Relationen zwischen den Indices der f.* Die letzteren gewinnen wir so. Geht durch S_ϱ f_x in $\pm f_y$ über, so hat man:

$$\frac{1}{x-\varrho} - \frac{1}{y-\varrho} \equiv 1 \pmod 2,$$

oder:

$$U_\varrho = xy - x(\varrho+1) + y(1-\varrho) + \varrho^2 \equiv 0 \pmod 2)$$

und, wenn $\varrho = \infty$ ist:

$$U_\infty = x - y - 1 \equiv 0 \pmod 2.$$

Den Substitutionen S_ϱ und S_∞ und ihren Combinationen entsprechen die U_ϱ, U_∞ und ihre Combinationen. Jede Substitution:

$$U = axy + bx + cy + d \equiv 0, \quad ad - bc \equiv 1 \pmod 2$$

lässt sich in eine der Formen:

$$x - y, \quad U_\infty, \quad U_\varrho,$$
$$U_\varrho U_\infty = xy - \varrho x + y(1-\varrho) + 1 \equiv 0 \pmod 2$$

bringen. *Man hat also in der That 6 Relationen zwischen den Indices und 24 Substitutionen der Gruppe.*

Den $U_\varrho U_\infty$ entsprechen 8 Substitutionen mit der Periode 3, welche f_∞, f_0, f_1 cyclisch in einander permutiren; dieselben bilden mit den vier obengenannten Substitutionen (yx), S^2_∞, S^2_0, S^2_1 zusammen die im vorigen Paragraphen betrachtete Tetraedergruppe. Die Oktaedergruppe entsteht, indem man sie mit U_∞ combinirt.

Setzt man wieder, wie oben:

$$f_\infty = 2x_1x_2; \quad f_0 = x_1^2 - x_2^2; \quad f_2 = ix_1^2 + ix_2^2,$$

so geht durch die Substitution der Tetraedergruppe $\eta = \frac{x_1}{x_2}$ über in:

$$\pm\eta, \quad \pm\frac{1}{\eta}, \quad \pm i\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad \pm i\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \pm\frac{i+\eta}{i-\eta}, \quad \pm\frac{i-\eta}{i+\eta},$$

durch U_∞ einfach in $i\eta$, *mithin durch die Oktaedergruppe in:*

$$\text{(IV)} \quad i^\varrho\eta, \quad \frac{i^\varrho}{\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{i+\eta}{i-\eta}, \quad i^\varrho\cdot\frac{i-\eta}{i+\eta}.$$

§ 13.

Gruppen von der Periode 5. (Ikosaedergruppe.)

Zur Periode 5 gehören 6 quadratische Formen:

$$\varphi_\infty, \; \varphi_0, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \; \varphi_3, \; \varphi_4;$$

ihnen entsprechen 6 Substitutionen mit dem Argument $\frac{\pi}{5}$:

$$S_\infty,\ S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4.$$

Wir wählen die φ so, dass $(\varphi_\infty, \varphi_i)^2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ und dass S_∞

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4$$

cyclisch in einander überführt. Wendet man S_∞, S_∞^2, S_∞^3, S_∞^4 auf φ_ϱ an, so entsteht also:

$$\varphi_{\varrho+1} = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+2} = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+3} = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty - i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\varphi_{\varrho+4} = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\infty - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

Umgekehrt geht durch S_ϱ, S_ϱ^2, S_ϱ^3, S_ϱ^4 aus φ_∞ hervor:

$$\psi_1 = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\psi_2 = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho - i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\psi_3 = \cos\frac{4\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho),$$

$$\psi_4 = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot\varphi_\infty + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\cdot\varphi_\varrho + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho).$$

Nun ist:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin^2\frac{\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5},\qquad \frac{2}{\sqrt{5}}\sin^2\frac{2\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5},$$

also:

$$\varphi_{\varrho+1} = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\varrho + \varphi_\infty) + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\varphi_{\varrho+2} = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\varrho - \varphi_\infty) + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\varphi_{\varrho+3} = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\varrho - \varphi_\infty) - i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\varphi_{\varrho+4} = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\varrho + \varphi_\infty) - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_1 = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty + \varphi_\varrho) - i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_2 = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty - \varphi_\varrho) - i\sin\frac{4\pi}{4}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_3 = \cos\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty - \varphi_\varrho) + i\sin\frac{4\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

$$\psi_4 = \cos\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty + \varphi_\varrho) + i\sin\frac{2\pi}{5}(\varphi_\infty, \varphi_\varrho);$$

oder:

$$\psi_1 = \varphi_{\varrho+4}, \quad \psi_2 = -\varphi_{\varrho+2}, \quad \psi_3 = -\varphi_{\varrho+3}, \quad \psi_4 = \varphi_{\varrho+1}.$$

Es führt also S_ϱ cyclisch in einander über:

$$\varphi_\infty, \varphi_{\varrho+4}, -\varphi_{\varrho+2}, -\varphi_{\varrho+3}, \varphi_{\varrho+1}.$$

Den Substitutionen S_∞^μ entsprechen die Indexrelationen:

$$U_\infty^\mu = x - y - \mu \equiv 0 \pmod 5;$$

den S_ϱ^λ diese:

$$\frac{1}{x-\varrho} - \frac{1}{y-\varrho} \equiv \lambda \pmod 5$$

oder:

$$U_\varrho^\lambda = \lambda xy + x(1-\varrho\lambda) - y(1+\varrho\lambda) + \varrho^2\lambda \equiv 0 \pmod 5.$$

Bei allen diesen ist die Determinante $\equiv \pm 1$ (mod. 5); dasselbe gilt also auch für ihre Combinationen.

Umgekehrt kann man jede Substitution:

$$U = axy + bx + cy + d \equiv 0, \quad ad - bc \equiv \pm 1 \pmod 5$$

in eine der vier Formen bringen:

$$(1) \qquad U_\infty^\mu = x - y - \mu \equiv 0 \pmod 5,$$

$$(2) \qquad U_\infty^\mu U_2 U_4^3 = x + y + \mu \equiv 0 \pmod 5,$$

$$(3) \qquad U_\varrho U_\infty^\mu = xy + x(1+\mu-\varrho) - y(1+\varrho) + \varrho^2 - \mu - \mu\varrho \equiv 0 \pmod 5,$$

$$(4) \qquad U_\varrho U_\infty^\mu U_2 U_4^3 = xy - x(1+\mu-\varrho) - y(1+\varrho) - \varrho^2 + \mu + \mu\varrho \equiv 0 \pmod 5;$$

ihre Anzahl ist 60; *jeder entspricht eine und nur eine Substitution unserer Gruppe.* Denn es giebt, abgesehen von der identischen Substitution, keine andere, welche die 6 Formen $\varphi_\infty, \varphi_0, \cdots \varphi_4$ ungeändert lässt. Jeder Vertauschung der Indices entspricht also nur eine Substitution.

Um die Gruppe in kanonischer Form aufzustellen, bemerke man vorab dieses. S_2 entspricht $U_2 = xy - x + 2y - 1$, es führt $\left(\frac{x-2}{5}\right)\varphi_x$ in $\left(\frac{y-2}{5}\right)\varphi_y$ über; S_4^3 entspricht $U_4^3 = yz - z - 2y + 1$, es führt $\left(\frac{y-4}{5}\right)\varphi_y$ in $\left(\frac{z-4}{5}\right)\varphi_z$ über. Also entspricht $S_2 S_4^3$ $U_2 U_4^3 = x + z$; es führt φ_x in $\left(\frac{x-2}{5}\right)\left(\frac{y-2}{5}\right)\left(\frac{y-4}{5}\right)\left(\frac{z-4}{5}\right)\varphi_z = -\varphi_{-x}$ über. Hierbei ändern sich die Formen $(\varphi_\infty, \varphi_0)$, $\varphi_1 - \varphi_4$, $\varphi_2 - \varphi_3$ nicht; sie sind also der quadratischen Form von $S_2 S_4^3$ proportional.

Jetzt nehme man für φ_∞ und φ_0 irgend zwei quadratische Formen, bei denen:

$$(\varphi_\infty, \varphi_\infty)^2 = -2, \quad (\varphi_0, \varphi_0)^2 = -2, \quad (\varphi_0, \varphi_\infty)^2 = \frac{-2}{\sqrt{5}};$$

also etwa:

$$\varphi_\infty = 2x_1x_2, \quad \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}(x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2).$$

Es wird dann:

$$(\varphi_\infty, \varphi_0) = \frac{-2}{\sqrt{5}}(x_1^2 + x_2^2); \quad \varphi_\varrho = \frac{2}{\sqrt{5}}(\varepsilon^{-\varrho}x_1^2 + x_1x_2 - \varepsilon^\varrho x_2^2),$$

wo $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Für S_∞, $S_2S_4^3$, S_ϱ erhalten wir daher die Substitutionen:

$$x_1y_2 - \varepsilon x_2y_1 = 0; \quad x_1y_1 + x_2y_2 = 0,$$

$$\frac{2i}{\sqrt{5}}\sin\frac{2\pi}{5}\left(\varepsilon^{-\varrho}x_1y_1 + \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{2} - \varepsilon^\varrho x_2y_2\right) + (y_1x_2 - y_2x_1)\cdot\cos\frac{2\pi}{5} = 0.$$

Da $\sqrt{5} = 4\sin\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{2\pi}{5}$, also $\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$ $= -\left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5}\right)$, sowie $\frac{1}{2} = -\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5}$, so lässt sich die letzte Formel (für S_ϱ) folgendermassen zusammenziehen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\varepsilon^{-\varrho}x_1y_1 - (x_1y_2 + x_2y_1)\right)\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) - \varepsilon^\varrho x_2y_2 \\ &\qquad + (x_1y_2 - y_1x_2)\, i\left(\sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5}\right) \\ &= \varepsilon^{-\varrho}x_1y_1 - (\varepsilon^2 + \varepsilon^4)x_1y_2 - (\varepsilon + \varepsilon^3)x_2y_1 - \varepsilon^\varrho x_2y_2. \end{aligned}$$

Durch S_∞, $S_2S_4^3$, S_ϱ geht also nunmehr $\frac{x_1}{x_2} = \eta$ in folgende Werthe über:

$$\varepsilon\eta, \quad -\frac{1}{\eta}, \quad \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon + \varepsilon^3)}$$

und also überhaupt durch die Combinationen S_∞^μ, $S_2S_4^3S_\infty^\mu$, $S_\varrho S_\infty^\mu$, $S_\varrho S_\infty^\mu S_2S_4^3$ in diese:

$$\text{(V)} \qquad \varepsilon^\mu\eta, \quad -\frac{\varepsilon^\mu}{\eta}, \quad \varepsilon^\mu\frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon + \varepsilon^3)}, \quad \varepsilon^\mu\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta + (\varepsilon + \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}.$$

Dies ist die kanonische Darstellung der Ikosaedergruppe.

Von ihren 60 Substitutionen hat die Identität die Periode 1; die 15 Substitutionen, welche η in

$$-\frac{\varepsilon^\mu}{\eta}, \quad \varepsilon^4\frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon + \varepsilon^3)}, \quad \varepsilon^{2\varrho}\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta + (\varepsilon + \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}$$

verwandeln, haben die Periode 2; die 20 Substitutionen, die dem η entsprechen lassen:

$$\varepsilon\frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon + \varepsilon^3)}, \quad \varepsilon^2\frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon^4)\eta + \varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta - (\varepsilon + \varepsilon^3)},$$

$$\varepsilon^{2\varrho+1}\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho},\quad \varepsilon^{2\varrho+4}\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho},$$

haben die Periode 3; die 24 Substitutionen endlich, vermöge deren η übergeht in:

$$\varepsilon^\mu\eta,\quad \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta-(\varepsilon+\varepsilon^3)},\quad \varepsilon^3\frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho}{\varepsilon^{-\varrho}\eta-(\varepsilon+\varepsilon^3)},$$

$$\varepsilon^{2\varrho+2}\cdot\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho},\quad \varepsilon^{2\varrho+3}\cdot\frac{-\varepsilon^{-\varrho}\eta+(\varepsilon+\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^\varrho},$$

haben die Periode 5.

Endlich beweist man noch, dass diese Gruppe von 60 Substitutionen nicht noch in einer umfassenderen Gruppe von der Periode 5 (und also überhaupt in keiner umfassenden Gruppe) enthalten ist. Denn es giebt keine anderen Vertauschungen der φ_∞, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, als die vorangeführten 60, bei denen die zwischen den φ bestehenden Invariantenrelationen ungeändert bleiben.

Erlangen, im Februar 1877.