SULLE EQUAZIONI LINEARI TOTALMENTE ELLITTICHE ALLE DERIVATE PARZIALI.

Memoria di **Eugenio Elia Levi** (Pisa).

Adunanza del 14 luglio 1907.

INTRODUZIONE.

1. Sia

$$
(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(z) \equiv \Lambda(z) + \sum B_{ik} \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = F(xy) \\ \left[\Lambda(z) = \sum\limits_{l+m=2n} a_{lm} \dfrac{\partial^{2n} z}{\partial x^l \partial y^m};\quad i+k \leqq 2n-1;\quad B_{ik} = B_{ik}(xy);\quad a_{lm} = a_{lm}(xy)\right] \end{cases}
$$

una equazione differenziale lineare di ordine $2n$ i cui coefficienti ammettano derivate finite e continue fino all'ordine che è uguale alla somma dei loro indici.

Sia

$$
(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{G}(u) \equiv \Lambda(u) + \sum b_{ik} \dfrac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = 0 \\ \left[b_{ik} = (-1)^{i+k} B_{ik} + \sum\limits_{\rho+\sigma > i+k} (-1)^{\rho+\sigma} \dbinom{\rho}{i} \dbinom{\sigma}{k} \dfrac{\partial^{\rho+\sigma-i-k} B_{\rho\sigma}}{\partial x^{\rho-i} \partial y^{\sigma-k}} + \sum\limits_{l+m=2n} \dfrac{\partial^{2n-i-k} a_{lm}}{\partial x^{l-i} \partial y^{m-k}}\right] \end{cases}
$$

l'equazione aggiunta della $\mathfrak{F}(z)$.

Poniamo:

$$
(3)\quad \begin{cases} M = B_{10} z u + \left[B_{20} u \dfrac{\partial z}{\partial x} - z \dfrac{\partial (B_{20} u)}{\partial x}\right] + \dfrac{1}{2}\left[B_{11} u \dfrac{\partial z}{\partial y} - z \dfrac{\partial (B_{11} u)}{\partial y}\right] + \cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + \left[a_{2n,0} u \dfrac{\partial^{2n-1} z}{\partial x^{2n-1}} - \dfrac{\partial (a_{2n,0} u)}{\partial x} \dfrac{\partial^{2n-2} z}{\partial x^{2n-2}} + \cdots - z \dfrac{\partial^{2n-1} (a_{2n,0} u)}{\partial x^{2n-1}}\right] \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}
$$

ed

$N =$ Espressione analoga in cui sono scambiati x ed y;

M e N saranno funzioni bilineari in z e nelle sue derivate di ordine $\leqq 2n-1$, ed in u e nelle sue derivate di ordine $\leqq 2n-1$. Si sa [1]) allora che, detto C un campo

[1]) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces,* t. II, pag. 72 e seg.

in cui esistano e siano finite z, u e le loro derivate di ordine $\leqq 2n$ e c il suo contorno, si ha

$$\int\int_C [u\mathfrak{F}(z) - z\mathfrak{G}(u)]\,dx\,dy = \int_c [M\,dy - N\,dx].$$

Se dunque z soddisfa alla (1) ed u soddisfa alla $\mathfrak{G}(u) = 0$, si ha:

(4) $$\int\int_C u F(xy)\,dx\,dy = \int_c (M\,dy - N\,dx).$$

Questa formula ha rispetto all'equazione (1) l'ufficio che ha la formula di GREEN nella teoria dell'equazioni di 2° ordine. Ed infatti mostreremo facilmente come, ammesso che della (2) si conosca una soluzione $u(xy;\ x_1 y_1)$ dipendente dai parametri $x_1 y_1$ e tale che per $x = x_1$, $y = y_1$ presenti una singolarità di tipo logaritmico che tosto preciseremo, ed ammesso che siano noti i valori che una soluzione z della (1) prende sul contorno c insieme con quelli delle sue derivate di ordine $\leqq 2n - 1$, questa formula ci permette di esprimere il valore della z in un qualunque punto di C mediante questi valori.

2. Ed invero si supponga che la funzione $u(xy;\ x_1 y_1)$ per $(xy) \not\equiv (x_1 y_1)$ sia finita e continua insieme colle sue derivate di ordine $\leqq 2n$ e, come si disse, soddisfaccia alla (2): e che per $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ le derivate di ordine $2n - 1$ di u divengano infinite del primo ordine rispetto a $\frac{1}{r}\left[r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}\right]$ e quelle di ordine minore restino finite o divengano infinite d'ordine < 1; talchè $r\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k}$ resti costantemente inferiore ad una certa quantità finita per $i + k = 2n - 1$, mentre per $i + k < 2n - 1$ si abbia $\lim_{r=0} r\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = 0$.

Si descriva intorno al punto $x_1 y_1$ un cerchio τ di raggio a, di cui chiamiamo c_1 il contorno. Si applichi la (4) assumendo come campo C il campo $C - \tau$; il suo contorno è formato da c e da c_1; e si avrà

$$\int\int_{C-\tau} u F(xy)\,dx\,dy = \int_c (M\,dy - N\,dx) - \int_{c_1} (M\,dy - N\,dx).$$

Si faccia tendere τ a zero. A causa della supposta continuità di z e delle sue derivate di ordine $< 2n$, e del fatto che la u è continua insieme colle sue derivate di ordine $< 2n - 1$ e al più hanno nel punto $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ un infinito di ordine minore di 1, sarà

$$\lim_{\tau=0} \int_{c_1} (M\,dy - N\,dx) = \lim_{a=0} \int_0^{2\pi} [M a \cos\vartheta + N a \operatorname{sen}\vartheta]\,d\vartheta$$

$$= z(x_1 y_1) \lim_{a=0} \int_0^{2\pi} [M_1 a \cos\vartheta + N_1 a \operatorname{sen}\vartheta]\,d\vartheta,$$

dove M_1 ed N_1 sono dati da quella parte di (3) che contiene derivate di ordine $2n - 1$

di u, divisa per χ:

$$
(5)\qquad \begin{cases} M_1 = -\left[a_{2n\,0}\dfrac{\partial^{2n-1}u}{\partial x^{2n-1}} + \dfrac{1}{2}\sum_1^{2n-1}{}_m\, a_{2n-m\,m}\dfrac{\partial^{2n-1}u}{\partial x^{2n-m-1}\,dy^m}\right], \\ N_1 = -\left[a_{0\,2n}\dfrac{\partial^{2n-1}u}{\partial y^{2n-1}} + \dfrac{1}{2}\sum_1^{2n-1}{}_m\, a_{m\,2n-m}\dfrac{\partial^{2n-1}u}{\partial x^{m}\,\partial y^{2n-m-1}}\right]. \end{cases}
$$

Ammettiamo che il limite precedente esista: per le ipotesi fatte sopra la $u(xy;\, x_1 y_1)$ noi sappiamo soltanto che la quantità $\int_c [M_1\, a\cos\vartheta + N_1\, a\,\mathrm{sen}\,\vartheta]\,d\vartheta$ è sempre finita, comunque piccolo sia a. Inoltre, poichè $u F(xy)$ è certamente integrabile superficialmente,

$$
\lim_{\tau=0}\iint_{C-\tau} u F(xy)\,dx\,dy = \iint_C u F(xy)\,dx\,dy.
$$

Quindi si ha

$$
\iint_C u F(xy)\,dx\,dy = \int_c [M\,dx - N\,dy] - \chi(x_1 y_1)\lim_{a=0}\int_0^{2\pi}[M_1\, a\cos\vartheta + N_1\, a\,\mathrm{sen}\,\vartheta]\,d\vartheta.
$$

Se allora si suppone che il limite contenuto nel secondo membro sia $\neq 0$ si avrà

$$
(6)\qquad \chi(x_1 y_1) = \frac{1}{\lim\limits_{a=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}[M_1 a\cos\vartheta + N_1 a\,\mathrm{sen}\,\vartheta]\,d\vartheta}\left[-\iint_C uF(xy)\,dx\,dy + \int_c [M\,dx - N\,dy]\right].
$$

3. La formula (6) è di capitale importanza nella teoria delle equazioni (1) cui essa può applicarsi: di quelle equazioni cioè la cui aggiunta ammette una soluzione u che soddisfaccia alle condizioni del n° precedente [e per cui si può mostrare che il limite che compare in (6) esiste ed è $\neq 0$].

Su essa infatti si può far poggiare la dimostrazione del carattere analitico delle soluzioni della equazione (1) quando i coefficienti siano analitici, come del resto si vedrà più diffusamente in seguito. E quindi dedurre, ad esempio, il teorema di unicità per il problema di CAUCHY relativo all'equazione (1) nel caso che i dati iniziali siano analitici pur non supponendo *a priori* analitiche le soluzioni dell'equazione.

Ma di più essa ci dà utili indicazioni sulla natura dei problemi dei valori al contorno che possiamo porci per queste equazioni dal punto di vista delle funzioni di variabili reali. Così, ove sia provato che esista una soluzione di (2) che prenda assegnati valori al contorno insieme colle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, risulta da (6) che le soluzioni di (1) sono completamente determinate pei valori che esse e le loro prime $n-1$ derivate prendono sul contorno. Basti osservare che potremo in questa ipotesi trovare una funzione u che soddisfaccia alle condizioni del n° precedente ed abbia nulle al contorno le sue derivate dei primi $n-1$ ordini. Ora nell'espressione di M ed N la somma degli ordini di derivazione di χ e di u è sempre $\leqq 2n-1$, quindi le derivate di χ di ordine $\geqq n$ compariranno moltiplicate sempre per una derivata di u di ordine $\leqq n-1$: e perciò, ove la u abbia nulle al contorno le derivate dei primi $n-1$ ordini, la (6) esprime χ per i valori che essa e le sue derivate dei primi $n-1$ ordini prendono sul contorno. Onde l'enunciato teorema di unicità. E la corrispondente dimostrazione del teorema di esistenza è in queste ipotesi ridotta alla verifica se la funzione data da (6) soddisfa alle condizioni imposte.

Ma nello stesso tempo viene ad escludersi che per le equazioni (1) di tale tipo si possa porre dal punto di vista delle funzioni di variabili reali il problema di CAUCHY: l'osservazione che sopra si fece relativa al carattere analitico delle soluzioni di (1) basta infatti — come facilmente si può vedere — a dimostrare che dati ad arbitrio i valori delle funzione e delle sue prime $2n-1$ derivate normali sopra una curva aperta analitica AB quali funzioni non analitiche dell'arco della curva non esisterà in generale nessuna soluzione di (1) che soddisfaccia su AB alle assegnate condizioni [2]).

4. Per le condizioni imposte nel n° 2 alla funzione $u(xy;\, x_1 y_1)$ noi vediamo che essa deve avere un punto singolare isolato, e deve essere soluzione della equazione $\mathfrak{G}(u) = 0$. Per un teorema del DELASSUS [3]) si può prevedere che ciò non potrà essere che quando le caratteristiche dell'equazione $\mathfrak{G}(u) = 0$ — e quindi anche dell'equazione (1) — sono tutte immaginarie: o, come diremo più brevemente, quando l'equazione è *totalmente ellittica.*

Chiameremo *soluzioni fondamentali dell'equazione* (Grundlösungen)

$$(2) \qquad \mathfrak{G}(u) \equiv \Lambda(u) + \sum_{i+k<2n} b_{ik} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = 0$$

le soluzioni di questa equazione che soddisfanno alle condizioni del n° 2. La ricerca delle soluzioni fondamentali per le equazioni lineari ellittiche di secondo ordine quando i coefficienti dell'equazione sono funzioni analitiche di x ed y fu compiuta con metodi diversi da una parte dall'HILBERT e dall'HEDRICK [4]), dall'altra dal PICARD e dall'HOLMGREN [5]). Per le equazioni totalmente ellittiche di ordine superiore le ricerche si

---

[2]) Cfr. la mia Nota: *Sul problema di* CAUCHY [Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, serie V, vol. XVI, 2° semestre 1907, pp. 105-112].

[3]) E. DELASSUS, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, 3ᵉ série, t. XII (1895), pp. S.53-S.123]. Veramente il teorema del DELASSUS ha portata leggermente diversa da quella che occorrerebbe affinchè l'osservazione precedente avesse vigore di deduzione. Per esso infatti si afferma soltanto che, supposta la equazione a coefficienti analitici, se in un punto una sua soluzione non è sviluppabile in serie di TAYLOR essa non è neppure sviluppabile in serie di TAYLOR in nessun punto di ogni caratteristica reale per esso: onde risulta che le soluzioni non possono avere singolarità isolate dal punto di vista delle funzioni di variabili complesse, non già dal punto di vista delle funzioni di variabile reale. Tuttavia questo teorema e lo studio delle equazioni del 2° ordine giustificano la presunzione del testo. Cfr. pure LE ROUX, *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes* [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, 3ᵉ série, t. XII (1895), pp. 227-316]; *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5ᵉ série, t. IV (1898), pp. 359-408]. Vedi anche il bell'articolo del SOMMERFELD nell'Encyklopädie d. math. Wiss., Bd. II, A 7 c.

[4]) HEDRICK, *Über den analytischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen.* Diss. (Göttingen 1901), pag. 37 e seg.

[5]) HOLMGREN, *Ueber die Existenz der Grundlösung bei einer partiellen Differentialgleichung der 2. Ordnung von elliptischem Typus* [Mathematische Annalen, t. LVIII (1904), pp. 404-412]. Si noti che nel caso delle equazioni di 2° ordine in due variabili, si può senz'altro supporre che i coefficienti delle derivate di 2° ordine siano costanti: ciò non è nel caso che l'equazione sia di ordine superiore od in più variabili.

limitano finora al caso in cui l'equazione sia a coefficienti costanti e contenenti solo derivate di ordine massimo ($a_{lm} = \text{cost.}$, $b_{ik} = 0$): in questo caso il problema si trova completamente risoluto in un lavoro del SOMIGLIANA [6]).

Nel presente lavoro io mi propongo di mostrare l'esistenza delle soluzioni fondamentali per le equazioni ellittiche di ordine superiore: mi pare però che il metodo non sia senza efficacia anche nel completare i risultati noti per le equazioni del secondo ordine: poichè in esso non è, come si vedrà, minimamente fatta l'ipotesi che i coefficienti dell'equazione siano analitici. Ad ottenere tale risultato è dedicato il § I.

Nel § II dimostro il carattere analitico delle soluzioni delle equazioni (1) a coefficienti analitici poggiandomi sui risultati del § I. Nel § III do alcune generalizzazioni dei risultati precedenti alle equazioni in più variabili ed ai sistemi di equazioni. Rimando ivi per le indicazioni bibliografiche relative a queste generalizzazioni del problema [7]).

§ I.

Ipotesi e concetto generale del metodo.

5. Sia

$$(2)\qquad \mathfrak{G}(u) \equiv \Lambda(u) + \sum_{i+k<2n} b_{ik}(xy)\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial y^k} = 0, \qquad \Lambda(u) \equiv \sum_{l+m=2n} a_{lm}(xy)\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^l \partial y^m}$$

l'equazione di cui ci proponiamo di trovare le soluzioni fondamentali. Supponiamo che in un determinato campo C del piano xy i coefficienti $a_{lm}(xy)$ siano finiti e continui insieme colle loro derivate dei primi $2n+1$ ordini, mentre per i coefficienti b_{ik} non facciamo altra ipotesi che quella che siano finiti insieme colle loro derivate prime in C. Inoltre supporremo che in C le radici dell'equazione delle caratteristiche

$$(7)\qquad \sum_{l+m=2n} a_{lm}(xy)\,\alpha^l = 0$$

siano tutte complesse, e limitate e continue insieme colle loro derivate dei primi $(2n+1)$ ordini [8]); e che esse abbiano in tutto C multiplicità costante. Indicheremo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}$ le radici e porremo

$$\alpha_{2i-1}(xy) = p_i(xy) + i q_i(xy), \qquad \alpha_{2i}(xy) = p_i(xy) - i q_i(xy) \qquad [q_i(xy) > 0],$$

per modo che due radici successive siano complesse coniugate, e quella di indice di-

---

[6]) SOMIGLIANA, *Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. XXII (1894), pp. 143-156], § 2.

[7]) I principali risultati di questo lavoro furono già enunciati in una Nota pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, portante lo stesso titolo di questo lavoro medesimo [serie V, vol. XVI, 1° semestre 1907, pp. 932-938].

[8]) Potremmo aumentare l'economia delle ipotesi non imponendo che le a_{lm} e le radici α_j abbiano derivate di ordine $2n+1$ finite e che le b_{ik} abbiano derivate prime finite, ma chiedendo solo che, se $f(xy)$ è una qualunque delle derivate $2n$-esime delle a_{lm} o delle α_i oppure è una b_{ik}, essa soddisfaccia alla condizione che i rapporti incrementali di $f(xy)$ sui varii raggi per xy siano integrabili uniformemente anche ridotti ai loro valori assoluti.

spari abbia il coefficiente dell'immaginario > 0: per le ipotesi fatte esisteranno due numeri positivi μ ed $\mathbf{M}$ tali che in C

$$(8) \qquad q_i(xy) > \mu, \qquad |\alpha_j(xy)| < \mathbf{M} \qquad (i = 1, \ldots n, j = 1, \ldots 2n).$$

Queste ipotesi portano seco che in C si abbia $a_{2n0} \neq 0$, $a_{02n} \neq 0$.

Ciò premesso, noi cercheremo di porre la funzione u sotto la forma

$$(9) \qquad u(xy; x_1y_1) = \psi(xy; x_1y_1) + \iint_C \psi(xy; \xi\eta) f(\xi\eta; x_1y_1) d\xi d\eta$$

valendoci delle due nuove funzioni indeterminate $\psi(xy; x_1y_1)$ e $f(xy; x_1y_1)$ per modo di raccogliere sopra la prima tutte le condizioni dipendenti dal comportamento imposto alle derivate di u per $(xy) \equiv (x_1y_1)$ e sopra la seconda la condizione che la u soddisfaccia alla (2).

A ciò siamo indotti dall'osservazione — che varie considerazioni rendono intuitiva e che del resto noi giustificheremo diffusamente nel seguito — che, appena $f(xy; x_1y_1)$ è finita e continua in tutto C od anche diviene infinita in $(xy) \equiv (x_1y_1)$ di ordine $\leqq 1$, l'integrale $W(xy; x_1y_1) = \iint_C \psi(xy; \xi\eta) f(\xi\eta; x_1y_1) d\xi d\eta$ e le sue derivate hanno una singolarità di ordine minore che $\psi(xy; x_1y_1)$ e le derivate corrispondenti; così che, realmente, ove la $\psi(xy; x_1y_1)$ abbia il comportamento assegnato alla $u(xy; x_1y_1)$ e sia stato possibile determinare la $f(xy; x_1y_1)$ per modo che siano soddisfatte le condizioni ora dette, anche la funzione (9) si comporta nel modo voluto.

Deduciamo una condizione che viene a limitare immediatamente la scelta della funzione $\psi(xy; x_1y_1)$. La funzione u, e quindi la ψ, debbono avere le derivate di ordine $2n-1$ infinite di primo ordine in $(xy) \equiv (x_1y_1)$, quindi ancora le derivate di ordine $2n$ infinite di secondo ordine in $(xy) \equiv (x_1y_1)$; mentre in questi punti l'integrale del secondo membro di (9) ha derivate di ordine $2n$ con infinito di ordine < 2. Ora la somma dei termini di $\mathfrak{G}(u)$ che hanno singolarità di secondo ordine in $(xy) \equiv (x_1y_1)$ è precisamente data da $\Lambda[\psi(xy; x_1y_1)]$: quindi la $\psi(xy; x_1y_1)$ pure avendo derivate $2n$-esime con infinito di secondo ordine dovrà essere tale che ivi $\Lambda(\psi)$ abbia una singolarità di ordine < 2 soltanto.

Noi partiremo da una particolare funzione $\psi(xy; x_1y_1)$ che soddisfaccia a questa condizione e vedremo che per essa in virtù di questa condizione medesima la determinazione della funzione $f(xy; x_1y_1)$ è ricondotta alla risoluzione di una equazione integrale del tipo studiato dal FREDHOLM, e che la funzione $f(xy; x_1y_1)$ che se ne ottiene soddisfa alle condizioni che abbiano supposte per essa in questo cenno.

La funzione $\psi(xy; x_1y_1)$.

6. Per maggiormente fissare le idee aggiungiamo una ipotesi a quelle fatte nel n° precedente: supponiamo cioè che tutte le radici α_j di (7) siano semplici: più tardi estenderemo i nostri risultati all'ipotesi che le radici abbiano in C multiplicità qualunque purchè costante (n° 18).

In questa ipotesi il discriminante di (7)

$$(10) \qquad d = \begin{vmatrix} \alpha_1^{2n-1} & \alpha_1^{2n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^{2n-1} & \alpha_2^{2n-2} & \dots & \alpha_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n}^{2n-1} & \alpha_{2n}^{2n-2} & \dots & \alpha_{2n} & 1 \end{vmatrix}$$

sarà sempre $\neq 0$.

Si chiami d_j il complemento algebrico di α_j^{2n-1} in d diviso per d medesimo: sarà d_j una funzione di x ed y sempre finita e continua in C insieme colle sue derivate d'ordine $\leqq 2n+1$. Inoltre per l'ipotesi fatta al n° 5 che α_{2i-1} ed α_{2i} fossero complesse coniugate, anche d_{2i-1} e d_{2i} saranno quantità complesse coniugate [9]).

Si ponga infine

$$(11) \qquad \sigma_j(xy;\,\xi\eta) = (x-\xi)\alpha_j(xy) + y - \eta;$$

σ_{2i-1} e σ_{2i} saranno ancora quantità complesse coniugate. È facile dimostrare che il rapporto di $\sigma_j(xy;\,\xi\eta)$ ad $r(xy;\,\xi\eta) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ è, finchè il punto xy rimane in C, sempre limitato. Invero indichiamo con i il massimo intero contenuto in $\frac{j+1}{2}$; e si ponga

$$\lambda = \frac{|\sigma_j|^2}{r^2} = \frac{(p_i^2+q_i^2)(x-\xi)^2 + 2p_iq_i(x-\xi)(y-\eta) + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Il massimo ed il minimo valore di λ per tutti i possibili valori di $\xi\eta$ sono le radici dell'equazione

$$\lambda^2 - (p_i^2+q_i^2+1)\lambda + q_i^2 = 0$$

e quindi è sempre

$$\frac{p_i^2+q_i^2+1}{2} - \sqrt{\frac{(p_i^2+q_i^2+1)^2}{4} - q_i^2} < \lambda < \frac{p_i^2+q_i^2+1}{2} + \sqrt{\frac{(p_i^2+q_i^2+1)^2}{4} - q_i^2}.$$

E per le ipotesi (8):

$$\frac{\mu^2}{M^2+1} < \lambda < M^2+1.$$

E quindi a maggior ragione si ha, qualunque sia j,

$$(12) \qquad \frac{\mu}{M+1}r < |\sigma_j| < (M+1)r.$$

7. Premesse queste notazioni, assumeremo come funzione $\psi(xy;\,\xi\eta)$ la espressione [10])

$$(13) \qquad \psi(xy;\,\xi\eta) = i\sum_1^{2n}(-1)^j d_j(xy)\sigma_j(xy;\,\xi\eta)^{2n-2}\log\sigma_j(xy;\,\xi\eta).$$

---

9) Infatti per ottenere la quantità coniugata di d_{2n-1} basta nel denominatore scambiare le righe successive [con che lo si moltiplica per $(-1)^n$] e nel numeratore mutare la riga $(2i-1)$-esima nella complessa coniugata e scambiare a due a due le restanti: con ciò si passa dal complemento algebrico di α_{2i-1}^{n-1} a quello di α_{2i}^{n-1} moltiplicato per $(-1)^{n-2}$: quindi si deduce l'affermazione del testo.

10) La funzione $\psi(xy;\,\xi\eta)$ data da (13) è la soluzione fondamentale di (2) data dal SOMIGLIANA, quando è $b_{ik}=0$, $a_{lm} = \text{cost.}$ Vedi SOMIGLIANA, l. c. [6]).

Per ciascuno dei logaritmi della formula precedente occorrerà fissare una determinazione arbitraria, per modo però che $\log \sigma_{2i-1}$ e $\log \sigma_{2i}$ siano complessi coniugati.

Questa funzione è reale. Questo segue immediatamente dall'ipotesi fatta sulle determinazioni dei logaritmi; e dalle osservazioni del n° precedente su $d_j(xy)$ e $\sigma_j(xy;\xi\eta)$: ogni termine di ordine pari è coniugato del termine antecedente col segno cambiato.

La funzione $\psi(xy;\xi\eta)$ è monodroma quando xy e $\xi\eta$ sono reali. Infatti la parte immaginaria di σ_{2i-1} e σ_{2i} è $\pm q_i(xy)(x-\xi)$ e si annulla solo per $x\equiv\xi$; quindi quando (xy) descrive un giro attorno a $(\xi\eta)$ [o $(\xi\eta)$ descrive un giro attorno ad (xy)] σ_{2i-1} e σ_{2i} tagliano due sole volte l'asse reale da parti opposte dell'origine corrispondentemente ai due valori di $(xy)[(\xi\eta)]$ per cui $x\equiv\xi$; e cioè rispetto all'origine descrivono un giro solo. Di più, siccome tutti i $q_i(xy)$ sono positivi, si vede che quando $(xy)[(\xi\eta)]$ gira in un determinato verso, tutti i σ_j per cui j è pari girano in uno stesso verso e tutti i σ_j per cui j è dispari girano nell'opposto: quindi $\log\sigma_j$ per un giro di $(xy)[(\xi\eta)]$ attorno a $(\xi\eta)[(xy)]$ aumenta di $\pm(-1)^j 2\pi i$. La funzione (13) aumenta quindi di

$$\pm 2\pi i\sum_1^{2n} d_j(xy)\sigma_j(xy;\xi\eta)^{2n-2}.$$

Ma

$$\sigma_j(xy;\xi\eta)^{2n-2}=\sum_{1}^{2n-2}{}_m\binom{2n-2}{m}\alpha_j^m(xy)(x-\xi)^m(y-\eta)^{2n-m-2};$$

onde, ricordando il significato di $d_j(xy)$, si deduce

$$\pm 2\pi i\sum_1^{2n} d_j\sigma_j^{2n-2}=\pm 2\pi i\sum_1^{2n-2}{}_m\binom{2n-2}{m}(x-\xi)^m(y-\eta)^{2n-m-2}\sum_1^{2n} d_j\alpha_j^m=0.$$

Quindi la funzione ψ è monodroma, sia considerata come funzione di (xy) che di $(\xi\eta)$. Inoltre per le diseguaglianze (12) ha nei punti $(xy)\equiv(\xi\eta)$ uno zero di ordine $>2n-3$.

8. Andiamo a studiare le derivate successive di $\psi(xy;\xi\eta)$ rapporto ad x ed y. Si ha:

$$(14)_1\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}=&(2n-2)i\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j d_j(xy)\alpha_j(xy)\sigma_j(xy;\xi\eta)^{2n-3}\log\sigma_j(xy;\xi\eta)+i\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\alpha_j d_j\sigma_j^{2n-3}\\&+i\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\sigma_j^{2n-3}\log\sigma_j\left[\frac{\partial d_j}{\partial x}\sigma_j+(2n-2)\frac{\partial\alpha_j}{\partial x}d_j\cdot(x-\xi)\right]\\&+i\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j d_j\sigma_j^{2n-3}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x}(x-\xi)\\=&(2n-2)i\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\alpha_j d_j\sigma_j^{2n-3}\log\sigma_j+\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\log\sigma_j p_{j,10}+P_{10},\end{aligned}\right.$$

dove $p_{j,10}$ e P_{10} sono funzioni razionali intere delle $(x-\xi)$ e $(y-\eta)$ nella cui espressione entrano le radici α_j e le loro derivate prime. In virtù delle diseguaglianze (12) esse avranno in $(xy)\equiv(\xi\eta)$ uno zero di ordine $\geqq 2n-2$ e $2n-3$ rispettivamente, onde, mentre i due ultimi termini hanno uno zero di ordine $\geqq 2n-3$, il primo ha uno zero di ordine $\geqq 2n-4$ e $<2n-3$.

Analogamente per $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$.

Ed ancora per tutte le derivate di ordine $< 2n - 2$, si ha:

$$(14)_{i+k} \begin{cases} \dfrac{\partial^{i+k}\psi}{\partial x^i \partial y^k} = i(2n-2)(2n-3)\ \dots\ (2n-i-k-1)\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j \alpha_j^i d_j \sigma_j^{2n-i-k-2}\log\sigma_j \\ \qquad + \sum_1^{2n}{}_j \log\sigma_j p_{j,ik} + P_{ik} \qquad (i+k<2n-2), \end{cases}$$

dove $p_{j,ik}$ e P_{ik} sono funzioni razionali intere in $x-\xi$, e $y-\eta$ le quali dipendono dalle derivate prime, seconde ... $(i+k)$-esime delle α_j e hanno nel punto $(xy)\equiv(\xi\eta)$ uno zero di ordine $\geqq 2n-i-k-1$ e $2n-i-k-2$ rispettivamente. Tutte queste derivate sono quindi funzioni finite e continue di (xy) e $(\xi\eta)$ in tutto il campo C che per $(xy)\equiv(\xi\eta)$ divengono infinitesime di ordine $>2n-i-k-3$, e $<2n-i-k-2$.

Di particolare interesse sono degne le derivate di ordine $2n-2$, $2n-1$, $2n$. Si ha:

$$(14)_{2n-2} \quad \frac{\partial^{2n-2}\psi}{\partial x^i \partial y^k} = i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\alpha_j^i d_j \log\sigma_j + \sum_1^{2n}{}_j(-1)^n\log\sigma_j p_{j,ik} + P_{ik} \quad (i+k=2n-2).$$

Queste derivate divengono in $(xy)\equiv(\xi\eta)$ logaritmicamente infinite.

$$(14)_{2n-1} \quad \frac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^i \partial y^k} = i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\frac{\alpha_j^i d_j}{\sigma_j} + \sum_1^{2n}{}_j\frac{1}{\sigma_j}p_{j,ik} + \sum\log\sigma_j p'_{j,ik} + P_{ik} \quad (i+k=2n-1),$$

dove le $p_{j,ik}$ hanno in $(xy)\equiv(\xi\eta)$ uno zero di primo ordine almeno, mentre le $p'_{j,ik}$ e P_{ik} restano finite e sono razionali intere in $(x-\xi)$ e $(y-\eta)$. Ed intanto risulta da questa formula e dalla disuguaglianza (12) che *le derivate $2n-1$-esime di $\psi(xy;\xi\eta)$ divengono realmente nel punto $(xy)\equiv(\xi\eta)$ infinite di 1° ordine, come appunto si voleva.* Infine

$$(14)_{2n} \quad \frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^i \partial y^k} = -i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j\frac{(-1)^j\alpha_j^i d_j}{\sigma_j^2} + \sum_1^{2n}{}_j\frac{1}{\sigma_j}p_{j,ik} + \sum\log\sigma_j p'_{j,ik} + P_{ik} \quad (i+k=2n),$$

dove ora tutte le funzioni $p_{j,ik}$, $p'_{j,ik}$, P_{ik} restano finite in $(xy)\equiv(\xi\eta)$; e sono funzioni razionali di $x-\xi$, $y-\eta$, (intere le $p'_{j,ik}P_{ik}$, fratte le $p_{ji,k}$) dipendenti dalle α_j e dalle loro derivate dei primi $2n$ ordini. Da ciò segue che nelle ipotesi fatte per le a e le α la ψ ammette ancora derivate dell'ordine $2n+1$, finite e continue in ogni punto $(xy)\neq(\xi\eta)$.

Da $(14)_{2n}$ si deduce, ricordando che le α_j sono radici di (7),

$$(15) \quad \Lambda[\psi(xy;\xi\eta)] = \sum_{l+m=2n} a_{lm}\left[\sum_1^{2n}{}_j\left(\frac{p_{j,lm}}{\sigma_j} + \log\sigma_j p'_{j,lm}\right) + P_{lm}\right] = k(xy;\xi\eta),$$

dove $k(xy;\xi\eta)$ è una funzione di (xy), $(\xi\eta)$ sempre finita tranne che nei punti $(xy)\equiv(\xi\eta)$ dove diviene infinita *al più di 1° ordine. La funzione $\psi(xy;\xi\eta)$ da noi costruita soddisfa dunque ben veramente alla condizione che per essa riconoscemmo necessaria nel* n° 5.

È facile vedere come quando le a_{lm} e quindi le α_j sono costanti in C, k è identicamente nullo: allora la (15) dice che ψ soddisfa l'equazione $\Lambda(\psi)=0$: come già notammo ciò è naturale poichè allora la funzione (13) è la soluzione fondamentale trovata per questo caso dal SOMIGLIANA.

Non tralasceremo di notare infine che ove i coefficienti a_{lm} siano funzioni analitiche di xy, e quindi lo stesso valga per le radici di (7) anche la $\psi(xy;\,\xi\eta)$ è una funzione analitica sia di xy che di $\xi\eta$, regolare in ogni punto per cui non sia $(xy) \not\equiv (\xi\eta)$.

L'integrale $W(xy) = \int\int_C \psi(xy;\,\xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta.$

9. Dobbiamo ora studiare la seconda parte della formula (9) quando si suppone presa per $\psi(xy;\,x_1 y_1)$ la funzione (13) e stabilire per essa quanto si è enunciato al n° 5. Premettiamo però l'enunciato esatto di due teoremi di Calcolo integrale che ci occorreranno continuamente in seguito. Il primo non è che un caso particolare del secondo: tuttavia lo enunciamo a parte per maggiore chiarezza.

A. Si consideri l'integrale $W(x) = \int_a^b \psi(xy) f(y)\, dy$, e si supponga che in esso la funzione $\psi(xy)$ sia sempre finita esclusi i punti in cui $x \equiv y$ dove essa diviene infinita di ordine $\alpha < 1$, l'infinito principale essendo $\frac{1}{x-y}$. La funzione $W(x)$:

1° è finita in tutti i punti in cui la funzione $f(x)$ è finita o diventa infinita di ordine β per modo che $\alpha + \beta < 1$;

2° diviene al più logaritmicamente infinita in tutti i punti in cui la funzione $f(x)$ diviene infinita di ordine β tale che $\alpha + \beta = 1$;

3° diviene infinita di ordine $\leqq \alpha + \beta - 1$ in tutti i punti in cui la funzione $f(x)$ diviene infinita di ordine β tale che $\alpha + \beta > 1$.

Naturalmente si suppone che in tutto il tratto $a \leftarrow\rightarrow b$ $f(y)$ divenga al più infinita in punti isolati e sempre di ordine $\beta < 1$ per modo che la funzione $\psi(xy) f(y)$ sia per valori generici di x assolutamente integrabile [11]).

---

[11]) Per dimostrare questo teorema si osservi anzitutto che basta dimostrarlo per il caso in cui $f(x)$ abbia un solo punto di infinito in x_0 e che $W(x)$ abbia la semplice forma

$$W(x) = \int_a^b \frac{1}{|x-y|^\alpha} \frac{1}{|y-x_0|^\beta}\, dy.$$

Supponiamo di spezzare in 4 parti l'intervallo $a \leftarrow\rightarrow b$, mediante il punto di mezzo del tratto $x_0 \leftarrow\rightarrow x$, ed i simmetrici di esso rapporto ad x e ad x_0. Avremo, se si suppone per es.: $a < x < x_0 < b$:

$$W(x) = \left[\int_a^{\frac{3x-x_0}{2}} + \int_{\frac{3x-x_0}{2}}^{\frac{x+x_0}{2}} + \int_{\frac{x+x_0}{2}}^{\frac{3x_0-x}{2}} + \int_{\frac{3x_0-x}{2}}^{b}\right] \frac{1}{|x-y|^\alpha} \frac{1}{|y-x_0|^\beta}\, dy.$$

Tra a e $\frac{3x-x_0}{3}$ si ha $x_0 - y > x - y$; quindi

$$\int_a^{\frac{3x-x_0}{2}} \frac{1}{|x-y|^\alpha}\frac{1}{|y-x_0|^\beta}dy < \int_a^{\frac{3x-x_0}{2}} \frac{1}{|x-y|^{\alpha+\beta}} dy = \begin{cases} \frac{1}{1-(\alpha+\beta)}\left[-\left(\frac{x_0-x}{2}\right)^{1-\alpha-\beta} + (x-a)^{1-\alpha-\beta}\right] & (\alpha+\beta \gtrless 1) \\ \log\frac{2(x-a)}{x_0-x} & (\alpha+\beta=1). \end{cases}$$

Analogamente tra $\frac{3x_0-x}{2}$ e b, $y-x > y-x_0$; quindi

B. Sia l'integrale m-plo:

$$W(x_1 x_2 \dots x_m) = \int\int_C \cdots \int \psi(x_1 x_2 \dots x_m; y_1 y_2 \dots y_m) f(y_1 y_2 \dots y_m)\, dy_1\, dy_2 \dots dy_m,$$

dove C indica un determinato campo dello spazio ad m dimensioni, e $\psi(x_i; y_i)$ è una funzione finita e continua delle x_i e delle y_i tolto che nei punti $(x_1 x_2 \dots x_m) \equiv (y_1 y_2 \dots y_m)$ ove essa è infinita di ordine $\alpha < m$ $\left(\text{essendo la inversa della distanza } r = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} \text{ l'infinito principale}\right)$. — La funzione $W(x_1 x_2 \dots x_m)$:

1° è finita nei punti in cui $f(x_1 x_2 \dots x_m)$ è finita o diviene infinita di ordine β per modo che $\alpha + \beta < m$;

2° diviene al più logaritmicamente infinita nei punti in cui $f(x_1 x_2 \dots x_m)$ diviene infinita di ordine β tale che $\alpha + \beta = m$;

3° diviene al più infinita di ordine $\alpha + \beta - m$ ove la $f(x_1 x_2 \dots x_m)$ diviene infinita di ordine β per modo che $\alpha + \beta > m$.

Naturalmente si suppone che $f(x_1 x_2 \dots x_m)$ non diventi infinita che in punti isolati di C e sempre di un ordine $\beta < m$, per modo che $\psi(x_1 x_2 \dots x_m; y_1 y_2 \dots y_m) f(v_1 y_2 \dots y_m)$ sia atta all'integrazione anche ridotta ai valori assoluti per valori generici delle x [12]).

$$\int_{\frac{3x_0 - x}{2}}^{b} \frac{1}{|y-x|^\alpha} \frac{1}{|y-x_0|^\beta} dy < \int_{\frac{3x_0-x}{2}}^{b} \frac{1}{(y-x_0)^{\alpha+\beta}} dy = \begin{cases} \frac{1}{1-(\alpha+\beta)} \left[(b-x_0)^{1-\alpha-\beta} - \left(\frac{x-x_0}{2} \right)^{1-\alpha-\beta} \right] & (\alpha+\beta \gtrless 1) \\ \log \frac{2(b-x_0)}{x_0-x} & (\alpha+\beta = 1). \end{cases}$$

Rimangono gli altri due integrali. Tra i punti $\frac{3x - x_0}{2}$ e $\frac{x + x_0}{2}$ si ha $y - x_0 > \frac{x - x_0}{2}$, quindi si deduce, ricordando che $\alpha < 1$,

$$\int_{\frac{3x-x_0}{2}}^{\frac{x+x_0}{2}} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \frac{1}{|y-x_0|^\beta} dy < 2 \frac{2^\beta}{(x_0-x)^\beta} \int_x^{\frac{x+x_0}{2}} \frac{1}{(y-x)^\alpha} dy = \frac{2}{1-\alpha} \left(\frac{x_0 - x}{2} \right)^{1-\alpha-\beta}.$$

Ed analogamente per l'ultimo integrale che ancora rimane,

$$\int_{\frac{x+x_0}{2}}^{\frac{3x+x_0}{2}} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \frac{1}{|y-x|^\beta} dy < \frac{2}{1-\beta} \left(\frac{x_0 - x}{2} \right)^{1-\alpha-\beta}.$$

Queste disuguaglianze dimostrano completamente il nostro teorema.

[12]) Anche questo teorema si dimostra facilmente in modo analogo al precedente. Ci si può anche qui limitare al caso in cui f abbia una sola singolarità, sia essa nel punto M_0: allora detto M il punto $(x_1 x_2 \dots x_m)$, N il punto $(y_1 y_2 \dots y_m)$ dovremo studiare gli integrali della forma: $\int\int_C \cdots \int \frac{1}{r^\alpha_{MN}} \frac{1}{r^\beta_{NM_0}} dy_1\, dy_2 \dots dy_m$. Basterà anche qui spezzare il campo in quattro parti: due, τ_1 e τ_2, formate dalle ipersfere di centri in M ed M_0 e raggio $\frac{1}{2} r_{MM_0}$, le altre due τ' e τ'' formate ciascuna da quei punti di $C - \tau_1 - \tau_2$ che si trovano da una o d'altra parte dell'iperpiano perpendicolare nel punto medio ad $M M_0$ e quindi hanno da M_0 distanza sempre maggiore o sempre minore di quella da M. Passando alle coordinate polari di centro in M per lo studio degli integrali estesi a τ_1 e τ', a quelle di centro in M_0 per lo studio degli integrali estesi a τ_2 e τ'', procedendo del resto poi come per il teorema *A*, si ottiene il teorema *B*.

Si potrebbe anche, ma forse non con maggiore semplicità di calcoli, rendere rigorosa la deduzione del teorema *B* dal teorema *A* col procedimento cui accenna il FREDHOLM {*Sur une classe d'équations fonctionnelles* [Acta Mathematica, t. XXVII (1903), pp. 365-390], n° 16}.

10. Studiamo ora, come si disse, la seconda parte della formula (9). In quanto segue non ci interessa che la funzione f dipenda oltre che da $(\xi\eta)$ anche da un punto parametro $(x_1 y_1)$: per brevità scriveremo quindi per ora $f(\xi\eta)$ invece che $f(\xi\eta;\, x_1 y_1)$.

Supporremo che la $f(\xi\eta)$ sia generalmente finita ed abbia al più qualche punto singolare isolato in cui diviene infinita di ordine $\underline{\angle}\ 1$. Studieremo le derivate successive della funzione

$$W(xy) = \iint_C \psi(xy;\, \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{16}$$

I ragionamenti che seguono hanno molta analogìa con quelli che ordinariamente si fanno per le derivate dei potenziali logaritmici; del che ci si rende facilmente conto ponendo mente alla importante disuguaglianza (12); e noi svolgeremo di essi quindi quei soli punti in cui ci dobbiamo staccare da quelli e su cui per la fondamentale importanza che hanno nel seguito, non pare opportuno sorvolare.

La funzione $W(xy)$ è funzione finita e continua delle variabili x ed y in C, anche in quei punti in cui la $f(xy)$ diviene infinita di ordine $\underline{\angle}\ 1$ (n° 9, B).

Ma di più le sue derivate dei primi $2n-2$ ordini sono esse pure funzioni finite e continue delle variabili medesime che si ottengono derivando sotto il segno:

$$\frac{\partial^{i+k} W}{\partial x^i \partial y^k} = \iint_C \frac{\partial^{i+k} \psi}{\partial x^i \partial y^k} f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (i+k \underline{\angle}\ 2n-2). \tag{17}$$

Basti rammentare che pel n° 8 le derivate successive di ψ di ordine $\underline{\angle}\ 2n-2$ hanno una singolarità al più logaritmica in $(xy) \equiv (\xi\eta)$ e tener presente il Teorema B.

Esistono ancora le derivate di ordine $2n-1$ e sono date da (17) in tutti i punti in cui $f(xy)$ è finita. Segue di qui e dal teorema B [ricordando che le derivate $(2n-1)$-esime di ψ hanno al più una singolarità di primo ordine] che nei punti in cui $f(xy)$ diviene infinita queste funzioni derivate hanno al più una singolarità logaritmica.

Ma di più noi dimostreremo ora che la funzione $W(xy)$ ammette derivate di ordine $2n$, in tutti i punti nel cui intorno la funzione $f(xy)$ è finita e ammette derivate prime finite.

11. Si indichi con o senza apice il valore di una stessa funzione nel punto $M' \equiv (x'y) \equiv (x+\Delta x, y)$ [nel punto $M' \equiv (xy') \equiv (x, y+\Delta y)$] oppure nel punto $M \equiv (xy)$. Per cercare le derivate $2n$-esime occorre cercare se esiste e quale è il valore di

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial^{2n-1} W'}{\partial x^i \partial y^k} - \frac{\partial^{2n-1} W}{\partial x^i \partial y^k}\right] = \lim_{\Delta x=0} \frac{1}{\Delta x} \iint_C \left[\frac{\partial^{2n-1}\psi'}{\partial x^i \partial y^k} - \frac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^i \partial y^k}\right] f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

(o di una espressione analoga ottenuta spostando il punto M secondo l'asse delle y e dividendo per Δy). Sostituiamo nella espressione precedente alle derivate $(2n-1)$-esime le loro espressioni $(14)_{2n-1}$: e si osservi che nel dedurre dalle derivate $(2n-1)$-esime di ψ le derivate $2n$-esime, i soli termini di quelle che diano origine in queste a termini che abbiano in $(xy) \equiv (\xi\eta)$ un infinito di 2° ordine sono i termini del primo gruppo, quando si derivino pensandovi le α_j, d_j come costanti e non già come funzioni di x ed y. Segue allora con ragionamenti del tutto analoghi a quelli richiamati sopra relativi alle derivate prime dei potenziali logaritmici:

$$(a)\left\{\begin{aligned}&\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial^{2n-1}W'}{\partial x^i\partial y^k}-\frac{\partial^{2n-1}W}{\partial x^i\partial y^k}\right]\\&=i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\alpha_j^i d_j\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}\int\!\!\int_C\left[\frac{1}{(x'-\xi)\alpha_j+y-\eta}-\frac{1}{(x-\xi)\alpha_j+y-\eta}\right]f(\xi\eta)d\xi d\eta\\&+\int\!\!\int_C\left[\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{i+1}\partial y^k}+i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\frac{\alpha_j^{i+1}d_j}{\sigma_j^2}\right]f(\xi\eta)d\xi d\eta,\end{aligned}\right.$$

dove conviene notare che negli integrali che compaiono nel primo termine il valore di α_j è preso sempre nello stesso punto M.

Chiamiamo $J^{(j)}$ i singoli integrali della prima sommatoria del secondo membro. E consideriamo l'ellisse τ_j la cui equazione nelle variabili ξ, η è $|\sigma_j|=R$: supponiamo R tale che tutte le ellissi τ_j siano interne ad un intorno di (xy) in cui le derivate di $f(xy)$ sono finite e minori di un certo numero ν. Supponiamo però che τ_j contenga insieme con M il punto M'. Dividiamo ogni integrale $J^{(j)}$ in due parti l'una estesa a $C-\tau_j$ l'altra a τ_j. Si avrà:

$$(b)\left\{\begin{aligned}\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}J^{(j)}=&\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}\int\!\!\int_{C-\tau_j}f(\xi\eta)\left[\frac{1}{(x'-\xi)\alpha_j+y-\eta}-\frac{1}{(x-\xi)\alpha_j+y-\eta}\right]d\xi d\eta\\&+\lim_{\Delta x=0}\int\!\!\int_{\tau_j}f(\xi\eta)\left[\frac{1}{(x'-\xi)\alpha_j+y-\eta}-\frac{1}{(x-\xi)\alpha_j+y-\eta}\right]d\xi d\eta\\&=\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}J_1^{(j)}+\lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}J_2^{(j)}.\end{aligned}\right.$$

Ma evidentemente

$$(c)\qquad \lim_{\Delta x=0}\frac{1}{\Delta x}J_1^{(j)}=\alpha_j\int\!\!\int_{C-\tau_j}f(\xi\eta)\frac{1}{\sigma_j^2}\,d\xi\,d\eta.$$

Quanto all'altro limite si può scrivere

$$(d)\left\{\begin{aligned}J_2^{(j)}=&\int\!\!\int_{\tau_j}[f(\xi\eta)-f(xy)]\frac{\alpha_j\Delta x}{[(x'-\xi)\alpha_j+y-\eta][(x-\xi)\alpha_j+y-\eta]}d\xi\,d\eta\\&+f(xy)\int\!\!\int_{\tau_j}\left[\frac{1}{(x'-\xi)\alpha_j+y-\eta}-\frac{1}{(x-\xi)\alpha_j+y-\eta}\right]d\xi\,d\eta=J_3^{(j)}+J_4^{(j)}.\end{aligned}\right.$$

Ma osserviamo che per le ipotesi fatte $\int\!\!\int_{\tau_j}[f(\xi\eta)-f(xy)]\frac{1}{\sigma_j^2}d\xi d\eta$ ha un senso: poichè esso può scriversi $\int\!\!\int_{\tau_j}\frac{f(\xi\eta)-f(xy)}{r}\frac{r}{\sigma_j^2}d\xi d\eta$, e siccome il rapporto incrementale della funzione f è sempre uguale alla derivata in un punto intermedio e quindi inferiore a ν si avrà, ricordando (12), che questo integrale è sempre minore di una quantità della forma $k_1 \sqrt{R}$, k_1 essendo un numero finito. Quindi si avrà

$$(e) \qquad \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x} J_3^{(j)} = \alpha_j \int\int_{\tau_j} [f(\xi\eta) - f(xy)] \frac{1}{\sigma_j^2} d\xi\, d\eta < M k_1 \sqrt{R}\ ^{13)}.$$

Non resta che ad esaminare $J_4^{(j)}$. Supponiamo, per fissare le idee, j dispari ed uguale a $2h - 1$: sarà $\alpha_j = p_h(xy) + i q_h(xy)$.

Introduciamo delle nuove variabili

$$p_h(xy)x + y = X, \qquad p_h(xy)\xi + \eta = \Xi, \qquad p_h(xy)x' + y = X',$$
$$q_h(xy)x = Y, \qquad q_h(xy)\xi = \mathrm{H}, \qquad q_h(xy)x' = Y'.$$

L'ellisse τ_{2h-1} del piano $\xi\eta$ diviene un cerchio γ_{2h-1} di centro XY e raggio R del piano $\Xi\mathrm{H}$; e si avrà

$$J_4^{(2h-1)} = -\frac{1}{q_h} \int\int_{\gamma_{2h-1}} \left[\frac{1}{(X'-\Xi)+i(Y'-\mathrm{H})} - \frac{1}{(X-\Xi)+i(Y-\mathrm{H})}\right] d\Xi\, d\mathrm{H}$$
$$= \frac{1}{q_h} \int\int_{\gamma_{2h-1}} \left[\frac{\partial \log \rho'}{\partial \Xi} - \frac{\partial \log \rho}{\partial \Xi}\right] d\Xi\, d\mathrm{H} - i \frac{1}{q_h} \int\int_{\gamma_{2h-1}} \left[\frac{\partial \log \rho'}{\partial \mathrm{H}} - \frac{\partial \log \rho}{\partial \mathrm{H}}\right] d\Xi\, d\mathrm{H},$$

dove si è posto $\rho = \sqrt{(X - \Xi)^2 + (Y - \mathrm{H})^2}$, $\rho' = \sqrt{(X' - \Xi)^2 + (Y' - \mathrm{H})^2}$. Ma i due ultimi integrali sono noti [14]: posto $\Delta X = X' - X$, $\Delta Y = Y' - Y$, si ha:

$$\int\int_{\gamma_{2h-1}} \left[\frac{\partial \log \rho'}{\partial \Xi} - \frac{\partial \log \rho}{\partial \Xi}\right] d\Xi\, d\mathrm{H} = -\pi \Delta X,$$
$$\int\int_{\gamma_{2h-1}} \left[\frac{\partial \log \rho'}{\partial \mathrm{H}} - \frac{\partial \log \rho}{\partial \mathrm{H}}\right] d\Xi\, d\mathrm{H} = -\pi \Delta Y;$$

e quindi

$$J_4^{(2h-1)} = -\pi \frac{\Delta X - i \Delta Y}{q_h}.$$

Ma $\Delta X = p_h \Delta x$, $\Delta Y = q_h \Delta x$, quindi infine

$$(f) \qquad J_4^{(2h-1)} = -\pi \frac{\alpha_{2h}}{q_h} \Delta x.$$

Ed analogamente

$$(f_1) \qquad J_4^{(2h)} = -\pi \frac{\alpha_{2h-1}}{q_h} \Delta x.$$

---

[13]) Si vede di qui che si sarebbe potuto semplificare l'ipotesi chiedendo solo che $f(xy)$ avesse in (xy) rapporti incrementali uniformemente integrabili su ogni raggio anche ridotti ai valori assoluti. Questa semplificazione corrisponde a quella accennata nella Nota [8]). Sarebbe possibile proseguirla sempre in quanto segue. Basterà averlo qui rilevato, nè di ciò sarà più fatta menzione.

[14]) Dini, *Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre* [Acta Mathematica, t. XXV (1902), pp. 185-230], p. 202. Questa memoria può essere sempre utilmente consultata per quanto in questo lavoro si rimanda alla teoria dei potenziali logaritmici.

Raccogliendo da (a), (b), (c), (d), (e), (f), (f_1) si ottiene:

$$\frac{\partial^{2n} W}{\partial x^{i+1}\partial y^k} = i(2n-2)!\,\pi\sum_1^n{}_h \frac{\alpha_{2h-1}^i\alpha_{2h}d_{2h-1}-\alpha_{2h}^i\alpha_{2h-1}d_{2h}}{q_h}f(xy)$$

$$+i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\alpha_j^{i+1}d_j\left\{\iint\limits_{C-\tau_j} f(\xi\eta)\frac{1}{\sigma_j^2}d\xi\,d\eta+\iint\limits_{\tau_j}[f(\xi\eta)-f(xy)]\frac{1}{\sigma_j^2}d\xi\,d\eta\right\}$$

$$+\iint\limits_C\left[\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{i+1}\partial y^k}+(2n-2)!\,i\sum_1^{2n}(-1)^j\frac{\alpha_j^{i+1}d_j}{\sigma_j^2}\right]f(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Potremmo ancora semplificare questa espressione facendo tendere a zero il numero R e quindi tutti i campi τ_j, ma ciò non ci è necessario. Cambiando negli esponenti i in $i-1$, dalla formula precedente avremo

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^{2n} W}{\partial x^{i}\partial y^k} = i(2n-2)!\,\pi\sum_1^n{}_h \frac{\alpha_{2h-1}^{i-1}\alpha_{2h}d_{2h-1}-\alpha_{2h}^{i-1}\alpha_{2h-1}d_{2h}}{q_h}f(xy)\\&+i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j\alpha_j^{i}d_j\left\{\iint\limits_{C-\tau_j} f(\xi\eta)\frac{1}{\sigma_j^2}d\xi\,d\eta+\iint\limits_{\tau_j}[f(\xi\eta)-f(xy)]\frac{1}{\sigma_j^2}d\xi\,d\eta\right\}\\&+\iint\limits_C\left[\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{i}\partial y^k}+i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\frac{\alpha_j^{i}d_j}{\sigma_j^2}\right]f(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta.\end{aligned}\right.$$

La formula precedente fu ottenuta pensando l'ultima derivazione fatta rapporto ad x: pensando l'ultima derivazione eseguita rapporto ad y si ottiene

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^{2n} W}{\partial x^{i}\partial y^k} = i(2n-2)!\,\pi\sum_1^n{}_h \frac{\alpha_{2h-1}^{i}d_{2h-1}+\alpha_{2h}^{i}d_{2h}}{q_h}f(xy)\\&+i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j\alpha_j^{i}d_j\left\{\iint\limits_{C-\tau_j} f(\xi\eta)\frac{1}{\sigma_j^2}d\xi\,d\eta+\iint\limits_{\tau_j}[f(\xi\eta)-f(xy)]\frac{1}{\sigma_j^2}d\xi\,d\eta\right\}\\&+\iint\limits_C\left[\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{i}\partial y^k}+i(2n-2)!\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j\frac{\alpha_j^{i}d_j}{\sigma_j^2}\right]f(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta.\end{aligned}\right.$$

Varrà solo (18) se si vuole avere $\dfrac{\partial^{2n} W}{\partial x^{2n}}$, solo (19) se si vuole $\dfrac{\partial^{2n} W}{\partial y^{2n}}$: l'una o l'altra indifferentemente per le altre derivate. È interessante vedere che le due formule dànno per queste lo stesso valore; e poichè i residui termini sono identicamente gli stessi basterà mostrare che è nulla la differenza dei primi

$$i\pi(2n-2)!f(xy)\left[\sum_1^n{}_h\alpha_{2h-1}^{i-1}d_{2h-1}\frac{\alpha_{2h}-\alpha_{2h-1}}{q_h}-\alpha_{2h}^{i-1}d_{2h}\frac{\alpha_{2h-1}-\alpha_{2h}}{q_h}\right]$$
$$=-2\pi(2n-2)!f(xy)\sum_1^{2n}{}_j\alpha_j^{i-1}d_j.$$

È chiaro che questa espressione è nulla per $i=1, 2, \ldots 2n-1$.

12. Prima di procedere aggiungiamo due osservazioni a quanto precede.

Osservazione I. — In tutti i ragionamenti del n° 11 è solo essenziale il fatto che nell'integrale $\int\int_C \frac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^i \partial y^k} f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$ di cui cerchiamo la derivata, la funzione $\frac{\partial^{2n-1}\psi}{\partial x^i \partial y^k}$, regolare in ogni punto di C per cui $(xy) \not\equiv (\xi\eta)$, ha nei punti $(xy) \equiv (\xi\eta)$ un infinito di ordine 1, i termini di singolarità massima formando una espressione della forma $\sum A_j(xy)\frac{1}{\sigma_j(xy;\ \xi\eta)}$, dove le $A_j(xy)$ sono regolari insieme colle loro derivate prime. Quindi questi ragionamenti si potranno ripetere per ogni funzione che gode di questa proprietà: ad esempio per la funzione $k(xy;\ \xi\eta)$ definita da (15).

OSSERVAZIONE II. — Si supponga che in C la $f(\xi\eta)$ sia una funzione finita e continua insieme colle sue derivate prime, tolto che nel punto $M \equiv (x_0 y_0)$, ove essa diviene infinita di ordine β e le sue derivate prime di ordine $1 + \beta$. È facile allora vedere dalle formule (18) e (19) che le derivate $\frac{\partial^{2n} W}{\partial x^i \partial y^k}$ [le quali esistono in ogni punto di C fatta eccezione che nel punto $(x_0 y_0)$] divengono in $x_0 y_0$ infinite di ordine $\leqq \beta$. Invero ciò è evidente per quanto riguarda il primo termine di (18) o (19), e per quanto riguarda il terzo termine è conseguenza del teorema B del n° 19. Per quanto infine riguarda il secondo termine si osservi che per ogni punto $M \equiv (xy)$ occorrerà prendere, nel determinare i campi τ_j, $R < \frac{1}{\mathrm{M}+1} r_{MM_0}$ per modo che il punto M_0 sia fuori di τ_j [cfr. formula (12)]: ad es.: $R = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{M}+1} r_{MM_0}$ ed allora per le ipotesi fatte relativamente alle derivate di f sarà $\nu < \nu_1 \left(\frac{r_{MM_0}}{2}\right)^{1+\beta}$ e quindi per la (e) del n° precedente $\int\int_{\tau_j} [f(\xi,\eta) - f(xy)]\, \frac{1}{\sigma_j^2}\, d\xi\, d\eta < r_{MM_0}^{\beta} \frac{k_1 \nu_1}{2^\beta}$. Non rimarrà quindi che $\int\int_{C-\tau_j} f(\xi\eta)\frac{1}{\sigma_j^2}\, d\xi\, d\eta$; ma su di esso si potrà ragionare proprio allo stesso modo come si ragiona per ottenere i teoremi A e B, e si otterrà il risultato indicato. Lo stesso vale per le derivate di quegli integrali i quali cadono sotto l'Osservazione I.

13. È per noi specialmente importante calcolare $\Lambda(W)$. Ricordando la (15) ed usando la formula (18) per la $\frac{\partial^{2n} W}{\partial x^{2n}}$ e per tutte le altre la (19) si ha:

$$\Lambda(W) = \int\int_C k(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$+ i(2n-2)!\,\pi f(xy)\Big\{ a_{2n0} \sum_1^n{}_h \frac{\alpha_{2h-1}^{2n-1}\alpha_{2h}\, d_{2h-1} - \alpha_{2h}^{2n-1}\alpha_{2h-1}\, d_{2h}}{q_h}$$
$$+ \sum_1^n{}_h \left[\frac{d_{2h-1}}{q_h} \sum_{i>0} a_{2n-i\,i}\,\alpha_{2h-1}^{2n-i} - \frac{d_{2h}}{q_h} \sum_{i>0} a_{2n-i\,i}\,\alpha_{2h}^{2n-i} \right] \Big\}$$

gli altri termini annullandosi in virtù del fatto che le α sono radici dell'equazione (7). Ancora per questa ragione si ha $\sum_{i>0} a_{2n-i\,i}\,\alpha_j^{2n-i} = -a_{2n0}\alpha_j^{2n}$. Quindi il coefficiente di

$i(2n-2)!\pi f(xy)$ nella precedente espressione si potrà scrivere

$$a_{2n0}\sum_h\left[\alpha_{2h-1}^{2n-1}d_{2h-1}\frac{\alpha_{2h}-\alpha_{2h-1}}{q_h}-\alpha_{2h}^{2n-1}d_{2h}\frac{\alpha_{2h-1}-\alpha_{2h}}{q_h}\right]=2ia_{2n0}\sum_{1}^{2n}{}_j\,\alpha_j^{2n-1}d_j=-2ia_{2n0}.$$

Onde infine si deduce la formula per noi fondamentale

$$(20)\qquad \Lambda(W)=\int\!\!\int_C k(xy;\ \xi\eta)f(\xi\eta)d\xi d\eta+2(2n-2)!\,\pi f(xy)a_{2n0}(xy).$$

L'equazione integrale per la determinazione della funzione $f(xy;\ x_1y_1)$.

14. Premessi questi studî siamo in grado di affrontare la nostra questione. Riprendiamo a tal fine l'espressione (9) della funzione $u(xy;\ x_1y_1)$,

$$(9)\qquad u(xy;\ x_1y_1)=\psi(xy;\ x_1y_1)+\int\!\!\int_C\psi(xy;\ \xi\eta)f(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta;$$

e, supposto che vi si prenda come funzione $\psi(xy;\ x_1y_1)$ quella data da (13), cerchiamo di determinare la funzione $f(\xi\eta;\ x_1y_1)$ che ancora ci rimane arbitraria per modo che la u che così si ottiene soddisfaccia all'equazione (2) per $(xy)\neq(x_1y_1)$. Ammettiamo per un'istante che la funzione $f(\xi\eta;\ x_1y_1)$ soddisfaccia (considerata quale funzione di $\xi\eta$) alle condizioni sotto le quali siamo riusciti nei n$^{\mathrm{i}}$ precedenti (n$^{\mathrm{i}}$ 9-11) a dimostrare l'esistenza delle derivate di $\int\!\!\int_C\psi(xy;\ \xi\eta)f(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta$. Si avrà per (17)

$$(21)\qquad \frac{\partial^{i+k}u(xy;\ x_1y_1)}{\partial x^i\partial y^k}=\frac{\partial^{i+k}\psi(xy;\ x_1y_1)}{\partial x^i\partial y^k}+\int\!\!\int_C\frac{\partial^{i+k}\psi(xy;\ \xi\eta)}{\partial x^i\partial y^k}f(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta\quad(i+k\leqq 2n-1).$$

E per (15) e (20)

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}\Lambda[u(xy;\ x_1y_1)]&=\Lambda[\psi(xy;\ x_1y_1)]+\Lambda\left[\int\!\!\int_C\psi(xy;\ \xi\eta)f(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta\right]\\&=(2n-2)!\,2\pi a_{2n0}(xy)f(xy;\ x_1y_1)+k(xy;\ x_1y_1)\\&\quad+\int\!\!\int_C k(xy;\ \xi\eta)f(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta.\end{aligned}\right.$$

Posto quindi

$$(23)\qquad \chi(xy;\ x_1y_1)=k(xy;\ x_1y_1)+\sum_{i+k\leqq 2n-1}b_{ik}(xy)\frac{\partial^{i+k}\psi(xy;\ x_1y_1)}{\partial x^i\partial y^k},$$

da (21) e (22) si deduce che affinchè la $u(xy;\ x_1y_1)$ soddisfaccia all'equazione (2) deve essere

$$(2n-2)!\,2\pi a_{2n0}(xy)f(xy;\ x_1y_1)+\int\!\!\int_C\chi(xy;\ \xi\eta)f(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta+\chi(xy;\ x_1y_1)=0.$$

Osservando che, per le ipotesi fatte nel n° 5, in tutto C si ha $a_{2n,0}(xy)\neq 0$, l'equazione precedente si può anche scrivere

$$(24)\quad \begin{cases} f(xy;\ x_1y_1) + \displaystyle\int\!\!\int_C \chi_1(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta;\ x_1y_1)\, d\xi\, d\eta + \chi_1(xy;\ x_1y_1) = 0 \\ \chi_1(xy;\ \xi\eta) = \dfrac{\chi(xy;\ \xi\eta)}{(2n-2)!\, 2\pi a_{2n0}(xy)}. \end{cases}$$

La (24) è una equazione integrale del tipo studiato dal FREDHOLM [15]).

Se la soluzione di tale equazione esiste [se è tale che si possano alla funzione (9) che con essa si ottiene applicare le teorie dei n^i 9-12, talchè riesca legittima la deduzione delle (21) e (22) e nello stesso tempo risulti che l'integrale del secondo membro di (9) ha le derivate di ordine $2n-1$ infinite nel punto $(xy) \equiv (x_1y_1)$ dell'ordine minore di 1 (n^0 10)] la funzione (9) che se ne ottiene soddisferà alle condizioni imposte alla funzione $u(xy;\ x_1y_1)$ nel n^0 2. Ed essa si potrà applicare alla deduzione della formula (6) appena che sia dimostrato che per essa ha senso e non si annulla il denominatore della formula medesima.

15. Si tratta dunque di studiare la equazione (24).

La funzione $\chi_1(xy;\ \xi\eta)$ che nella (24) funge da funzione caratteristica (*kern*) è di quelle cui può applicarsi la teoria del FREDHOLM: ed invero dalla semplice ispezione delle (24), (23), (13), (14), (15) risulta che [nelle ipotesi fatte al n^0 5 per i coefficienti di $\mathfrak{G}(u)$] la $\chi_1(xy;\ \xi\eta)$ è una funzione generalmente finita e continua in tutto C, sia considerata come funzione di (xy) che di $(\xi\eta)$, la quale diventa infinita di ordine $\leqq 1$ nei punti $(xy) \equiv (\xi\eta)$, mentre le sue derivate prime diventano infinite di ordine $\leqq 2$. Ed in queste condizioni si può bene applicare la teoria del FREDHOLM [16]).

Esisterà quindi in generale — e cioè quando 1 non sia un valore eccezionale per la (24) — una funzione $f(xy;\ x_1y_1)$ risolvente di (24).

Supponiamo di essere in questo caso e determiniamo più da vicino la forma della funzione così ottenuta. Proveremo così che essa è generalmente finita insieme colle derivate prime, e nei punti $(xy) \equiv (x_1y_1)$ ha una singolarità di ordine $\leqq 1$. Poniamo

$$\chi_2(xy;\ x_1y_1) = \int\!\!\int_C \chi_1(xy;\ \xi\eta)\chi_1(\xi\eta;\ x_1y_1)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\chi_3(xy;\ x_1y_1) = \int\!\!\int_C \chi_2(xy;\ \xi\eta)\chi_1(\xi\eta;\ x_1y_1)\, d\xi\, d\eta = \int\!\!\int_C \chi_1(xy;\ \xi\eta)\chi_2(\xi\eta;\ x_1y_1)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\chi_4(xy;\ x_1y_1) = \int\!\!\int_C \chi_3(xy;\ \xi\eta)\chi_1(\xi\eta;\ x_1y_1)\, d\xi\, d\eta = \int\!\!\int_C \chi_1(xy;\ \xi\eta)\chi_3(\xi\eta;\ x_1y_1)\, d\xi\, d\eta.$$

La funzione $\chi_2(xy;\ x_1y_1)$ avrà in $(xy) \equiv (x_1y_1)$ al più una singolarità logaritmica, le funzioni $\chi_3(xy;\ x_1y_1)$, $\chi_4(xy;\ x_1y_1)$ saranno finite ovunque (Teorema B, n^0 9).

La funzione $\chi_2(xy;\ x_1y_1)$ avrà derivate prime finite in ogni punto di C tranne

---

[15]) FREDHOLM, l. c. [12]).

[16]) FREDHOLM, l. c. [12]), § 6.

che nei punti $(xy)\equiv(x_1y_1)$ (n° 12, Osservazione I); e queste nei punti $(xy)\equiv(x_1y_1)$ avranno un infinito al più di 1° ordine (n° 12, Osservazione II); similmente le funzioni $\chi_3(xy;\ x_1y_1)$, $\chi_4(xy;\ x_1y_1)$ avranno a loro volta derivate prime finite in ogni punto di C fatta eccezione per le derivate di $\chi_3(xy;\ x_1y_1)$ che nei punti $(xy)\equiv(x_1y_1)$ hanno una singolarità logaritmica.

Ora, se si chiama $h(xy;\ x_1y_1)$ la risolvente dell'equazione

$$h(xy;\ x_1y_1)+\chi_4(xy;\ x_1y_1)+\iint\limits_C\chi_4(xy;\ \xi\eta)h(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta=0,$$

noi sappiamo che la $f(xy;\ x_1y_1)$ si scriverà

$$\begin{gathered}f(xy;\ x_1y_1)=-\chi_1(xy;\ x_1y_1)+\chi_2(xy;\ x_1y_1)-\chi_3(xy;\ x_1y_1)+\chi_4(xy;\ x_1y_1)\\+\iint\limits_C h(xy;\ \xi\eta)[-\chi_1(\xi\eta;\ x_1y_1)+\chi_2(\xi\eta;\ x_1y_1)-\chi_3(\xi\eta;\ x_1y_1)+\chi_4(\xi\eta;\ x_1y_1)]d\xi d\eta.\end{gathered}$$

Onde risulterà che $f(xy;\ x_1y_1)$ si comporta nel modo da noi detto appena che si sia dimostrato che $h(xy;\ x_1y_1)$ è una funzione finita e continua ovunque insieme colle sue derivate prime. Ma la h è la risolvente di una equazione integrale la cui funzione caratteristica $\chi_4(xy;\ \xi\eta)$ è finita sempre insieme colle sue derivate prime; le formule del FREDHOLM dimostrano allora senz'altro che la $h(xy;\ x_1y_1)$ gode delle proprietà da noi indicate [17]).

Quindi, quando per l'equazione integrale (24) il valore 1 non è eccezionale, cioè non è nullo il determinante, la soluzione di essa è una funzione che sostituita in (9) ci dà una soluzione fondamentale di (2).

16. Quando la (24) avesse nullo il determinante converrà modificare leggermente l'espressione (9) sostituendola con altra più generale.

Noi sappiamo che in questa ipotesi esiste un numero finito m di funzioni $\varphi_i(xy)$ le quali soddisfanno all'equazione

$$\varphi_i(xy)+\iint\limits_C\chi_1(\xi\eta;\ xy)\varphi_i(\xi\eta)d\xi d\eta=0$$

e che condizione necessaria e sufficiente affinchè la equazione

$$f(xy;x_1y_1)+\iint\limits_C\chi_1(xy;\ \xi\eta)f(\xi\eta;\ x_1y_1)d\xi d\eta+\rho(xy;x_1y_1)=0$$

ammetta soluzione è che si abbia

$$\iint\limits_C\varphi_i(xy)\rho(xy;\ x_1y_1)dx\,dy=0$$

[17]) Che la risolvente di una equazione integrale sia finita quando la funzione caratteristica è finita risulta immediatamente dalla serie che il FREDHOLM dà per essa nei §§ 1 e 2 della memoria citata. Ma questa serie si può derivare termine a termine appena che la funzione caratteristica ha derivata finita, perchè allora la serie delle derivate converge uniformemente, come immediatamente si vede fondandosi sul medesimo teorema dell'HADAMARD su cui si fonda la dimostrazione di convergenza del FREDHOLM.

per tutti i valori di i da 1 ad m. E si noti che le funzioni $\varphi_i(xy)$ sono finite e continue in tutto il campo C.

Ciò posto, quando si presenti questo caso eccezionale, si prendano, come è sempre possibile, m funzioni $v_i(xy)(i=1, 2, \ldots m)$, che supporremo finite e continue insieme colle loro derivate dei primi $(2n+1)$ ordini, e tali che, posto

$$\frac{1}{(2n-2)!\,2\pi a_{2n,0}}\mathfrak{G}[v_i(xy)] = t_i(xy),$$

e

$$\iint_C \varphi_i(xy)t_j(xy)\,dx\,dy = \varkappa_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots m),$$

il determinante $|\varkappa_{ij}|$ sia $\neq 0$. Si cerchi di porre $u(xy;\, x_1y_1)$ sotto la forma

$$(9') \quad u(xy;\, x_1y_1) = \psi(xy;\, x_1y_1) + \iint_C \psi(xy;\, \xi\eta)f(\xi\eta;\, x_1y_1)d\xi d\eta - \sum_i^m {}_j\lambda_j(x_1y_1)v_j(xy),$$

dove ora le funzioni da determinarsi sono le $\lambda_j(x_1y_1)$ e la $f(\xi\eta;\, x_1y_1)$.

Operando sulla nuova espressione di $u(xy;\, x_1y_1)$ al modo stesso che si è tenuto nel n° 13 otteniamo l'equazione analoga a (24)

$$(24') \quad f(xy;\, x_1y_1) + \iint_C \chi_1(xy;\, \xi\eta)f(\xi\eta;\, x_1y_1) + \left[\chi_1(xy;\, x_1y_1) - \sum_i^m {}_j\lambda_j(x_1y_1)t_j(xy)\right] = 0,$$

dove la funzione $\chi_1(xy;\, \xi\eta)$ è ancora la medesima che in (24). Quindi, per quanto sopra si disse, perchè questa equazione sia risolubile occorre e basta che le funzioni $\lambda_j(x_1y_1)$ siano determinate in modo che

$$\sum_i^m {}_j\varkappa_{ij}\lambda_j(x_1y_1) = \iint_C \varphi_i(xy)\chi_1(xy;\, x_1y_1)\,dx\,dy \qquad (i = 1, \ldots m).$$

Questo per l'ipotesi fatta sul determinante $|\varkappa_{ij}|$ è sempre possibile, mentre per il fatto che χ_1 diviene infinita solo di ordine $\underline{\angle}\ 1$ risulta che le funzioni dei secondi membri delle equazioni di questo sistema sono funzioni finite e continue, e quindi anche le $\lambda_j(x_1y_1)$ che risolvono il sistema medesimo. Determinate così le λ_j la (24') è risolubile e ci serve a determinare una funzione $f(xy;\, x_1y_1)$ su cui si possono ripetere i ragionamenti del n° 15 per legittimare le deduzioni precedenti.

Possiamo quindi conchiudere che *nelle ipotesi dei* n^i *5 e 6 esistono sempre soluzioni fondamentali per la equazione* (2).

OSSERVAZIONE I. — Se alla funzione $\psi(xy;\, x_1y_1)$ aggiungiamo una qualunque funzione finita e continua di (xy) e $(\xi\eta)$ insieme colle sue derivate dei primi $2n$ ordini in tutti i punti di C, otteniamo una nuova funzione cui si può applicare i ragionamenti precedenti. Anche su questa osservazione avremmo potuto fondarci per escludere il caso eccezionale studiato in questo numero [18]).

---

[18]) Questa osservazione fa sperare che si possa cogli stessi procedimenti qui usati per queste equazioni studiare i problemi di esistenza per date condizioni al contorno, analoghi al problema di DIRICHLET.

Osservazione II. — Se nell'equazione (2) si avesse avuto anche un termine noto il procedimento non sarebbe stato per nulla mutato: solo invece dell'equazione (24) si sarebbe ottenuta una equazione analoga, in cui quale termine noto non sarebbe comparsa la stessa funzione caratteristica, ma altra funzione. Il che del resto non avrebbe mutato di nulla i ragionamenti precedenti. Ma tale generalizzazione è inutile quando si voglia solo ottenere una funzione che serva alla deduzione della formula (6).

17. Terminiamo dimostrando che il limite che compare nella formula (6) del n° 2 è veramente $\neq 0$ per la funzione $u(xy;\, x_1 y_1)$ da noi costruita.

Ricordiamo le espressioni (5) di M_1 ed N_1: per trovare il nostro limite ci basterà ritenere delle espressioni di M_1 ed N_1 quanto si ricava sostituendo alle derivate di ordine $2n-1$ di $u(xy;\, x_1 y_1)$ quelle sole parti di esse che nel punto $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ hanno la massima singolarità: e cioè, per quanto precede, i primi termini dell'espressione $(14)_{2n-1}$ delle derivate $(2n-1)$-esime di $\psi(xy;\, x_1 y_1)$.

Avremo quindi, indicando come al n° 2 con c_1 il cerchio di centro $x_1\, y_1$ e raggio a,

$$\lim_{a=0}\int_{c_1}(M_1 dy - N_1 dx) = i(2n-2)!\lim_{a=0}\int_{c_1}\Big\{\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j d_j(xy)\Big[-a_{2n0}(xy)\alpha_j^{2n-1}(xy)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^{2n-1}{}_m a_{2n-m\,m}(xy)\alpha_j^{2n-m-1}(xy)\Big]\frac{1}{\alpha_j(xy)(x-x_1)+y-y_1}dy$$

$$+\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j d_j(xy)\Big[a_{02n}(xy)+\frac{1}{2}\sum_1^{2n-1}{}_m a_{2n-m\,m}(xy)\alpha_j^{2n-m}(xy)\Big]\frac{1}{\alpha_j(xy)(x-x_1)+y-y_1}dx\Big\}.$$

Ma le $\alpha_j(xy)$ sono radici di (7): si ha quindi

$$a_{0,2n}(xy)+\frac{1}{2}\sum_1^{2n-1}{}_m a_{2n-m\,m}(xy)\alpha_j^{2n-m}(xy)$$

$$= -a_{2n0}(xy)\alpha_j^{2n}(xy) - \frac{1}{2}\sum_1^{2n-1}{}_m a_{2n-m\,m}(xy)\alpha_j^{2n-m};$$

quindi la formula precedente si può scrivere

$$\lim_{a=0}\int_{c_1}(M_1 dy - N_1 dx)$$

$$=(2n-2)!\,i\lim_{a=0}\int_{c_1}\Big\{\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j d_j(xy)\Big[-a_{2n0}(xy)\alpha_j^{2n-1}(xy)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{1m}^{2n-n} a_{2n-m\,m}(xy)\alpha_j^{2n-m-1}(xy)\Big]\frac{\alpha_j(xy)dx+dy}{[\alpha_j(xy)(x-x_1)+y-y_1]}\Big\}$$

$$=(2n-2)!\,i\sum_1^{2n}{}_j(-1)^j d_j(x_1 y_1)\Big[-a_{2n0}(x_1 y_1)\alpha_j^{2n-1}(x_1 y_1)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_1^{2n-1}{}_m a_{2n-m\,m}(x_1 y_1)\alpha_j^{2n-m-1}(x_1 y_1)\Big]\lim_{a=0}\int_{c_1} d\log[\alpha_j(xy)(x-x_1)+(y-y_1)]$$

$$=2\pi(2n-2)!\,a_{2n0}(x_1 y_1).$$

E quindi abbiamo che questo limite esiste ed è bene in tutto C diverso da zero: ed otteniamo che la (6) diviene

$$(6')\quad z(x_1 y_1) = \frac{1}{2\pi(2n-2)!\,a_{2n0}(x_1 y_1)}\Big[\iint_C uF(xy)\,dx\,dy + \int_c (M\,dx - N\,dy)\Big].$$

Raduniamo da quanto precede sotto quali condizioni abbiamo dimostrato che una funzione χ finita e continua colle sue derivate dei primi $2n$ ordini, soluzione dell'equazione (1), ammette una espressione (6'): occorre che la (1) ammetta una equazione aggiunta e che questa soddisfaccia alle condizioni imposte a $\mathfrak{G}(u)$. *Occorre dunque che i coefficienti* a_{lm} *di* (1) *ammettano derivate finite e continue fino all'ordine* $2n+1$, *che i coefficienti* B_{ik} *ammettano le derivate* $\frac{\partial^{i+k+1} B_{ik}}{\partial x^{i+1} \partial y^k}$, $\frac{\partial^{i+k+1} B_{ik}}{\partial x^i \partial y^{k+1}}$, *che infine l'equazione delle caratteristiche abbia radici sempre complesse finite e continue aventi derivate di ordine* $2n+1$ *e, precorrendo quanto dimostreremo nel* n° *seguente, a multiplicità costante in* C.

Estensione dei risultati precedenti.

18. Nel n° 6 abbiamo fatto l'ipotesi che le varie radici della (7) fossero tutte distinte fra di loro. Non è difficile estendere il nostro metodo ed i nostri ragionamenti al caso in cui le radici non siano distinte, ma abbiano in C multiplicità costante. La difficoltà si riassume, come s'è visto, nella scelta della funzione $\psi(xy;\xi\eta)$, che, per dire brevemente, deve avere in $(xy)\equiv(\xi\eta)$ il comportamento imposto alla $u(xy;\xi\eta)$, ma esser tale che $\Lambda(\psi)$ abbia solo in essi una singolarità di ordine $\leqq 1$.

Ora, come nel caso precedente noi abbiamo assunto quale funzione $\psi(xy;\xi\eta)$ una funzione formata coi coefficienti dell'equazione [o, il che è lo stesso, colle radici di (7)] allo stesso modo che si sarebbe fatto qualora si avesse voluto trovare la soluzione fondamentale nell'ipotesi dei coefficienti costanti, così noi faremo in questo caso. Ed assumeremo come funzione $\psi(xy;\xi\eta)$ una funzione analoga a quella che ha dato il Somigliana nel lavoro citato.

Rammentiamo brevemente la forma di tale soluzione: la semplice ispezione di essa ci persuaderà che i ragionamenti dei n[i] precedenti, le sono perfettamente applicabili.

Siano $\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4; \ldots \alpha_{2m-1}\alpha_{2m}$; le $2m$ radici distinte di (7): supponiamo che α_{2i-1} ed α_{2i} siano complesse coniugate, che la prima abbia il coefficiente dell'immaginario positivo, e che sia h_i la loro comune molteplicità: sarà $h_1+h_2+h_3+\cdots+h_m=n$. Si ponga come precedentemente

$$\sigma_j \equiv \sigma_j(xy;\xi\eta) = (x-\xi)\alpha_j(xy)+(y-\eta)$$

e

$$(13')\quad \left\{\begin{aligned}\psi(xy;\xi\eta) = i\sum_1^m{}_j\sum_1^{hj}{}_k\big[&d_{2j-1k}(xy)\,\sigma_{2j-1}(xy;\xi\eta)^{2n-k-1}\sigma_{2j}(xy;\xi\eta)^{k-1}\log\sigma_{2j-1}(xy;\xi\eta)\\ &-d_{2jk}(xy)\,\sigma_{2j}(xy;\xi\eta)^{2n-k-1}\sigma_{2j-1}(xy;\xi\eta)^{k-1}\log\sigma_{2j}(xy;\xi\eta)\big].\end{aligned}\right.$$

In questa formula per ciascuno dei logaritmi si può prendere una determinazione arbitraria, ma fissa, e per modo che $\log\sigma_{2j-1}$ e $\log\sigma_{2j}$ siano complesse coniugate.

Quanto alle funzioni $d(xy)$ esse debbono essere scelte per modo che sia soddisfatta identicamente in $\xi\eta$ la equazione

$$\sum_1^m{}_j\sum_1^{hj}{}_k\big[d_{2j-1k}\,\sigma_{2j-1}^{2n-k-1}\,\sigma_{2j}^{k-1}+d_{2jk}\,\sigma_{2j}^{2n-k-1}\,\sigma_{2j-1}^{k-1}\big]=0.$$

Sviluppando col binomio le potenze delle σ indicate in questa equazione ed uguagliando a zero i coefficienti delle varie potenze di $(x-\xi)$ e $(y-\eta)$ si trova un sistema di equazioni lineari che determinano le d_{lm} e per modo che $d_{2j-1,k}$ e $d_{2j,k}$ sono complesse coniugate. Esse sono rapporti di determinanti i cui elementi sono polinomii nelle coppie di radici coniugate: il determinante denominatore non si annulla finchè le varie radici restano distinte. Le funzioni d sono quindi in C funzioni finite di x e di y che godono delle stesse proprietà che le radici di (7) per quanto riguarda il comportarsi di esse e delle loro derivate in C.

Le derivate della nuova funzione ψ si calcoleranno come le derivate della (13): le derivate di ordine $2n$ avranno una singolarità del secondo ordine nel punto $(xy)\equiv(\xi\eta)$; ed i termini che hanno questa singolarità si ottengono derivando la (13)' come se le d, e le α fossero costanti; gli altri termini avranno una singolarità di ordine $\angle 1$. L'espressione $\Lambda[\psi(xy;\xi\eta)]$ non avrà quindi che una singolarità di primo ordine in $(xy)\equiv(\xi\eta)$.

Rifacendo ora i ragionamenti dei n[i] 9-11 sulla funzione $W=\int\int_C\psi(xy;\xi\eta)f(\xi\eta)d\xi d\eta$ si deduce facilmente la (20). Su questa poggiano tutte le successive deduzioni [19]).

§ II.

Il caso analitico.

19. Abbiamo già accennato nella Introduzione (n° 3) che sulla formula (6) o (6') si può fondare la dimostrazione che ogni soluzione finita e continua insieme colle sue derivate di ordine $2n$ di una equazione $\mathfrak{F}(z)=F(xy)$ a coefficienti e termine noto analitici è una funzione analitica delle variabili xy.

È classica infatti la dimostrazione del carattere analitico delle funzioni armoniche, e più generalmente delle soluzioni delle equazioni ellittiche di secondo ordine *prive di termine noto*: in questo caso infatti scompare nella formula (6') l'integrale di area, e la funzione $z(x_1y_1)$ viene ad esprimersi, a meno di un fattore analitico, mediante un integrale curvilineo in cui le variabili x_1y_1 sono implicate nell'integrando solo in quanto esse compaiono nella soluzione fondamentale u dell'equazione aggiunta. E questa essendo nei varii casi la funzione $\log r$ od altra analoga a questa, che per $(x_1y_1)\not\equiv(xy)$ è analitica, ne seguirà che la formula (6') definisce la funzione $z(x_1y_1)$ anche in un campo complesso contenente C e quindi è analitica. Notiamo esplicitamente però che in tale dimostrazione si suppone che l'equazione sia priva di termine noto: poichè altri-

[19]) Resta a vedersi cosa accade nei campi in cui la molteplicità delle radici è variabile. Pare che nei punti dove varia la multiplicità ci si trovi in presenza di punti singolari per l'equazione. Almeno quando si cerca, ricorrendo a sviluppi in serie analoghi a quelli dell'HENSEL {*Über eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen* [Acta Mathematica, t. XXIII (1900), pp. 339-416]; vedi anche B. LEVI, *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXXXIV (1[er] semestre 1902), pp. 642-644]}, di studiare il comportamento delle funzioni $u(xy;x_1y_1)$ da noi trovate nell'intorno di linee critiche, si trovano in generale valori diversi a seconda dei diversi cammini seguiti.

menti non scomparirebbe dalla (6') l'integrale d'area e non risulterebbe quindi immediatamente che la funzione $\chi(x_1 y_1)$ è analitica. Talchè parve al PICARD, quando volle dimostrare che le soluzioni dell'equazioni ellittiche del second'ordine sono analitiche, necessario abbandonare questa dimostrazione: ed egli ottenne questo risultato ricorrendo agli sviluppi in serie trigonometrici.

Volendo noi dimostrare il carattere analitico della soluzione fondamentale delle equazioni totalmente ellittiche di ordine superiore, dovremo anzitutto riconoscere il carattere analitico della soluzione fondamentale nei punti in cui $(xy) \not\equiv (x_1 y_1)$; ma allora dalla forma in cui abbiamo ottenuto la soluzione saremo costretti ad affrontare subito lo studio di un integrale di area affatto analogo a quello che compare nella formula (6'): cosicchè dopo di questo ci sarà affatto indifferente che l'equazione (1) di cui è soluzione la χ abbia o non abbia termine noto. Ed otterremo quindi in particolare una dimostrazione, direi quasi sintetica, del risultato del PICARD sopra citato.

Osserveremo fin d'ora che senza essenziale restrizione noi potremo limitarci a studiare l'intorno di un punto: e potremo quindi attribuire al campo C forma e dimensioni arbitrarie; e per fissare le idee noi supporremo ad esempio che C sia un cerchio.

Ancora: noi studieremo in particolar modo la $u(xy;\ x_1 y_1)$ data dalla (9), ed in essa supporremo che la ψ abbia la forma (13): ma questo non è per altra ragione che per fissare le idee: tutti i ragionamenti che seguono non solo valgono quando per la funzione ψ si prenda la (13)', ma anche quando si tratti di funzioni analoghe a $\psi(xy;\ \xi\eta)$ non in quattro variabili soltanto, ma in 6, in 8, ... in $2n$ variabili, quali quelle di cui ci occupiamo nell'ultimo paragrafo.

La funzione $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ nel campo complesso.

20. Si ponga

$$x = x' + ix'',\ y = y' + iy'' \qquad (x_1 = x'_1 + ix''_1,\ y_1 = y'_1 + iy''_1);$$

consideriamo $x'x''y'y''(x'_1 x''_1 y'_1 y''_1)$ come coordinate di uno spazio S_4 a quattro dimensioni.

Il piano $x'' = 0,\ y'' = 0$ $(x''_1 = y''_1 = 0)$ su cui x ed y sono reali, lo chiameremo *piano reale* di S_4; il piano $x' = y' = 0$ $(x'_1 = y'_1 = 0)$ su cui x ed y sono puramente immaginarie, lo diremo *piano immaginario* di S_4. Dati due punti (xy) ed $(x_0 y_0)$ chiamerò *componente reale della distanza* ed indicherò con r_r la quantità $\sqrt{(x'-x'_0)^2+(y'-y'_0)^2}$; e chiamerò *componente immaginaria della distanza* ed indicherò con r_i la quantità $\sqrt{(x''-x''_0)^2+(y''-y''_0)^2}$; la distanza dei due punti potrà porsi sotto la forma $r = \sqrt{r_r^2 + r_i^2}$.

Supporremo che in un campo Σ contenente il campo C del piano reale i coefficienti a_{lm} e b_{ik} di $\mathfrak{G}(u)$, e similmente i coefficienti B_{ik} di $\mathfrak{F}(\chi)$ ed il termine noto $F(xy)$ siano funzioni analitiche regolari di (xy), che le radici di (7) siano ancora esse funzioni analitiche di (xy) e che godano anche di quelle proprietà che loro abbiano supposto competere nel n° 5; che cioè in Σ siano sempre complesse, — con coefficiente dell'immaginario maggiore di μ in valore assoluto — e sempre finite — minori di M in valore assoluto, — ed infine siano di multiplicità costante, ad es. semplici.

Fin da quando studiavamo nel n° 7 la funzione $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ sul piano reale, abbiamo visto che ad essa potevano assegnarsi infinite diverse determinazioni, ma subito abbiamo dimostrato che queste diverse determinazioni restavano sul piano reale tutte distinte, onde fissata una di esse arbitrariamente questa risultava funzione *monodroma* delle variabili x ed y. Ciò non è più vero quando passiamo al campo complesso. Da una determinazione di $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ si può allora passare con un conveniente cammino ad una qualunque altra determinazione.

Ed invero ognuna delle funzioni $\log \sigma_j$, quando si immaginino fissati xy, diverrà singolare nei punti del piano

$$(25)_j \qquad \begin{cases} p_i(xy)(x_1' - x') - (-1)^j q_i(xy)(x_1'' - x'') + y_1' - y' = 0, \\ (-1)^j q_i(xy)(x_1' - x') + p_i(xy)(x_1'' - x'') + y_1'' - y'' = 0, \end{cases}$$

dove con i si indica il massimo intero contenuto in $\dfrac{j+1}{2}$.

Questi piani passano per il punto $x = x_1$, $y = y_1$; e poichè le α_j sono in Σ tutte distinte, i $2n$ piani $(25)_j$ hanno a comune questo punto soltanto. Quindi se partendo da un punto qualunque di Σ si ritorna ad esso per es. dopo un cammino piano che giri intorno a punti di alcuni dei piani $(25)_j$ e non intorno ad altri, noi potremo passare da una ad altra determinazione della $\psi(xy;\ x_1 y_1)$.

E se invece in $\log \sigma_j$ si immagina fissato il punto $(x_1 y_1)$, ancora esso considerato come funzione di (xy) diverrà singolare sopra la superficie a due dimensioni data da $(25)_j$ — non più piana — ; $\log \sigma_j$ e $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ avranno su di esse punti critici.

Presi due qualunque cammini chiusi, essi produrranno sulle determinazioni di $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ la stessa permutazione se si può, con una deformazione continua, riportare l'uno all'altro senza mai incontrare una delle superficie $(25)_j$. Così, ad esempio, dopo un cammino chiuso che si possa ridurre ad un punto senza incontrare nessuna delle superficie $(25)_j$, la $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ riprenderà la stessa determinazione che inizialmente, sia che la si consideri come funzione di (xy), sia come funzione di $(x_1 y_1)$.

Ma esistono altri cammini che godono della medesima proprietà. Si prenda ad esempio un cammino chiuso sul piano $x'' = x_1''$, $y'' = y_1''$: lungo di esso la $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ non cambierà mai determinazione.

Infatti le superficie $(25)_j$ non incontrano evidentemente il piano altro che nel punto $x = x_1$, $y = y_1$; quindi il cammino di cui diciamo, o non contiene il punto $x = x_1$, $y = y_1$, ed in tal caso si può ridurre ad un punto per deformazione continua senza mai incontrare una superficie $(25)_j$; oppure esso contiene questo punto ed il ragionamento che al n° 7 facemmo per il caso reale si può allora riprodurre senza nessuna mutazione, — e ad esso del resto ci si riduce con una semplicissima traslazione degli assi coordinati.

Ciò posto, si osservi che se il punto $(xy)[(x_1 y_1)]$ appartiene ad una superficie

$(25)_j$ [piano $(25)_j$] relativa al punto $(x_1 y_1)[(xy)]$, sarà soddisfatta l'equazione seguente:

$$[p_i(xy)(x'_1 - x') + (y'_1 - y')]^2 + [q_i(xy)(x'_1 - x')]^2$$
$$= [p_i(xy)(x''_1 - x'') + (y''_1 - y'')]^2 + [q_i(xy)(x''_1 - x'')]^2.$$

Ma si può evidentemente ai due membri di questa equazione applicare le disuguaglianze (12) del n° 6. Otterremo allora che pei punti delle superficie $(25)_j$ [piani $(25)_j$] si ha

$$\frac{\mu}{M+1} r_r(xy;\, x_1 y_1) < (M+1) r_i(xy;\, x_1 y_1),$$

ossia

$$r_i > \frac{\mu}{(M+1)^2} r_r. \tag{26}$$

Si fissi ora un punto $O \equiv (xy)[(x_1 y_1)]$ e si consideri il campo

$$\mathfrak{A}_\gamma(O) \equiv \mathfrak{A}_\gamma(xy)[\mathfrak{A}_\gamma(O) \equiv \mathfrak{A}_\gamma(x_1 y_1)]$$

formato da tutti i punti $A \equiv (x_1 y_1)[(xy)]$ che soddisfanno rispetto ad O alla condizione

$$r_i < \gamma \frac{\mu}{(M+1)^2} r_r \quad \text{con} \quad \gamma < 1. \tag{27}$$

In un tale campo non esistono punti delle superficie $(25)_j$ relative ad O. Io dico che in esso la funzione $\psi(xy;\, x_1 y_1)$ considerata come funzione di $(x_1 y_1)[(xy)]$, — il punto $(xy)[(x_1 y_1)]$ essendo fisso in O —, è monodroma. Invero preso un qualunque cammino chiuso lo si projetti ortogonalmente sul piano $x''_1 = x''$, $y''_1 = y''$, i punti di tutto il segmento projettante [20]) passante per un punto A qualunque hanno componente reale della distanza da O uguale a quella di A e componente immaginaria minore. Se quindi il punto A è di $\mathfrak{A}_\gamma(O)$ tutti i punti del segmento projettante appartengono ad $\mathfrak{A}_\gamma(O)$, ed il cammino assegnato si può deformare senza mai incontrare una superficie $(25)_j$ portandolo nella sua projezione sul piano $x''_1 = x''$, $y''_1 = y''$: e lungo questa noi sappiamo che la funzione $\psi(xy;\, x_1 y_1)$ è monodroma.

Quindi risulta il nostro enunciato.

Osserviamo ancora che se A appartiene ad $\mathfrak{A}_\gamma(O)$, O appartiene ad $\mathfrak{A}_\gamma(A)$; inoltre se A appartiene ad $\mathfrak{A}_\gamma(O)$, appartengono anche ad $\mathfrak{A}_\gamma(O)$ tutti i punti del segmento OA.

21. Chiameremo P_γ il campo formato da tutti i punti i quali appartengono a Σ, hanno la projezione reale interna a C, ed inoltre appartengono a tutti i campi $\mathfrak{A}_\gamma(M)$, M essendo un punto variabile sul contorno c di C: in altri termini P_γ sarà il campo dei punti di Σ la cui distanza dal piano reale è minore della minima distanza della loro projezione reale dai punti di c moltiplicata per $\gamma \frac{\mu}{(M+1)^2}$.

---

[20]) La projezione ortogonale si ottiene conducendo i piani ortogonali al piano dato pei punti del cammino; il segmento projettante è quello che unisce il punto obbiettivo col punto imagine.

Se si considera $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ come funzione di tutte le quattro variabili complesse in essa contenute e si lascia variare $(xy)[(x_1 y_1)]$ in P_Υ ed $(x_1 y_1)[(xy)]$ nel campo $\mathfrak{A}_\Upsilon(xy)[\mathfrak{A}_\Upsilon(x_1 y_1)]$ corrispondente, la funzione $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ è, nel campo ad 8 dimensioni così ottenuto, regolare, finita sempre tranne che nei punti $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ in cui è infinita. Infine è sempre monodroma: basta invero dimostrare che, dato un cammino qualunque, lo si può sempre deformare con continuità in altro lungo cui la ψ è monodroma. Ora un cammino qualunque nel nostro campo ad 8 dimensioni, ha per componenti nei due S_4 coordinati (xy) ed $(x_1 y_1)$ due cammini s ed s_1 tra i punti dei quali sia determinata una corrispondenza; e ad una deformazione continua di s [od s_1] per cui ad s [s_1] si sostituisca un cammino $s'[s_1']$ riferito punto a punto ad s [s_1] medesimo, corrisponde una deformazione continua del cammino obbiettivo.

Se Q è un punto dello spazio (xy), e si chiami Q^* il punto che nello spazio $(x_1 y_1)$ ha le coordinate di Q; generalmente se Φ è una figura di punti Q, si chiami Φ^* la figura dei corrispondenti Q^*. Nel nostro caso S è in P_Υ, ed s_1 è tale che un suo punto S_1 corrispondente ad un dato punto S di s è in $\mathfrak{A}_\Upsilon(S^*)$. Tutti gli $\mathfrak{A}_\Upsilon(S^*)$ hanno a comune il contorno c^*. Per ogni punto S, si consideri la spezzata formata dal segmento projettante S_1 sul piano per S^* parallelo al piano reale, da un segmento di raggio uscente da S^* su questo piano, da una generatrice del cilindro projettante c^* su questo piano medesimo. Essa è tutta contenuta in $\mathfrak{A}_\Upsilon(S^*)$. Variando S_1 su s_1 questa spezzata varia con continuità, onde spostando S_1 su di essa si può portare s_1 su c^* con continuità e senza spezzarlo. Così con una conveniente deformazione del cammino obbiettivo possiamo fare in modo che ad esso negli spazî in cui (xy) ed $(x_1 y_1)$ sono coordinate corrispondano il cammino s ed il cammino formato da c o da una parte di c contata più volte. Ora lungo questo cammino la ψ è monodroma: invero siccome P_Υ è semplicemente connesso, s si può con deformazione continua ridurre ad un punto unico O ancora di P_Υ ed il cammino viene a coincidere col cammino c nello spazio $(x_1 y_1)$, mentre (xy) si mantiene fisso. Siccome c appartiene ad ogni $\mathfrak{A}_\Upsilon(O)$ risulta bene dal n° 20 che la funzione ψ è monodroma. C. V. D.

È ben chiaro che tutte le osservazioni di questi due numeri sono solo legate al comportamento di σ_j e $\log \sigma_j$ nel campo complesso: e quindi che i risultati ottenuti si estendono senz'altro alle funzioni $k(xy;\ x_1 y_1)$ [n° 8 (15)], $\chi_1(xy;\ x_1 y_1)$ [n° 14, (24)], alla $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ definita da (13') [n° 18], etc.

L'integrale $W(xy)$ nel campo complesso.

22. Esaminata così la funzione $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ andiamo a studiare la $W(xy)$.

La formula (16) [n° 10] che definisce $W(xy)$ ha un senso, e noi l'abbiamo già a lungo studiata, quando xy è un punto del piano reale: ma nessun senso è possibile attribuirle quando xy è complesso: invero la $\psi(xy;\ \xi\eta)$ è allora polidroma in C onde l'integrale medesimo perde ogni significato.

Ma invece è ben legittimo porci il problema: la funzione che per x ed y reali è definita dalla formula precedente è analitica? e se si, quali valori ad essa competono per valori complessi delle variabili x ed y?

Ricorriamo, per rispondere a tali domande, alla definizione stessa dell'integrale precedente. Si escluda xy dal campo C mediante un intorno $\tau_\varepsilon(xy)$ che diviene piccolo a piacere coll'impicciolire di ε: si ha:

$$(28) \qquad \iint_C \psi(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta = \lim_{\varepsilon=0} \iint_{C-\tau_\varepsilon(xy)} \psi(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

La funzione

$$(29) \qquad W_\varepsilon(xy) = \iint_{C-\tau_\varepsilon(xy)} \psi(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

dipende da xy sia in quanto ne dipende l'integrando sia in quanto ne dipende il campo di integrazione medesimo. Per fissare le idee diamo a $\tau_\varepsilon(xy)$ una forma particolare: noi prenderemo per contorno di $\tau_\varepsilon(xy)$ la figura omotetica del contorno c di C con centro di omotetia xy e rapporto di omotetia ε. Ciò posto per studiare più facilmente l'integrale $W_\varepsilon(xy)$ rappresentiamo il nostro campo di integrazione variabile sopra un campo fisso ad esempio nel modo seguente. Si applichi ad ogni punto di c un valore di una variabile ϑ per modo che ϑ vada da 0 a 2π quando si descrive c: se, come abbiamo detto (n° 19), c è una circonferenza di raggio R, per ϑ potrà prendersi l'angolo al centro contato a partire da un raggio fissato una volta per sempre. Fissato poi arbitrariamente un punto xy, ai punti $\xi\eta$ che si trovano su uno stesso raggio per xy si attribuisca la stessa coordinata ϑ del punto in cui il raggio incontra c; e si distinguano pei valori di un'altra coordinata ρ che si otterrà per interpolazione lineare sul raggio medesimo, per modo che al punto $(\xi\eta)\equiv(xy)$ corrisponda il valore $\rho=0$, ed al punto di c corrisponda il valore $\rho=1$. Per tal modo il campo $C-\tau_\varepsilon(xy)$ sarà rappresentato, quando ρ e ϑ siano interpretate come coordinate polari nel loro piano, nella corona k_ε compresa fra i due cerchi di raggi 1 ed ε. Le $\xi\eta$ saranno funzioni di ρ e ϑ dipendenti analiticamente da x ed y: precisamente si avrà

$$(30) \qquad \xi = x + \frac{\rho}{R}(R\cos\vartheta - x), \qquad \eta = y + \frac{\rho}{R}(R\,\mathrm{sen}\,\vartheta - y).$$

Ad ogni punto della circonferenza c corrisponderà un punto completamente determinato della circonferenza di raggio 1.

E si avrà

$$W_\varepsilon(xy) = \iint_{k_\varepsilon} \psi(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta) \frac{D(\xi\eta)}{D(\rho\vartheta)}\, d\rho\, d\vartheta,$$

dove per ξ, η, si debbono intendere sostituiti i valori (30), e

$$\frac{D(\xi\eta)}{D(\rho\vartheta)} = \frac{\rho}{R}[R - x\cos\vartheta - y\,\mathrm{sen}\,\vartheta]$$

è il Jacobiano di $\xi\eta$ rapporto a ρ e ϑ.

Perchè ora la funzione $W_\varepsilon(xy)$ sia funzione analitica di x ed y è sufficiente che l'integrando sia una funzione analitica di x ed y medesimi in tutto il campo k_ε dei valori di ρ e ϑ. Ma se in (30) ad x ed y si danno valori complessi il campo di integrazione k_ε viene ad essere rappresentato, nelle variabili complesse $\xi\eta$, dai punti del cono projettante da (xy) il contorno c di C e compresi fra il contorno medesimo ed una curva omotetica a c di centro di omotetia in xy e rapporto ε: chiameremo questo campo $\Gamma_\varepsilon(xy)$. Ora, per le osservazioni dei n^i precedenti, se (xy) è un qualunque punto di P_γ, nei punti di questo campo $\Gamma_\varepsilon(xy)$ la funzione $\psi(xy;\ \xi\eta)$ è regolare e finita sia di xy che di $\xi\eta$. Quindi se si suppone che la funzione $f(\xi\eta)$ sia analitica regolare in tutti i punti di P_γ — e qualunque sia la funzione analitica regolare su C noi potremo restringendo Σ, ove occorra, supporre questa condizione soddisfatta — noi otterremo che l'integrando di $W_\varepsilon(xy)$ è una funzione analitica regolare di xy in tutto P_γ. Anzi, seguendo la definizione del POINCARÉ degli integrali delle funzioni di due variabili complesse, potremo dire che il valore di $W_\varepsilon(xy)$ è sempre dato in tutto P_γ dalla formula

$$W_\varepsilon(xy) = \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon(xy)} \psi(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Si faccia ora tendere ε allo zero: il campo $\Gamma_\varepsilon(xy)$ tende al cono $\Gamma(xy)$ projettante c da xy, e l'integrale precedente tende *uniformemente* per i varî valori di xy in P_γ all'integrale esteso a $\Gamma(xy)$: basti ricordare che la funzione $\psi(xy;\ \xi\eta)$ diviene al più logaritmicamente infinita in $(xy) \equiv (\xi\eta)$ [21]). Anche la funzione limite $W(xy)$ sarà quindi analitica in P_γ ed avrà per valore il valore dell'integrale

$$\iint\limits_{\Gamma(xy)} \psi(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

---

[21]) Che la funzione $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ divenga sul cono $\Gamma(xy)$ solo logaritmicamente infinita risulta appena sia dimostrato che il rapporto di $\sigma_j(xy;\ \xi\eta)$ alla distanza $r(xy;\xi\eta)$, quando il punto $(\xi\eta)$ è su $\Gamma(xy)$ ed (xy) è in P_γ, è sempre maggiore in modulo di un numero $a > 0$. Ora se ρ e ϑ sono le coordinate di $(\xi\eta)$ secondo (30) si ha

$$\begin{aligned}|\sigma_j| &= \frac{\rho}{R}\left|\alpha_j(xy)(x' - R\cos\vartheta) + (y' - R\,\mathrm{sen}\,\vartheta) + i(\alpha_j(xy)x'' + y'')\right| \\ &> \frac{\rho}{R}\left[|\alpha_j(x' - R\cos\vartheta) + (y' - R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)| - |\alpha_j x'' + y''|\right] \\ &> \frac{\rho}{R}\left[\frac{\mu}{M+1} r_r - (M+1) r_i\right] > \frac{\rho}{R}\frac{\mu}{M+1} r_r (1-\gamma)\end{aligned}$$

in forza di (12) e (27), r_r ed r_i indicando le componenti reale ed immaginaria della distanza di (xy) dal punto $(R\cos\vartheta,\ R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$.

D'altra parte la distanza del punto (xy) dal punto $(\xi\eta)$ appartenente al cono $\Gamma(xy)$ è data da

$$r = \frac{\rho}{R}\sqrt{(x' - R\cos\vartheta)^2 + (y' - R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)^2 + x''^2 + y''^2} = \frac{\rho}{R}\sqrt{r_r^2 + r_i^2} < \frac{\rho}{R} r_r \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\mu^2}{(M+1)^4}}$$

e quindi sarà su $\Gamma(xy)$

$$\frac{|\sigma_j|}{r} > \frac{\mu(M+1)(1-\gamma)}{\sqrt{(M+1)^4 + \gamma^2\mu^2}}.$$

Risulta di qui l'enunciato. E risulta inoltre che similmente sul cono $\Gamma(xy)$ le funzioni $k(xy;\xi\eta)$, $\chi_1(xy;\xi\eta)$, etc., nel campo considerato divengono infinite di ordine $\angle 1$. E lo stesso avviene scambiando (xy) con $(\xi\eta)$.

Concludiamo adunque: *la funzione che per valori reali delle variabili x ed y è definita dall'integrale*

$$W(xy) = \int\int_C \psi(xy;\, \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

[*dove $f(\xi\eta)$ è una funzione analitica in un campo contenente il campo P_γ del* n° 20] *è una funzione analitica di x ed y definita in P_γ dall'espressione*

$$W(xy) = \int\int_{\Gamma(xy)} \psi(xy;\, \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$\Gamma(xy)$ *indicando il cono che dal punto xy projetta il contorno c di C.* — Analoghi ragionamenti sarebbero validi per le funzioni che per x ed y reali sono date da

$$\int\int_C \psi(\xi\eta;\, xy) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

o da altri integrali in cui a ψ fosse sostituita come al solito la k, la χ, etc.

23. Ma il precedente teorema ci dimostra di più che la funzione $W(xy)$ (e le analoghe) soddisfa in tutto P_γ ad una limitazione notevole: Se $f(\xi\eta)$ è sempre in P_γ minore di un numero g in valore assoluto, si avrà

$$|W| < \beta g,$$

β essendo un numero dipendente solo dal campo C e tale che impiccolendo C diviene infinitesimo almeno dello stesso ordine della massima corda di C.

Questo teorema — che fu enunciato la prima volta ad integrali estesi ad un campo reale dal PICARD applicandolo alle dimostrazioni della convergenza delle successive approssimazioni per campi sufficientemente piccoli, — si dimostra facilmente pel campo complesso appena si osservi la forma trovata per $W(xy)$ nel n° precedente, e che come già si disse su $\Gamma(xy)$ le funzioni ψ, k, χ_1, etc. divengono infinite di ordine $\leqq 1$ [22]).

---

[22]) Ecco la dimostrazione accennata. Per quanto si disse nella nota precedente presa una qualunque funzione ψ, χ_1, k, etc. si può sempre trovare un numero δ tale che su $\Gamma(xy)$ la funzione sia in valore assoluto $< \frac{\delta}{r}$ indicando con r la distanza di (xy) da $(\xi\eta)$. Quindi

$$\left|\int\int_{\Gamma(xy)} \psi(xy;\, \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta\right| \leqq \delta g \int\int_{\Gamma(xy)} \left|\frac{d\xi\, d\eta}{r}\right|.$$

Facendo la sostituzione (30) si avrà

$$\int\int_{\Gamma(xy)} \left|\frac{d\xi\, d\eta}{r}\right| < R\int_0^{2\pi} \frac{|R - x\cos\vartheta - y\,\mathrm{sen}\,\vartheta|}{\sqrt{(x' - R\cos\vartheta)^2 + (y' - R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)^2 + x''^2 + y''^2}}\, d\vartheta < AR,$$

A essendo una quantità finita. Si deduce

$$\left|\int\int_{\Gamma(xy)} \psi(xy;\, \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta\right| < A\delta g R$$

onde l'enunciato. Vedi pel campo reale analoghe dimostrazioni in DINI, l. c.

Il carattere analitico delle soluzioni di (1).

24. Potremmo in base ai teoremi precedenti dimostrare il carattere analitico delle soluzioni fondamentali di (2) per $(xy) \neq (x_1 y_1)$; per maggior brevità noi ci porremo invece direttamente alla dimostrazione generale del carattere analitico delle soluzioni di (1) in base alla formula (6') (n° 17): questa dimostrazione comprenderà quella come caso particolare. Sostituiamo in (6') ad $u(xy;\, x_1 y_1)$ il suo valore dato da (9). Sarà

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} z(x_1 y_1) = \frac{1}{2\pi(2n-2)!\, a_{2n0}(x_1 y_1)}\Big\{ & \int\!\!\int_C \psi(xy;\, x_1 y_1) F(xy)\, dx\, dy \\ & + \int\!\!\int_C f(\xi\eta;\, x_1 y_1)\, d\xi\, d\eta \int\!\!\int_C \psi(xy;\, \xi\eta) F(xy)\, dx\, dy + \int_c [M dy - N dx]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Basterà esaminare i varî integrali del secondo membro.

Il primo integrale di area è funzione analitica regolare in P_Υ per le precedenti discussioni.

Per discutere il secondo di questi integrali, si rammenti che $f(\xi\eta;\, x_1 y_1)$ è caratterizzata dall'essere soluzione di

$$(24)\quad f(\xi\eta;\, x_1 y_1) + \int\!\!\int_C \chi_1(\xi\eta;\, x_1 y_1) f(xy;\, x_1 y_1)\, dx\, dy + \chi_1(\xi\eta;\, x_1 y_1) = 0.$$

Ora noi sappiamo che questa soluzione è rappresentata nel campo reale dalla serie:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} & f(\xi\eta; x_1 y_1) = \sum (-1)^n \chi_n(\xi\eta; x_1 y_1) \\ & \chi_n(\xi\eta; x_1 y_1) = \int\!\!\int_C \chi_1(\xi\eta; xy) \chi_{n-1}(xy; x_1 y_1)\, dx\, dy = \int\!\!\int_C \chi_{n-1}(\xi\eta; xy) \chi_1(xy; x_1 y_1)\, dx\, dy, \end{aligned}\right.$$

almeno finchè la serie converge.

Per le osservazioni del n° 23 applicate al campo reale questa serie converge in tutto il campo reale C appena che questo sia convenientemente piccolo.

Invero, i due primi termini della serie per $(xy) \equiv (\xi\eta)$ divengono infiniti; ma noi sappiamo che, per quanto già si è osservato al n° 15, la funzione $\chi_3(\xi\eta;\, x_1 y_1)$ sarà ovunque finita nel campo C: sia essa minore in valore assoluto di g. Seguirà allora dal n° 23 che in tutto il campo sarà

$$(33)\quad |\chi_4(\xi\eta;\, x_1 y_1)| < \beta g,\ |\chi_5(\xi\eta;\, x_1 y_1)| < \beta^2 g,\ \ldots\ |\chi_n(\xi\eta;\, x_1 y_1)| < \beta^{n-3} g\ \ldots,$$

β essendo un numero che diviene infinitesimo di primo ordine quando la massima corda di C diviene infinitesima: potremo quindi fare in modo che la (32) converga, impicciolendo C. Noi potremmo partendo da (32) studiare i valori di $f(\xi\eta;\, x_1 y_1)$ e mostrare che essa è funzione analoga alla $\psi(\xi\eta;\, x_1 y_1)$: preferiamo osservare che per (32) il secondo integrale di (31) si può sviluppare per valori reali di $x_1 y_1$ nella serie

$$(34)\qquad \sum (-1)^n \int\!\!\int_C \chi_n(\xi\eta;\, x_1 y_1)\, d\xi\, d\eta \int\!\!\int_C \psi(xy;\, \xi\eta) F(xy)\, dx\, dy$$

tosto che il campo C è sufficientemente piccolo.

Ma la serie (34) è una serie di funzioni che si possono prolungare analiticamente in tutto P_γ poichè risulta dai ragionamenti che precedono che tal prolungamento, pel termine n-esimo, è dato da

$$\int\int_{\Gamma(x_1 y_1)} \chi_n(\xi\eta;\ x_1 y_1)\, d\xi\, d\eta \int\int_{\Gamma(\xi\eta)} \psi(xy;\ \xi\eta) F(xy)\, dx\, dy$$

$$\chi_n(\xi\eta;\ x_1 y_1) = \int\int_{\Gamma(x_1 y_1)} \chi_{n-1}(\xi\eta; xy)\chi_1(xy;\ x_1 y_1)\, dx\, dy.$$

E pei n[i] 15 e 23 la serie di queste funzioni converge in ugual grado in P_γ e rappresenta quindi una funzione analitica.

Analoga, e in certa misura più semplice è infine la discussione relativa all'integrale curvilineo di (31). Si indichi infatti con $M_\psi(xy;\ x_1 y_1)$ la funzione che si ottiene sostituendo ad $u(xy)$ nella formula (2), la $\psi(xy;\ x_1 y_1)$; la funzione $M_\psi(xy;\ x_1 y_1)$ dipende da $x_1 y_1$ solo in quanto essa dipende da $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ e dalle derivate di $\psi(xy;\ x_1 y_1)$ dei primi $n - 1$ ordini; e fin quando xy resta sul contorno c di C essa è una funzione analitica regolare di $x_1 y_1$, comunque sia $x_1 y_1$ *interno* a P_γ.

D'altra parte si ha evidentemente da (9):

$$M = M_\psi(xy;\ x_1 y_1) + \int\int_C f(\xi\eta;\ x_1 y_1) M_\psi(xy;\ \xi\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= M_\psi(xy;\ x_1 y_1) + \sum (-1)^n \int\int_C \chi_n(\xi\eta;\ x_1 y_1) M_\psi(xy;\ \xi\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Ora la serie del secondo membro è convergente appena che C sia sufficientemente piccolo; ogni termine della serie è una funzione analitica regolare di $x_1 y_1$ in tutto P_γ tranne quando il punto $x_1 y_1$ viene a coincidere col punto xy; quindi M rappresenterà una funzione che quando xy è sul contorno è analitica regolare in ogni punto $x_1 y_1$ interno a P_γ. Segue che anche l'integrale curvilineo che compare nella formula (31) è una funzione analitica di $x_1 y_1$ in questo campo.

Concludiamo quindi: *Quando i coefficienti ed il termine noto dell'equazione lineare totalmente ellittica $\mathfrak{F}(z) = F(xy)$ sono funzioni analitiche delle variabili x ed y, ogni soluzione finita e continua insieme colle sue derivate di ordine $2n$ è funzione analitica delle variabili x ed y.*

25. Osservazione. — Applichiamo i ragionamenti fatti in questo paragrafo all'equazioni $\Delta_2 z = f(xy)$ ed alla funzione $\log r$ che in questo caso ha l'ufficio vuoi della funzione ψ, vuoi della u.

La formula di Green

$$z(x_1 y_1) = \frac{1}{2\pi}\int\int_C \log r f(xy)\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_c \left(\frac{\partial \log r}{\partial n} z - \frac{\partial z}{\partial n}\log r\right) ds$$

rappresenta allora una qualunque soluzione della equazione $\Delta_2 z = f(xy)$ finita e continua colle sue derivate 1[e] e 2[e].

Dai n[i] precedenti risulta anzitutto come debba intendersi *l'estensione della formula* *di* GREEN *ai valori complessi delle variabili* $x_1 y_1$: si ha

$$z(x_1 y_1) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma(x_1 y_1)} \log r f(xy)\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{c} \left[\frac{\partial \log r}{\partial n} z - \frac{\partial z}{\partial n} \log r\right] ds$$

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2},$$

$\Gamma(x_1 y_1)$ indicando il cono che proietta dal punto $x_1 y_1$ il contorno c di C.

Analoga sarebbe l'estensione della formula qualora si aggiungesse a $\log r$, la funzione compensatrice $g(xy;\, x_1 y_1)$ sia relativa al primo sia al secondo problema al contorno.

Ma di più associando questa formula ai ragionamenti del n° 23 si estendono immediatamente al campo complesso quelle disuguaglianze che per il PICARD furono il fondamento per l'applicazione del metodo delle successive approssimazioni al problema di DIRICHLET relativo all'equazione

$$\Delta_2 z = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

E questa estensione ci permette di dimostrare, senza ricorrere ai nuovi ragionamenti degli sviluppi in serie trigonometrici, ma mediante lo stesso metodo di risoluzione nel campo reale, il carattere analitico delle soluzioni dell'equazione precedente.

E lo studio accurato di questa nuova dimostrazione, su cui ora non possiamo fermarci, ci permetterebbe di introdurre qualche lieve economia nelle condizioni che per tale dimostrazione si impongono col metodo degli sviluppi in serie trigonometrici.

§ III.

26. Due questioni si presentano ora come naturale estensione di quella trattata nel presente lavoro:

1° Generalizzare la ricerca al caso in cui non si abbia una sola equazione con una sola funzione incognita, ma più equazioni in più incognite.

2° Generalizzare la ricerca agli spazi a più dimensioni.

In questo ultimo § tratterò brevemente della risoluzione di questi due problemi in due casi particolari: tralasciando quei calcoli che sia facile ripetere colla guida degli studî precedenti.

I sistemi di equazioni.

27. Nell'estensione dei nostri studî al caso dei sistemi di equazioni lineari, due difficoltà, provenienti dallo stato imperfetto in cui è ancora la teoria, limitano e l'utilità e la possibilità della ricerca. Invero noi dobbiamo prevedere per le osservazioni fatte in principio del nostro lavoro che le caratteristiche avranno anche in questo caso ufficio essenziale, ora non è ancora perfettamente chiaro, fatta eccezione per alcuni più semplici tipi di sistemi, quale senso debba attribuirsi alle caratteristiche del sistema [23]). Dall'altro lato non è stato fin qui generalizzato al caso dei sistemi il concetto dell'equazione aggiunta di un'altra [24]) talchè noi non siamo in grado di dedurre dall'esistenza della soluzione fondamentale, una espressione delle soluzioni del sistema aggiunto analogo alla (6); onde l'utile che dalla conoscenza di tale soluzione si può trarre nella teoria delle equazioni viene ad essere per ora assai limitato.

Mi limiterò a trattare quindi di un caso particolare analogo a quelli trattati dal SOMIGLIANA e dal FREDHOLM.

Si consideri un sistema di n equazioni in n incognite:

$$(35)\quad \begin{cases} \Delta_{11} u_1 + \Delta_{12} u_2 + \cdots + \Delta_{1n} u_n + \sum\limits_{0 \le l+m < k} a_{lm}^{(1i)} \dfrac{\partial^{l+m} u_i}{\partial x^l \partial y^m} + b_1 = 0, \\ \Delta_{21} u_1 + \Delta_{22} u_2 + \cdots + \Delta_{2n} u_n + \sum\limits_{0 \le l+m < k} a_{lm}^{(2i)} \dfrac{\partial^{l+m} u_i}{\partial x^l \partial y^m} + b_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{n1} u_1 + \Delta_{n2} u_2 + \cdots + \Delta_{nn} u_n + \sum\limits_{0 \le l+m < k} a_{lm}^{(ni)} \dfrac{\partial^{l+m} u_i}{\partial x^l \partial y^m} + b_n = 0, \end{cases}$$

dove Δ_{ij} rappresenta il simbolo operatorio

$$(36)\qquad \Delta_{ij} = \lambda_{k0}^{(ij)} \frac{\partial^k}{\partial x^k} + \lambda_{k-1\,1}^{(ij)} \frac{\partial^k}{\partial x^{k-1} \partial y} + \cdots + \lambda_{1\,k-1}^{(ij)} \frac{\partial^k}{\partial x \partial y^{k-1}} + \lambda_{0k}^{(ij)} \frac{\partial^k}{\partial y^k}.$$

Le λ, le a, le b si suppongono funzioni di x ed y, e per maggiore semplicità finite e continue insieme con tutte quelle derivate che occorre di considerare. Supporremo inoltre che le funzioni $\lambda_{rs}^{(ij)}$ siano tali che in tutto il campo C che si considera le radici dell'equazione di grado kn:

$$(37)\qquad \begin{vmatrix} \sum \lambda_{rs}^{(11)} \alpha^r & \sum \lambda_{rs}^{(12)} \alpha^r & \ldots & \sum \lambda_{rs}^{(1n)} \alpha^r \\ \sum \lambda_{rs}^{(21)} \alpha^r & \sum \lambda_{rs}^{(22)} \alpha^r & \ldots & \sum \lambda_{rs}^{(2n)} \alpha^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum \lambda_{rs}^{(n1)} \alpha^r & \sum \lambda_{rs}^{(n2)} \alpha^r & \ldots & \sum \lambda_{rs}^{(nn)} \alpha^r \end{vmatrix} = 0$$

siano tutte complesse e di multiplicità costante in C, finite e continue insieme colle loro derivate dei primi $kn + 1$ ordini. Notiamo subito che, perchè ciò sia possibile, occorrerà che uno almeno dei due numeri k ed n sia pari.

Indicherò con $\Delta_{i_1 j_1} . \Delta_{i_2 j_2}$ e chiamerò prodotto di $\Delta_{i_1 j_1}$ per $\Delta_{i_2 j_2}$ il simbolo opera-

---

[23]) Per esempio non sono affatto studiati i sistemi contenenti equazioni di ordine diverso: o tali che il numero delle incognite sia inferiore a quello delle equazioni.

[24]) Tranne per i sistemi i quali offrono particolari condizioni di dissimmetria: ad es. per i sistemi di equazioni di 1° ordine secondo HOLMGREN (vedi HADAMARD, *Leçons sur la théorie de la propagation des ondes*, Nota I, pp. 318-319) ed altri pochi tipi di sistemi {vedi ad es. quelli di NICCOLETTI, *Sull'estensione dei metodi di* PICARD *e di* RIEMANN *ad una classe di equazioni a derivate parziali* [Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, s. II, vol. VIII (1897), N° 2, pp. 1-22]}, oppure quando soccorrono analogie indicate dalla Fisica matematica {Vedi SOMIGLIANA, l. c.; FREDHOLM, *Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique* [Acta Mathematica, t. XXIII (1900), pp. 1-42]}.

torio che si ottiene facendo il prodotto simbolico di $\Delta_{i_1 j_1}$ per $\Delta_{i_2 j_2}$: sarà

$$\Delta_{i_1 j_1} \cdot \Delta_{i_2 j_2} = \Delta_{i_2 j_2} \cdot \Delta_{i_1 j_1} = \sum_{r+s=2k} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^r \partial y^s} \cdot \sum_{r_1+s_1=k} \lambda_{r_1 s_1}^{(i_1 j_1)} \lambda_{r-r_1, s-s_1}^{(i_2 j_2)} .$$

Analogo significato avrà il prodotto $\Delta_{i_1 j_1} \Delta_{i_2 j_2} \ldots \Delta_{i_m j_m}$. Si noti che qualunque sia la funzione z si avrà

$$\Delta_{i_1 j_1}[\Delta_{i_2 j_2}(z)] = \Delta_{i_1 j_1} \cdot \Delta_{i_2 j_2}(z) + \sum_{r+s<2k} A_{rs} \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s},$$

dove le A_{rs} sono funzioni di x ed y formate colle λ e colle loro derivate dei primi k ordini. Analoghe formule valgono per i prodotti di più termini.

Ci proponiamo di trovare un sistema di soluzioni di (35) le quali dipendano da un punto parametro $x_1 y_1$ e siano ovunque finite e continue colle loro derivate in C tranne che nel punto $(x_1 y_1) \equiv (xy)$ ove le loro derivate di ordine $k-1$ debbono avere una singolarità del primo ordine.

Si consideri l'equazione

$$(38) \qquad \Delta(z) = \begin{vmatrix} \Delta_{11} \Delta_{12} & \ldots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{n1} \Delta_{n2} & \ldots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} z = \sum \Delta_{11} \cdot \Delta_{22} \cdot \Delta_{33} \ldots \Delta_{nn}(z) = 0.$$

Sarà questa una equazione lineare omogenea alle derivate parziali di ordine kn in z, totalmente ellittica perchè l'equazione delle caratteristiche è per essa l'equazione (37); e cui infine, per le ipotesi fatte relativamente alle radici di (37), si può applicare la teoria svolta nel § 1. Si costruisca quindi per questa equazione una soluzione fondamentale $z(xy;\, x_1 y_1)$.

Si considerino i simboli operatori che si ottengono prendendo i minori di ordine $n-1$ di $\Delta(z)$ e li si indichi con ∇_{ik}. Si avrà identicamente, — sempre intendendo i prodotti fatti colla legge da noi sopra enunciata:

$$\Delta_{h1} \cdot \nabla_{k1} - \Delta_{h2} \cdot \nabla_{k2} + \Delta_{h3} \cdot \nabla_{k3} \ldots \pm \Delta_{hn} \cdot \nabla_{kn} = \varepsilon_{hk} \Delta \qquad (\varepsilon_{hk}=0,\ h \neq k;\ \varepsilon_{hh}=1).$$

Se quindi si considera uno qualunque degli n sistemi di funzioni:

$$(39) \begin{cases} \psi_{i1}(xy;\, x_1 y_1) = \nabla_{i1}[z(xy;\, x_1 y_1)], \quad \psi_{i2}(xy;\, x_1 y_1) = -\nabla_{i2}[z(xy;\, x_1 y_1)] \ldots \\ \qquad \ldots \psi_{in}(xy;\, x_1 y_1) = \pm \nabla_{in}[z(xy;\, x_1 y_1)], \end{cases}$$

l'ipotesi che $z(xy;\, x_1 y_1)$ sia soluzione fondamentale di (38) ci dice che le derivate $(k-1)$-esime delle ψ_{ih} hanno nel punto $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ un infinito di 1° ordine; ma per esse si ha, nei punti $(xy) \equiv (x_1 y_1)$,

$$\Delta_{h1}(\psi_{i1}) + \Delta_{h2}(\psi_{i2}) + \cdots + \Delta_{hn}(\psi_{in}) = \varepsilon_{hi} \Delta(z) + \sum A_{rs}^{(hi)} \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}$$

$$= \sum A_{rs}^{(hi)} \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s} \qquad [k(n-1) \leqq r+s \leqq kn-1),$$

le $A_{rs}^{(hi)}$ essendo formate colle λ e colle loro derivate dei primi $k-1$ ordini.

I secondi membri di queste equazioni avranno nei punti $(xy) \equiv (x_1 y_1)$ una singolarità di 1° ordine al più.

Analogamente si consideri il sistema di funzioni

$$(40)\qquad \begin{cases} W_{i1}(xy) = \displaystyle\iint_C \psi_{i1}(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta, \\ W_{i2}(xy) = \displaystyle\iint_C \psi_{i2}(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ W_{in}(xy) = \displaystyle\iint_C \psi_{in}(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta, \end{cases}$$

dove $f(\xi\eta)$ è una funzione finita e continua ed al più avente infiniti di ordine ≤ 1 in qualche punto isolato. Sia direttamente, sia osservando che

$$W_{ik}(xy) = (-1)^k \nabla_{ik}\left[\iint_C \chi(xy;\ \xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta\right],$$

si vede che le W ammettono le derivate dei primi $k-1$ ordini nei punti ove $f(xy)$ è finita e che queste derivate si ottengono colla derivazione sotto il segno; che le derivate di ordine $k-1$ hanno una singolarità logaritmica al più dove $f(xy)$ diviene infinita; che infine le W, ove $f(xy)$ ammette derivate finite, ammettono derivate k-esime tali che

$$\Delta_{h1}(W_{i1}) + \cdots + \Delta_{hn}(W_{in}) = \varepsilon_{ih}(2n-2)!\, 2\pi A(xy) f(xy) + \iint_C k_{hi}(xy;\xi\eta) f(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

dove

$$A(xy) = \begin{vmatrix} \lambda_{ko}^{(11)} & \lambda_{ko}^{(12)} & \dots & \lambda_{ko}^{(1n)} \\ \lambda_{ko}^{(21)} & \lambda_{ko}^{(22)} & \dots & \lambda_{ko}^{(2n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{ko}^{(n1)} & \lambda_{ko}^{(n2)} & \dots & \lambda_{ko}^{(nn)} \end{vmatrix}$$

è il coefficiente di x^{kn} in (37) e quindi sempre $\neq 0$, e $k_{hi}(xy;\ \xi\eta)$ è una funzione che possiede una singolarità di ordine non maggiore del primo in $(xy) \equiv (\xi\eta)$.

Si cerchi ora di porre le soluzioni cercate nella forma

$$(41)\quad u_k(xy;\ x_1 y_1) = \sum_1^n{}_i\, \psi_{ik}(xy;\ x_1 y_1) + \sum_1^n{}_i \iint_C \psi_{ik}(xy;\ \xi\eta) f_i(\xi\eta;\ x_1 y_1)\, d\xi\, d\eta$$

e di determinare le n funzioni f_i per modo che le u_k soddisfacciano alle condizioni imposte.

La condizione che per $(xy) \neq (x_1 y_1)$ le funzioni u soddisfacciano alle (35) ci porta, in base alle osservazioni precedenti, ad un sistema di n equazioni integrali, per le n funzioni incognite $f_i(\xi\eta;\ x_1 y_1)$, cui si possono applicare le teorie del FREDHOLM e le osservazioni svolte nel § 1: queste f_i sostituite in (41) ci dànno per le $u_k(xy;\ x_1 y_1)$ le soluzioni cercate.

Le equazioni in più variabili.

28. Per le equazioni in più variabili noi troviamo che, sia il concetto di caratteristica che quello di equazione aggiunta di un'equazione data [25]) è ormai completamente chiarito. Quindi il problema della ricerca delle soluzioni fondamentali si presenta come totalmente determinato e nel suo enunciato e nei suoi scopi: data una equazione lineare totalmente ellittica $\mathfrak{G}(u) = 0$ di ordine $2n$ in m variabili $x_1 x_2 \ldots x_m$, i cui coefficienti siano funzioni di $x_1 x_2 \ldots x_m$ finite e continue insieme con un conveniente numero di derivate in un determinato campo C, trovare una soluzione $u(x_1 x_2 \ldots x_m; y_1 y_2 \ldots y_m)$ dell'equazione $\mathfrak{G}(u) = 0$, la quale sia finita e continua insieme colle derivate dei primi $2n$ ordini per $(x_1 x_2 \ldots x_m) \not\equiv (y_1 y_2 \ldots y_m)$, mentre nei punti $(x_1 x_2 \ldots x_m) \equiv (y_1 y_2 \ldots y_m)$ le sue derivate di ordine $2n - 1$ e $2n$ divengono infinite di ordine $m - 1$ ed m rispettivamente, — quale infinito principale assumendosi come sempre l'inversa della distanza euclidea dei due punti $(x_1 x_2 \ldots x_m)$ e $(y_1 y_2 \ldots y_m)$.

Ed in tal forma fu già trattato da parecchi autori in casi particolari. L'HOLMGREN [26]) estese la dimostrazione di esistenza che egli diede per le soluzioni fondamentali delle equazioni di 2° ordine in due variabili alle equazioni in tre variabili della forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + du = 0,$$

supponendo i coefficienti analitici ed usando di sviluppi in serie di funzioni sferiche. Con ciò però non restava trattato neppure il caso generale di una equazione ellittica in tre variabili, poichè non sempre si ha una trasformazione di variabili che ne riduca costanti i coefficienti delle derivate seconde. Questo caso più generale fu trattato dall'HADAMARD [27]) il quale dimostrò l'esistenza delle soluzioni fondamentali per una equazione lineare totalmente ellittica del 2° ordine in m variabili a coefficienti analitici.

Ricorderò ancora in questo indirizzo di ricerche, una memoria del FREDHOLM [28]) in cui si dà la forma delle soluzioni omogenee di grado -1 delle equazioni ellittiche in tre variabili, contenenti solo derivate di ordine massimo ed a coefficienti costanti: queste soluzioni sono soluzioni fondamentali solo quando l'equazione sia di grado 2; tuttavia, in quanto esse hanno un punto singolare isolato, possono forse servire di base

25) Cf. NICCOLETTI, l. c. 24).

26) HOLMGREN, *Ueber die Existenz der Grundlösung bei einer linearen partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung vom elliptischen Typus* [Archiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. I (1903-1904), pp. 209-224].

27) HADAMARD, *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (1er et 2e Mémoire) [Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure, IIIe série, t. XXI (1904), pp. 535-556; t. XXII (1905), pp. 101-141].

28) FREDHOLM, l. c. 24).

allo studio delle soluzioni fondamentali; e con un opportuno artificio il FREDHOLM le applica precisamente allo studio delle soluzioni fondamentali di certi particolari sistemi.

Volendo vedere di estendere i nostri metodi a questo caso, dovremo cercare di porre la soluzione fondamentale $u(x_1 x_2 \ldots x_m; y_1 y_2 \ldots y_m)$ o, come più brevemente indicheremo, $u(x_i; y_i)$, nella forma:

$$u(x_i; y_i) = \psi(x_i; y_i) + \int_C \psi(x_i; \xi_i) f(\xi_i; y_i) d\tau, \tag{42}$$

dove $\int_C$ indica l'integrale m-plo esteso al campo C, e $d\tau = d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m$. Ed in (42) noi cercheremo di determinare la $\psi(x_i; y_i)$ per modo che in essa siano raccolte le condizioni relative al comportamento di u nei punti $(x_i) \equiv (y_i)$, mentre sulla $f(\xi_i; y_i)$ raccoglieremo la condizione che la u data da (42) sia soluzione dell'equazione $\mathfrak{G}(u) = 0$.

La massima difficoltà si concentra nella determinazione opportuna della funzione $\psi(x_i; y_i)$: noi abbiamo visto nel § 1 quale partito si poteva trarre a questo scopo dalla conoscenza delle soluzioni fondamentali per le equazioni a coefficienti costanti: qui una tale conoscenza ci manca almeno nel caso generale. Noi quindi tratteremo solo il caso delle equazioni di secondo ordine e quello delle equazioni in cui l'operatore costituito dal gruppo di termini di ordine massimo si può considerare come il prodotto simbolico di più operatori del 2° ordine [29]).

29. Incominciamo dal caso di una equazione del secondo ordine:

$$\begin{cases} \mathfrak{G}(u) = \Lambda(u) + \sum_1^m b_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0 \\ \Lambda(u) = \sum_{ik} a_{ik} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (a_{ik} = a_{ki}). \end{cases} \tag{43}$$

Supponiamo le a_{ik} finite e continue insieme colle loro derivate dei primi tre ordini in C, le b_i, c, d, finite insieme colle loro derivate prime.

La forma

$$\sum a_{ik} \alpha_i \alpha_k \tag{44}$$

si supporrà definita positiva in C: sarà quindi in particolare in C sempre finito e $\neq 0$ il determinante delle a_{ik}. Indichiamo con A_{ik} l'aggiunto di a_{ik} nel determinante delle a_{ik} diviso per il determinante medesimo: anche la forma $\sum A_{ik} \alpha_i \alpha_k$ sarà definita positiva.

---

[29]) In confronto coi risultati dell'HADAMARD i nostri sono più completi in quanto: 1° non si suppongono i coefficienti analitici, 2° dal nostro metodo risulta che in *tutto* il campo C la soluzione fondamentale è priva di singolarità, cosa che negli sviluppi in serie dell'HADAMARD non compare. Però, i nostri metodi non si applicano, almeno senza profonde modificazioni, al caso che l'equazione abbia caratteristiche reali, altro che trasformandola in una a caratteristiche immaginarie con una conveniente trasformazione complessa; talchè nel caso delle equazioni a caratteristiche reali cui è dedicata la seconda parte della memoria dell'HADAMARD, i nostri metodi non ci permettono di uscire dal campo analitico come non lo permettono quelli dell'HADAMARD.

Si consideri la funzione $\sigma(x_i;\ y_i) = \sum A_{ik}(x_1 x_2 \ldots x_m)(x_i - y_i)(x_k - y_k)$ [30]: essa non si annulla mai altro che nel punto $(x_i) \equiv (y_i)$, e ivi diviene infinitesima dell'ordine del quadrato della distanza r dei punti (x_i) ed (y_i): più precisamente noi potremo trovare due numeri μ e M tali che in tutto C

$$\mu r \leqq \sigma^{\frac{1}{2}} \leqq \mathrm{M} r.$$

Assumeremo come funzione $\psi(x_i;\ y_i)$ la

$$\psi(x_i;\ y_i) = \frac{1}{\sigma(x_i;\ y_i)^{\frac{m-2}{2}}} \qquad (m > 2).$$

Verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni imposte alla $\psi(x_i;\ y_i)$. La ψ avrà un infinito di ordine $m-2$ in $(x_i) \equiv (y_i)$. Si ha poi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -(m-2)\frac{1}{\sigma^{\frac{m}{2}}}\left[\sum_k A_{ik}(x_k - y_k) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i}(x_j - y_j)(x_k - y_k)\right]$$

$$= -(m-2)\frac{\sum_k A_{ik}(x_k - y_k)}{\sigma^{\frac{m}{2}}} + P_i(x_i; y_i)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} = (m-2)\frac{1}{\sigma^{\frac{m+2}{2}}}[-A_{ik}\sigma(x_i; y_i) + m\sum_{kl} A_{ik} A_{kl}(x_k - y_k)(x_l - y_l)] + P_{ik}(x_i; y_i),$$

dove P_i e P_{ik} indicano funzioni di $x_1, x_2 \ldots x_m, y_1 y_2 \ldots y_m$ che nei punti $(x_i) \equiv (y_i)$ divengono infinite di ordine $m-2$ e $m-1$ rispettivamente. Infine si ha:

$$\Lambda[\psi(x_i;\ y_i)] = \sum a_{ik}(x_1 x_2 \ldots x_m) P_{ik}(x_i;\ y_i).$$

Quindi ψ ha il comportamento imposto alla $u(x_i;\ y_i)$, e soddisfa all'altra condizione che $\Lambda(\psi)$ abbia in $(x_i) \equiv (y_i)$ singolarità di ordine minore di m.

Nessuna difficoltà si presenta ora alla estensione delle considerazioni successive. Facilmente si vede che l'integrale

$$W(x_1 x_2 \ldots x_m) = \int_C \psi(x_i;\ y_i) f(y_i)\, d\tau$$

rappresenta una funzione che:

1° in ogni punto in cui $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$ è finita oppure ha un infinito isolato di ordine $\leqq 1$, è finita; ed in ogni punto isolato in cui $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$ diventa infinita di ordine $2, 3, \ldots m-1$ essa ha un infinito logaritmico oppure di ordine $\leqq 1, 2, \ldots m-3$ rispettivamente (teorema B del n° 9);

2° in ogni punto in cui la $f(x_1 x_2 \ldots x_m)$ è finita, W ha derivate prime finite,

[30]) È evidente l'analogia di questa funzione con r^2: se facciamo una trasformazione lineare per modo che in un determinato punto $(x_i^{(0)})$ la (44) divenga una somma di quadrati, la $\sigma(x_i^{(0)}; y_i)$ si riduce ad r^2. Cfr. HADAMARD, l. c., Memoria I^a, pp. 544-545.

che sono date dalla formula

$$\frac{\partial W}{\partial x_l} = \int\limits_C \frac{\partial \psi}{\partial x_l} f(y_i)\, d\tau;$$

e (formula precedente e teorema B) nei punti isolati in cui f diviene infinita di ordine $1, 2, \ldots m-1$ le derivate prime di W diventano infinite logaritmicamente, di ordine $1, 2, \ldots m-2$ rispettivamente;

3° in ogni punto in cui f è finita insieme colle sue derivate prime W ammette derivate seconde finite, e si ha

$$\Lambda(W) = 2^{m-1}\pi f(x_1 x_2 \ldots x_m) + \int\limits_C K(x_i;\, y_i) f(y_i)\, d\tau,$$

K essendo una funzione che per $(x_i) \equiv (y_i)$ diventa infinita di ordine $m-1$ soltanto [31]).

Dopo ciò la condizione che la u data da (42) soddisfaccia a (43) porta ad una equazione integrale del tipo del FREDHOLM che determina la $f(x_i;\, y_i)$; e la funzione ottenuta in tal modo ha nei punti $(x_i) \equiv (y_i)$ un infinito di ordine $m-1$ al più, e nei punti $(x_i) \not\equiv (y_i)$ è sempre finita insieme colle sue derivate prime; cosicchè la u che così si ottiene da (43) gode di tutte le proprietà che si erano imposte alla soluzione fondamentale.

Ed il problema sarà così risoluto.

30. Termineremo coll'assegnare la funzione $\psi(x_i;\, y_i)$ che conviene assumere nel caso che l'equazione $\mathfrak{G}(u) = 0$ sia della forma

$$\mathfrak{G}(u) = \Lambda(u) + \sum b_{i_1 i_2 \ldots i_m} \frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots i_m} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_m^{i_m}} + d = 0$$

$$\left[\Lambda(u) = \Lambda_1 . \Lambda_2 \ldots \Lambda_n(u);\quad \Lambda_j = \sum\nolimits_{ik} a_{ik}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k};\quad a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)};\quad 0 \leqq i_1 + i_2 + \cdots + i_m \leqq 2n-1\right],$$

dove il prodotto dei simboli operatori Λ_j devesi intendere eseguito nello stesso modo che al n° 27 e cioè come se le $a_{ik}^{(j)}$ non dipendessero dalle x_i. Le $a_{ik}^{(j)}$, le $b_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, d, si intenderanno funzioni delle $x_1 x_2 \ldots x_m$ finite e continue insieme con un conveniente numero di derivate in tutto il campo finito C in cui noi studiamo la nostra equazione. Supporremo che le n forme

$$\sum a_{ik}^{(j)} \alpha_1 \alpha_k \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

siano tutte in C definite positive; e chiameremo $A_{ik}^{(j)}$ l'aggiunto dell'elemento $a_{ik}^{(j)}$ nel determinante formato coi coefficienti $a^{(j)}$ diviso per questo determinante medesimo.

---

[31]) Il modo più opportuno di procedere per stabilire questo risultato è il seguente: fissato il punto $(x_i^{(0)})$ nel cui intorno si vuole studiare W si faccia la trasformazione cui si è accennato nella nota precedente: la funzione $\sigma(x_i;\, y_i)$ diverrà una funzione che per $(x_i) \equiv (x_i^{(0)})$ coincide con r^2 e nell'intorno di $x_i^{(0)}$ differisce per quantità infinitesime da r^2. Si applichino allora i procedimenti relativi ai potenziali Newtoniani ed alle loro generalizzazioni.

Poniamo

$$\sigma_j(x_i;\, y_i) = \sum A_{ik}^{(j)}(x_1 x_2 \ldots x_m)(x_i - y_i)(x_k - y_k);$$

sarà, come nel numero precedente, σ_j una quantità sempre positiva, infinitesima in $(x_i) \equiv (y_i)$ di secondo ordine. Porremo

$$\psi(x_i;\, y_i) = \int_C \frac{d\tau^{(1)}}{\sigma_1(x_i;\, \xi_i^{(1)})^{\frac{m-2}{2}}} \int_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(\xi_i^{(1)};\, \xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}} \int_C \cdots$$

$$\cdots \int_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi_i^{(n-2)};\, \xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\, \sigma_n(\xi_i^{(n-1)};\, y_i)^{\frac{m-2}{2}}},$$

dove gli integrali rappresentano integrali m-pli estesi al campo C e $d\tau^{(j)} = d\xi_1^{(j)} d\xi_2^{(j)} \ldots d\xi_m^{(j)}$.

È facile vedere che la funzione $\psi(x_i;\, y_i)$ soddisfa alle condizioni che sappiamo essere necessarie per essa. Essa intanto è una funzione sempre regolare nei punti $(x_i) \not\equiv (y_i)$, e nei punti $(x_i) \equiv (y_i)$ resta finita oppure diviene logaritmicamente infinita od infine diviene infinita di ordine $n(m-2)-(n-1)m$ a seconda che $n(m-2)-(n-1)m$ è <0 oppure $=0$ oppure >0 (applicazione ripetuta del teorema B, n° 9).

Esaminiamo come si formano le sue derivate. Volendo avere le derivate prime rapporto ad x_l [nei punti $(x_i) \equiv (y_i)$], si potrà derivare sotto il segno: e perciò basterà derivare rapporto a σ_1 e moltiplicare per la derivata di σ_1 rapporto ad x_l; quest'ultima si comporrà di due specie di termini: gli uni ottenuti derivando i coefficienti $A_{ik}^{(1)}$ rapporto ad x_l; gli altri derivando σ_1 rapporto ad x_l come se le $A_{ik}^{(1)}$ fossero costanti. Il primo di questi gruppi di termini darà un integrale multiplo $\mathfrak{M}_1$ affatto analogo a quello che dà ψ, e che si potrà ad esempio derivare ancora sotto il segno: mentre il secondo dà ancora un integrale multiplo $\mathfrak{M}_2$ analogo ma che sotto il primo segno integrale porta una funzione che per $(x_i) \equiv (y_i)$ diviene infinita di ordine $m-1$ e non più di ordine $m-2$. Scriveremo dunque $\dfrac{\partial \psi(x_i;\, y_i)}{\partial x_l} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{m-2}{2} \int_C \frac{\sum \frac{\partial A_{ik}^{(1)}}{\partial x_l}(x_i - \xi_i^{(1)})(x_k - \xi_k^{(1)})}{\sigma_1(x_i;\, \xi_i^{(1)})^{\frac{m}{2}}}\, d\tau^{(1)} \int_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(\xi_i^{(1)};\, \xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}} \int_C \cdots$$

$$\cdots \int_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi_i^{(n-2)};\, \xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\, \sigma_n(\xi_i^{(n-1)};\, y_i)^{\frac{m-2}{2}}},$$

$$\mathfrak{M}_2 = -(m-2)\int\limits_C \frac{\sum_k A_{lk}^{(1)}(x_k - \xi_k^{(1)})}{\sigma_1(x_1;\ \xi_i^{(1)})^{\frac{m}{2}}}\,d\tau^{(1)} \int\limits_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(\xi_i^{(1)};\ \xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}}\int\limits_C \cdots$$

$$\cdots\int\limits_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi_i^{(n-2)};\ \xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\,\sigma_n(\xi_i^{(n-1)};\ y_i)^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Ove si voglia procedere allo studio delle derivate seconde osserveremo che se per $\mathfrak{M}_1$ si può ancora derivare sotto il segno, ciò non si potrà più fare per $\mathfrak{M}_2$, perchè, per ogni punto $(\xi_i^{(1)})$ esiste nel campo d'integrazione un punto $(x_i) \equiv (\xi_i^{(1)})$ in cui l'integrando diviene infinito d'ordine $m - 1$; per questo occorrerà procedere come sopra la funzione W abbiamo proceduto nel n° 11. Si otterranno così le derivate seconde, non tuttavia in una forma adatta per procedere facilmente al calcolo delle derivate terze, quarte, ecc. Per ottenere una tal forma ci sarà più opportuno premettere una trasformazione delle derivate prime. Ma prima di fare ciò osserviamo che coi valori delle derivate seconde che per la via precedente si ottengono, si calcola con tutta facilità il valore di $\Lambda_1(\psi)$, e se ne deduce (cfr. n° 29)

$$\Lambda_1(\psi) = 2^{m-1}\pi\int\limits_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(x_i;\ \xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}}\int\limits_C \frac{d\tau^{(3)}}{\sigma_3(\xi_i^{(2)};\ \xi_i^{(3)})^{\frac{m-2}{2}}}\int\limits_C \cdots$$

$$\int\limits_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi_i^{(n-2)};\ \xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\,\sigma_n(\xi_i^{(n-1)};\ y_i)^{\frac{m-2}{2}}}$$

$$+\int\limits_C k(x_i;\ \xi_i^{(1)})\,d\tau^{(1)}\int\limits_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(\xi_i^{(1)};\ \xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}}\int\limits_C \cdots\int\limits_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi_i^{(n-2)};\ \xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\,\sigma_n(\xi_i^{(n-1)};\ y_i)^{\frac{m-2}{2}}},$$

k essendo una funzione che in $(x_i) \equiv (\xi_i^{(1)})$ ha un infinito di ordine $m - 2$ sòltanto.

Volendo ottenere le derivate seconde sotto forma di integrali occorre, come si disse, trasformare $\mathfrak{M}_2$. Si osservi che si può scrivere

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{m-2}{2}\int\limits_C \frac{1}{\sigma_1(x_i;\ \xi_i^{(1)})^{\frac{m}{2}}}\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi_l^{(1)}}\,d\tau^{(1)}\int\limits_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(\xi_i^{(1)};\ \xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}}\int\limits_C \cdots$$

$$\cdots\int\limits_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi^{(n-2)};\ \xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\,\sigma_n(\xi_i^{(n-1)};\ y_i)^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Quindi integrando per parti, indicando con c il contorno di C:

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{m-2}{2}\int_c \frac{d\xi_i^{(1)}\ldots d\xi_{l-1}^{(1)}\,d\xi_{l+1}^{(1)}\ldots d\xi_m^{(1)}}{\sigma_1(x_i;\xi_i^{(1)})^{\frac{m-2}{2}}}\int_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(\xi_i^{(1)};\xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}}\int_C\ldots$$

$$\ldots\int_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi_i^{(n-2)};\xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\,\sigma_n(\xi_i^{(n-1)};y_i)^{\frac{m-2}{2}}} - \frac{m-2}{2}\int_C \frac{d\tau^{(1)}}{\sigma_1(x_i;\xi_i^{(1)})^{\frac{m-2}{2}}}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi_l^{(1)}}\left[\int_C \frac{d\tau^{(2)}}{\sigma_2(\xi_i^{(1)};\xi_i^{(2)})^{\frac{m-2}{2}}}\int_C\ldots\int_C \frac{d\tau^{(n-1)}}{\sigma_{n-1}(\xi_i^{(n-2)};\xi_i^{(n-1)})^{\frac{m-2}{2}}\,\sigma_n(\xi_i^{(n-1)};y_i)^{\frac{m-2}{2}}}\right].$$

Il primo termine di $\mathfrak{M}_2$ ammetterà quante derivate si vuole in ogni punto interno a C e queste si potranno tutte facilmente ottenere mediante derivazione sotto il segno. Il secondo si potrà derivare anche esso sotto il segno come appunto si poteva con ψ.

Così si otterranno le derivate seconde e ripetutamente applicando lo stesso procedimento si riusciranno a dedurre tutte le successive derivate della ψ ed a dimostrare che esse si comportano in $(x_i)\equiv(y_i)$ nel modo da noi indicato.

La forma che invece abbiamo attribuito alla funzione $\Lambda_1(\psi)$ si presta più facilmente al calcolo successivo di $\Lambda_2[\Lambda_1(\psi)]$, $\Lambda_3\{\Lambda_2[\Lambda_1(\psi)]\}\ldots$; e mediante essa si prova immediatamente che la funzione $\Lambda_n\left\{\Lambda_{n-1}\left[\ldots[\Lambda_1(\psi)]\ldots\right]\right\}$ ha nel punto $(x_i)\equiv(y_i)$ una singolarità di ordine $m-1$ soltanto.

Se si pensa poi che per una osservazione del n° 27, le due espressioni $\Lambda_n\left\{\Lambda_{n-1}\left[\ldots[\Lambda_1(\psi)]\ldots\right]\right\}$ e $\Lambda_1.\Lambda_2.\cdots\Lambda_n(\psi)$ differiscono solo per una espressione lineare nelle derivate di ψ di ordine $\leqq 2n-1$, noi dedurremo che anche quest'ultima funzione non ha nei punti $(x_i)\equiv(y_i)$ che un infinito di ordine $m-1$ al più, e quindi che la ψ soddisfa ancora alla seconda delle condizioni assegnate.

Non ci indugeremo più oltre in questi calcoli che presentano una maggiore complicazione di simboli, ma non in altro differiscono da quelli già da noi ampiamente svolti precedentemente.

Osserveremo solo che anche per queste nuove funzioni ψ e per le funzioni W che se ne deducono potremmo svolgere una teoria affatto analogo a quella del § II, ed anche in alcuni punti più semplice; ed ottenere gli stessi risultati relativi al carattere analitico delle soluzioni di queste equazioni.

Pisa, 8 maggio 1907.

EUGENIO ELIA LEVI.