

Ueber die Brennflächen der Strahlensysteme und die Singularitätenflächen der Complexe.

(Von Herrn *M. Pasch* in Giessen.)

Einer jeden Geraden ist in Bezug auf einen gegebenen Liniencomplex eine zweigliedrige Gruppe von *Polarcomplexen* ersten Grades zugeordnet, welche zu *Tangentialcomplexen* werden, wenn die Gerade dem Complexe angehört. Die durch die Tangentialcomplexe einer Complexgeraden bestimmte Congruenz ist von der besonderen Art, dass ihre beiden Directricen in eine einzige Gerade, die Complexgerade selbst, zusammenfallen. Sie ist von noch speciellerer Art für die Geraden, welche *Plücker* als die *singulären Linien* des gegebenen Complexes bezeichnet hat, indem deren Tangentialcomplexe sämmtlich specielle sind und die Directricen der Congruenz demnach ein Strahlenbüschel in einer durch die betreffende singuläre Linie hindurchgehenden Ebene, der zugeordneten *singulären Ebene*, mit einem auf der singulären Linie gelegenen Mittelpunkt, dem zugeordneten *singulären Punkte*, bilden. Die so definirten ausgezeichneten Elemente hat *Plücker* unter Beschränkung auf den Complex zweiten Grades näher untersucht. Er gelangte für diesen zunächst zu der Bemerkung, dass der zugeordnete singuläre Punkt der feste Berührungspunkt der singulären Linie mit allen sie berührenden Complexcurven, die zugeordnete singuläre Ebene gemeinschaftliche Tangentialebene aller die singuläre Linie enthaltenden Complexkegel ist. Er erkannte ferner die Identität der singulären Linien mit den Durchschnittslinien solcher Ebenenpaare, welche einen Complexkegel bilden, und mit den Verbindungslinien solcher Punktepaare, welche eine Complexcurve repräsentiren; die Spitze des Complexkegels ist jedesmal der zugeordnete singuläre Punkt, die Ebene der Complexcurve die zugeordnete singuläre Ebene. Insbesondere untersuchte *Plücker* die von den singulären Punkten des Complexes zweiten Grades gebildete Fläche vierter Ordnung und die von seinen singulären Ebenen umhüllte Fläche vierter Klasse und fand, dass diese beiden Flächen identisch sind *), derart dass in jedem Punkte der

*) Herr *Klein* nennt diese Fläche die *Singularitätenfläche* des Complexes. Gött. Nachr. 1869. S. 267.

Fläche eine von den Tangenten eine singuläre Linie ist, welcher der Punkt als singulärer Punkt und die Tangentialebene als singuläre Ebene entspricht.

Die Gültigkeit des letzterwähnten *Plückerschen* Satzes für Complexe beliebigen Grades ist in meiner Habilitationsschrift *) durch einfache geometrische Betrachtungen bewiesen, welche auf der doppelten Definition der Brennfläche eines Strahlensystemes beruhen. Die Fläche der singulären Punkte oder Ebenen bildet nämlich einen Theil der Brennfläche der von den singulären Linien gebildeten Congruenz. Der Nachweis der Identität beider Definitionen der Singularitätenfläche eines Complexes, oder allgemeiner der Brennfläche eines Strahlensystemes, aus den analytischen Darstellungen (vgl. §§. 11, 12 der Hab.-Schr.), sowie die geometrische Bedeutung des anderen Theiles der Brennfläche der singulären Strahlen und einige auf die analytische Darstellung bezügliche Betrachtungen werden im Folgenden mitgetheilt. Bei dieser Gelegenheit sei es gestattet, die in §§. 1–3, 7–8 der Hab.-Schr. gegebenen Erörterungen in Kürze vorzuschicken (§. 1).

§. 1.

Unter den Geraden eines Complexes werde eine beliebige, x , aufgefasst. Die durch x gehenden Ebenen u und die auf x gelegenen Punkte ξ werden durch den Complex projectivisch auf einander bezogen, derart, dass in der Ebene u durch den entsprechenden Punkt ξ eine der Geraden x unendlich nahe Complexlinie gezogen werden kann. Der Punkt ξ ist der Berührungspunkt von x mit der in der Ebene u gelegenen Complexcurve, die Ebene u berührt den von ξ ausgehenden Complexkegel längs der Erzeugenden x .

Es sei jetzt x ein zwei gegebenen Complexen gemeinschaftlicher Strahl, also ein Strahl des von den beiden Complexen gebildeten Strahlensystems. Dann werden die durch x gehenden Ebenen den Punkten von x auf doppelte Weise projectivisch zugeordnet. Es sind aber zwei Punkte ξ, ξ' und zwei Ebenen u', u dadurch ausgezeichnet, dass ξ, u' und ξ', u einander in Bezug auf beide Complexe entsprechen. In den Punkten ξ, ξ' wird x von unendlich nahen Strahlen der Congruenz geschnitten, welche resp. in den Ebenen u', u verlaufen, und es sind also ξ, ξ' die dem Strahle x zugehörigen Brennpunkte und u', u die entsprechenden Fokalebenen des Strahlensystems.

*) Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden, Giessen 1870.

Die von den Brennpunkten des Strahlensystems gebildete Fläche, — der Ort aller Punkte $\xi(\xi')$, von denen zwei zusammenfallende Strahlen x des Systemes ausgehen, — ist mit der von den Fokalebene eingehüllten Fläche, — der Enveloppe aller Ebenen $u(u')$, in welchen zwei zusammenfallende Strahlen x des Systemes liegen, — identisch; sie wird von den Strahlen x doppelt berührt und heisst die Brennfläche des Strahlensystems*). Aber die Tangentenebene der Brennfläche im Punkte ξ ist nicht die entsprechende Fokalebene u' , welche den durch ξ hindurchgehenden bei x unendlich nahen Strahl enthält. Vielmehr ist ξ der Berührungspunkt der dem anderen Brennpunkte von x , dem Punkte ξ' , entsprechenden Fokalebene u ; denn von ξ' aus kann in dieser letzteren ausser x noch eine unendlich nahe, also auch unendlich nahe bei ξ berührende Tangente der Brennfläche gezogen werden.

Es sei jetzt x wieder ein beliebiger Strahl aus einem gegebenen Complex. Die durch den Complex erzeugte projectivische Beziehung zwischen den Punkten von x und den durch x gehenden Ebenen kann sich derart specialisiren, dass allen Ebenen ein fester Punkt ξ und also allen Punkten eine feste Ebene u entspricht. Dann ist ξ der feste Berührungspunkt von x mit allen Complexcurven des Ebenenbüschels, u die gemeinschaftliche Tangentialebene für alle Complexkegel der auf x gelegenen Punkte. Eine derartige Complexlinie x wird eine singuläre Linie, ξ der zugeordnete singuläre Punkt, u die zugeordnete singuläre Ebene genannt. Man kann dieselben Elemente noch in anderer Weise definiren. Für die in der Ebene u gelegene Complexcurve hat sich nicht ein bestimmter Berührungspunkt mit x ergeben, d. h. x ist eine Doppeltangente dieser Curve; ebenso ist x Doppelerzeugende des Complexkegels mit der Spitze ξ . Die singulären Punkte werden also als die Spitzen solcher Complexkegel erhalten, welche eine Doppelerzeugende besitzen, und die singulären Ebenen als die Ebenen solcher Complexcurven, welche eine Doppeltangente besitzen; die Doppелеlemente, welche in beiden Fällen auftreten, sind dieselben, nämlich die singulären Linien des Complexes.

Die singulären Elemente jeder der drei Arten bilden Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen. Die singulären Linien insbesondere können als gemeinschaftliche Linien zweier Complexes betrachtet werden, von denen einer der gegebene ist. Durch diese Complexes werden die Ebenen und die Punkte von x auf doppelte Weise einander projectivisch zugeordnet. Hierbei ent-

*) Kummer, dieses Journal Bd. 57 und Math. Abh. der Berl. Akad. 1866. S. 5.

spricht dem Punkte ξ beidemal eine und dieselbe Ebene u' , der Ebene u beidemal ein und derselbe Punkt ξ' . Also erweist sich der x zugeordnete singuläre Punkt ξ als einer der beiden zu x gehörigen Brennpunkte, die zugeordnete singuläre Ebene u als eine der beiden zu x gehörigen Fokalebene des von den singulären Linien gebildeten Strahlensystemes; aber u ist nicht die dem Brennpunkte ξ entsprechende Fokalebene. Die Brennfläche zerfällt mithin in zwei Theile; der eine ist zugleich der Ort der Punkte ξ und die Enveloppe der Ebenen u , der andere dagegen der Ort der Punkte ξ' und die Enveloppe der Ebenen u' . Damit ist der Satz bewiesen:

Für jeden Complex ist die Fläche der singulären Punkte mit der Fläche der singulären Ebenen identisch und bildet einen Theil der Brennfläche des Strahlensystemes der singulären Linien; die singulären Linien sind Tangenten dieser Fläche in ihrem zugeordneten singulären Punkte und längs ihrer zugeordneten singulären Ebene.

§. 2.

Ich gebe nun den algebraischen Beweis des vorstehenden Satzes, wobei ich die in dem Aufsätze „Zur Theorie der linearen Complexes“ dieses Journal Bd. 75 eingeführten Bezeichnungen anwende.

Es sei $F(x)$ eine homogene ganze Function n^{ten} Grades der Linien-coordinaten $x_1 \dots x_6$, also $F=0$ die Gleichung eines Liniencomplexes vom n^{ten} Grade. Werden die Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \text{mit} \quad nF_{i+3} \quad (i=1 \dots 6)$$

bezeichnet, und ist x eine Linie des Complexes, so sind die Grössen $\mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_6$ als Coordinaten eines linearen Complexes \mathfrak{F} zu betrachten, welcher den Strahl x und die ihm unendlich nahen Strahlen mit dem Complex $F=0$ gemein hat.*)

Ist ebenso $G=0$ die Gleichung eines Complexes vom m^{ten} Grade, und werden die Ableitungen von G mit $m\mathfrak{G}_{i+3}$ bezeichnet, so bilden die gemeinschaftlichen Strahlen der linearen Complexes \mathfrak{F} und \mathfrak{G} ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse, welches den Strahl x und die ihm unendlich nahen mit der Congruenz der Complexes $F=0$, $G=0$ gemein hat. Die Strahlen dieses Systemes schneiden zwei feste Geraden f und f' mit den

*) Plücker, Neue Geometrie des Raumes S. 292.

Coordinationen

$$(1.) \quad f_i = \lambda \mathfrak{F}_i + \mu \mathfrak{G}_i, \quad f'_i = \lambda' \mathfrak{F}_i + \mu' \mathfrak{G}_i, \quad (i = 1 \dots 6)$$

wo $\lambda : \mu$, $\lambda' : \mu'$ bestimmt werden durch Auflösung der Gleichung

$$(2.) \quad \lambda^2 (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) + 2\lambda\mu (\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) + \mu^2 (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 0.$$

Die Geraden f und f' schneiden x ; denn es ist

$$(f, x) = \lambda (\mathfrak{F}, x) + \mu (\mathfrak{G}, x) = \lambda F + \mu G = 0, \quad (f', x) = \lambda' F + \mu' G = 0.$$

Die Schnittpunkte mögen resp. ξ , ξ' und die gemeinschaftlichen Ebenen resp. u , u' heissen. In der Ebene $u(u')$ geht durch den Punkt $\xi'(\xi)$ ein bei x unendlich naher Strahl der Congruenz, also sind u , u' die dem Strahle x zugehörigen Fokalebene und ξ' , ξ die entsprechenden Brennpunkte der Congruenz *). Die Coordinaten des Brennpunktes ξ und der Fokalebene u sind daher nach §. 5 des Aufs. „Zur Th. d. lin. Compl.“:

$$(3.) \quad \xi_i = II_i(x, E(f, \alpha)), \quad u_i = E_i(x, II(f, \alpha)), \quad (i = 1 \dots 4)$$

wo die Grössen α und α willkürlich gewählt werden können. Diese Gleichungen sind als Darstellungen des Ortes der Brennpunkte resp. der Fokalebene durch die den Bedingungen $F = 0$, $G = 0$, $(x, x) = 0$ unterworfenen Coordinaten x zu betrachten.

Bildet man nun das Differential von ξ_i in Bezug auf die x und unterwirft die dx den Bedingungen:

$$dF = 0, \quad dG = 0, \quad d(x, x) = 0,$$

so erhält man die Coordinate η_i eines beliebigen Punktes η der Ebene, welche den Ort der Brennpunkte in ξ berührt, nämlich:

$$\eta_i = II_i(x, E(df, \alpha)) + II_i(dx, E(f, \alpha)).$$

Diesen Ausdruck kann man aber, da

$$(f, dx) = \lambda (\mathfrak{F}, dx) + \mu (\mathfrak{G}, dx) = \frac{\lambda}{n} dF + \frac{\mu}{n} dG = 0$$

und mithin nach Formel (17.) S. 122 des 75. Bds.

$$II_i(dx, E(f, \alpha)) + II_i(f, E(dx, \alpha)) = -(f, dx) \alpha_i = 0$$

ist, folgendermassen umgestalten:

$$\eta_i = II_i(x, E(df, \alpha)) - II_i(f, E(dx, \alpha)) = II_i(x, b) - II_i(f, c),$$

*) Die beiden hier zur Bestimmung der Brennpunkte benutzten Linien f , f' sind nur ein besonderes Paar aus zwei Büscheln; s. die allgemeine Betrachtung bei Herrn Klein Math. Ann. Bd. V S. 289.

wenn man zur Abkürzung b, c für $E(df, \alpha), E(dx, \alpha)$ schreibt. Hierin bedeutet $\Pi(x, b)$ einen Punkt der Geraden x , $\Pi(f, c)$ einen Punkt der Geraden f ; also sind $\Pi(x, b)$ und $\Pi(f, c)$ zwei Punkte der Fokalebene u . Auf ihrer Verbindungslinie, also ebenfalls in der Ebene u , ist der Punkt η gelegen. Folglich berührt u die Fläche der Brennpunkte in ξ , und die Fokalebenen umhüllen diese Fläche.

Es ist leicht, das bei der Brennfläche angewendete Verfahren auf die Congruenz der singulären Linien eines Complexes $F=0$ zu übertragen. Ist x eine singuläre Linie von $F=0$, so sind ihre Tangentialcomplexe sämtlich specielle lineare Complexe, d. h. es ist für alle p und q :

$$(4.) \quad (p\mathfrak{F} + qx, p\mathfrak{F} + qx) = p^2(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) + 2pqF + q^2(x, x) = 0,$$

d. h. es tritt zu $F=0, (x, x)=0$ hinzu:

$$(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) = 0.$$

Der Schnittpunkt der Geraden x und \mathfrak{F} ist der x zugeordnete singuläre Punkt ξ , die gemeinschaftliche Ebene die zugeordnete singuläre Ebene u , so dass

$$(5.) \quad \xi_i = \Pi_i(x, E(\mathfrak{F}\alpha)), \quad u_i = E_i(x, \Pi(\mathfrak{F}\alpha)) \quad (i = 1 \dots 4)$$

bei willkürlichen α und α . Jede Gerade, welche dem Strahle x unendlich nahe ist und entweder durch ξ hindurchgeht oder in u verläuft, gehört dem Complexe $F=0$ an.

Das Differential von ξ_i in Bezug auf die x , worin die dx die Bedingungen

$$(6.) \quad dF=0, \quad d(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})=0, \quad d(x, x)=0$$

zu erfüllen haben, wird nun, wie oben, mit Hülfe der Bedingung

$$(\mathfrak{F}, dx) = \frac{1}{n} dF = 0$$

umgeformt in:

$$(7.) \quad d\xi_i = \Pi_i(x, E(d\mathfrak{F}, \alpha)) - \Pi_i(\mathfrak{F}, E(dx, \alpha)), \quad (i = 1 \dots 4)$$

und es ist dann sofort ersichtlich, dass alle dem Punkte ξ unendlich nahen singulären Punkte in der Ebene u liegen. Dies ist aber die zu erweisende Eigenschaft der Singularitätenfläche.

Wenn man aus den Gleichungen (6.) und (7.) die dx eliminirt, so erhält man eine lineare Relation zwischen den Differentialen $d\xi_i$, also, wenn man dieselben durch Punktcoordinaten η_i ersetzt, die Gleichung der Tangentenebene des Ortes der singulären Punkte in ξ , und zwar in Form einer gleich Null gesetzten Determinante siebenten Grades.*) Diese Determinante kann

*) Vgl. Habilitationsschrift S. 14.

nach dem Obigen, wenn man die Gleichung (4.) berücksichtigt, von der Function $u_\eta = \sum u_i \eta_i$, wo die u aus (5.) entnommen werden, sich nur um einen von den η unabhängigen Factor unterscheiden. In der That würde es keine Schwierigkeit haben, die Ausscheidung dieses Factors durch die Relationen, welche in §. 4 der Abhandlung „Zur Th. d. lin. Compl.“ hergestellt sind, zu bewirken.

Mittelst der Formel (14.) der citirten Abhandlung bringt man die Coordinaten einer beliebigen Tangente im Punkte ξ , also die Determinanten $(\xi, d\xi)_k$ aus den Grössen

$\xi_i = \Pi_i(x, E(\mathfrak{F}, \alpha)) = -\Pi_i(\mathfrak{F}, E(x, \alpha))$, $d\xi_i = \Pi_i(x, E(d\mathfrak{F}, \alpha)) - \Pi_i(\mathfrak{F}, E(dx, \alpha))$, leicht auf die Form $p\mathfrak{F}_k + qx_k$, wo:

$$p = \sum_{\lambda} \mathfrak{F}_{\lambda} (E(x, \alpha), E(dx, \alpha))_{\lambda}, \quad q = \sum_{\lambda} x_{\lambda} (E(\mathfrak{F}, \alpha), E(d\mathfrak{F}, \alpha))_{\lambda}.$$

Die Determinanten aus den u und du lassen sich auf dieselbe Form bringen. Es ist nämlich $(u, du)_{k+3} = p'\mathfrak{F}_k + q'x_k$, wo:

$$p' = \sum_{\lambda} \mathfrak{F}_{\lambda} (\Pi(x, \alpha), \Pi(dx, \alpha))_{\lambda+3}, \quad q' = \sum_{\lambda} x_{\lambda} (\Pi(\mathfrak{F}, \alpha), \Pi(d\mathfrak{F}, \alpha))_{\lambda+3}.$$

§. 3.

Um die dem Strahle x zugehörigen Brennpunkte und Fokalebenen des Strahlensystems der singulären Linien zu finden, hat man die Wurzeln der Gleichung (2.), in welcher dann

$$2(n-1)\mathfrak{G}_{i+3} = \frac{\partial(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})}{\partial x_i}, \quad (i = 1 \dots 6)$$

anzunehmen ist, in die Ausdrücke (1.) einzusetzen, so dass \mathfrak{F}_i und

$$(8.) \quad f_i = \lambda \mathfrak{F}_i + \mu \mathfrak{G}_i, \quad (i = 1 \dots 6)$$

die Coordinaten zweier Geraden \mathfrak{F} und f sind, welche mit x die Brennpunkte und Fokalebenen bestimmen; dabei ist

$$2\lambda(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) + \mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = 0.$$

Der Ort der Punkte ξ' , in welchen x und f einander schneiden, ist mit der Enveloppe der Ebenen u' , welche die Strahlen x und f zugleich enthalten, identisch und bildet zusammen mit der Singularitätenfläche die vollständige Brennfläche der singulären Linien. Die Beziehung dieses Ortes zum Complexe $F=0$ soll jetzt aufgesucht werden.

Ich knüpfe zu diesem Zweck an die Verallgemeinerung des Begriffes

der Polarcomplexen an. Wenn man die Gleichung $F=0$ m mal hintereinander in Bezug auf die x differentiirt und sodann die dx durch laufende Linien-coordinaten y ersetzt, so erhält man die Gleichung eines Liniencomplexes vom m^{ten} Grade, des $(n-m)^{\text{ten}}$ Polarcomplexes von x in Bezug auf $F=0$. Die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare ist linear. Die Complexcurve der linearen Polare in irgend einer durch x gelegten Ebene reducirt sich auf einen Punkt, den Pol der Geraden x in Bezug auf die in derselben Ebene befindliche Complexcurve von $F=0$ *), also insbesondere den Berührungspunkt dieser Complexcurve mit x , sobald x selbst eine Complexlinie und mithin der lineare Polarcomplex ein Tangentialcomplex ist. Diese Eigenschaft wird leicht für den $(n-m)^{\text{ten}}$ Polarcomplex verallgemeinert. Die Complexcurve des $(n-m)^{\text{ten}}$ Polarcomplexes von x in irgend einer durch x gelegten Ebene ist eine Curve m^{ter} Klasse, welche mit der $(n-m)^{\text{ten}}$ Polare von x in Bezug auf die in derselben Ebene gelegene Complexcurve von $F=0$ zusammenfällt. Der von irgend einem Punkte von x ausgehende Complexkegel des $(n-m)^{\text{ten}}$ Polarcomplexes von x steht in gleicher Beziehung zu dem von demselben Punkte ausgehenden Complexkegel von $F=0$.

Die Coordinaten des linearen Complexes \mathfrak{G} waren:

$$(n-1)\mathfrak{G}_{i+3} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{k=6} \mathfrak{F}_k \frac{\partial \mathfrak{F}_{k+3}}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=6} \mathfrak{F}_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (i=1 \dots 6).$$

Zu demselben Complex gelangt man aber auch, wenn man die erste Polare ($P=0$) der Geraden \mathfrak{F} in Bezug auf $F=0$, also den Complex $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$P = \sum_{k=1}^{k=6} \mathfrak{F}_k \frac{\partial F(y)}{\partial y_k} = 0,$$

und in Bezug auf diesen die lineare Polare von x bildet. Die Coordinaten der letzteren ergeben sich nämlich dadurch, dass man in

$$\frac{\partial P}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{k=6} \mathfrak{F}_k \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y_i \partial y_k} \quad (i=1 \dots 6)$$

die y durch die x ersetzt, und sind mithin den Werthen \mathfrak{G}_{i+3} proportional.

Die der singulären Linie x zugeordnete singuläre Ebene u enthält die Strahlen x und \mathfrak{F} zugleich. Nach dem Vorangeschickten ist somit die Complexcurve von $P=0$ in der Ebene u die erste Polare von \mathfrak{F} in Bezug auf die Complexcurve von $F=0$ in derselben Ebene und der Punkt, auf welchen sich die Complexcurve von \mathfrak{G} in u reducirt, der Pol von x in Bezug auf

*) Plücker, Neue Geometrie des Raumes S. 299.

jene erste Polare von \mathfrak{F} . Dieser Punkt ist nun wegen (8.) derselbe, auf welchen sich die Complexcurve des speciellen Complexes f in u reducirt, d. h. der Durchschnittspunkt der Strahlen f und \mathfrak{x} , also der Brennpunkt ξ' . Mithin erweist sich ξ' , wenn man noch berücksichtigt, dass die Gleichung $P=0$ von \mathfrak{x} selbst befriedigt wird, als der Berührungspunkt der Geraden \mathfrak{x} mit der ersten Polare der Geraden \mathfrak{F} in Bezug auf die von den Linien des Complexes $F=0$ in der Ebene u umhüllte Curve n^{ter} Klasse.

In unserem Falle berührt die zuletzt erwähnte Curve die Gerade \mathfrak{x} in zwei Punkten η, η' . Der Berührungspunkt ξ' der Doppeltangente mit der ersten Polare der Geraden \mathfrak{F} in Bezug auf jene Curve wird demnach erhalten*), indem man zu η, η' und dem Schnittpunkte von \mathfrak{x} mit \mathfrak{F} , also zu η, η', ξ den (ξ conjugirten) vierten harmonischen Punkt construirt. — An dem Complexkegel des Punktes ξ kann man eine analoge Betrachtung anstellen. Wenn man mit v, v' die beiden Ebenen bezeichnet, welche diesen Kegel längs der Doppelerzeugenden \mathfrak{x} berühren, so wird man finden, dass die Ebenen v, v' durch die Ebenen u, u' harmonisch getrennt werden. Es hat sich somit der Satz ergeben:

*Unter den Punkten jeder singulären Linie eines Complexes sind zwei als Berührungspunkte mit der Complexcurve, welche in der zugeordneten singulären Ebene liegt, einer als der zugeordnete singuläre Punkt und einer als der vierte harmonische Punkt ausgezeichnet; ebenso unter den durch die singuläre Linie gehenden Ebenen zwei als Tangentialebenen des Complexkegels, welcher vom zugeordneten singulären Punkte ausgeht, eine als die zugeordnete singuläre Ebene und eine als die vierte harmonische**). Die von den vierten harmonischen Punkten gebildete Fläche ist mit der von den vierten harmonischen Ebenen umhüllten identisch und stellt zusammen mit der Singularitätenfläche die vollständige Brennfläche der singulären Strahlen vor.*

§. 4.¹

Für die von uns betrachteten Flächen müssen sich aus den angegebenen analytischen Darstellungen mittelst Elimination die Gleichungen entwickeln lassen. Man gelangt aber kürzer dazu auf folgendem Wege.

*) Salmon, Higher plane Curves Art. 67.

**) Diese Punkte und Ebenen hat Plücker an den singulären Linien der Complexe zweiten Grades betrachtet. Vgl. besonders „N. Geom. d. R.“ S. 213.

Es sei ein Punkt ξ durch drei in ihm sich schneidende Ebenen a, b, c gegeben, so dass für beliebige u^*):

$$u_{\xi} = (uabc).$$

Dann werden irgend zwei durch ξ gehende Ebenen durch Coordinaten von der Form

$$pa_i + qb_i + rc_i, \quad p'a_i + q'b_i + r'c_i, \quad (i = 1 \dots 4)$$

repräsentirt, folglich eine beliebige durch ξ gehende Gerade \mathfrak{x} als Durchschnittslinie solcher Ebenen durch die Coordinaten $^{**})$

$$(9.) \quad \mathfrak{x}_k = \lambda(bc)_{k+3} + \mu(ca)_{k+3} + \nu(ab)_{k+3} \quad (k = 1 \dots 6)$$

wenn man setzt:

$$qr' - rq' = \lambda, \quad rp' - pr' = \mu, \quad pq' - qp' = \nu.$$

Durch den Punkt ξ geht eine einfache Mannigfaltigkeit von Geraden eines gegebenen Complexes n^{ten} Grades $F(\mathfrak{x}) = 0$, ein „Complexkegel.“ Die Geraden eines solchen Complexkegels werden durch eine Gleichung n^{ten} Grades zwischen λ, μ, ν dargestellt, wenn man in $F(\mathfrak{x}) = 0$ für die \mathfrak{x} die Werthe (9.) substituirt. — In analoger Weise drückt man die Gesammtheit der in einer Ebene gelegenen Complexlinien, eine „Complexcurve“, durch eine Gleichung zwischen drei Parametern aus.

Zur Abkürzung sei:

$$(10.) \quad u_k = (bc)_{k+3}, \quad v_k = (ca)_{k+3}, \quad w_k = (ab)_{k+3}. \quad (k = 1 \dots 6)$$

Dann hat man die Discriminante \mathcal{A} der Form n^{ten} Grades in λ, μ, ν

$$F(\lambda u + \mu v + \nu w)$$

zu bilden, um die Bedingung herzustellen, unter welcher der Complexkegel mit der Spitze ξ eine Doppelerzeugende besitzt. Die Discriminante \mathcal{A} ist eine Combinante der linearen Formen $(u, \mathfrak{x}), (v, \mathfrak{x}), (w, \mathfrak{x})$ und enthält somit die u, v, w nur in gewissen Verbindungen, nämlich den Determinanten dritten Grades aus dem Systeme $^{***})$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{vmatrix}.$$

*) Die Bezeichnungen sind die in dem Aufs. „Zur Th. d. lin. Compl.“ angewandten.

**) Vgl. Art. 51 des cit. Aufs.

***) Gordan, Math. Ann. Bd. V., S. 95.

Die Berechnung dieser Determinanten für die besonderen Werthe (10.) ist in Art. 33 der Abh. „Zur Th. d. lin. Compl.“ gegeben; vier von ihnen verschwinden, vier andere sind gleich den Quadraten der Coordinaten $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, die übrigen werden die Producte dieser Grössen zu je zweien. Also repräsentirt die Gleichung $\mathcal{A}=0$ den Ort der singulären Punkte des Complexes $F=0$.

Wird den Grössen $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{V}$ die folgende Bedeutung beigelegt:

$$(11.) \quad \mathfrak{U}_k = (\beta\gamma)_k, \quad \mathfrak{B}_k = (\gamma\alpha)_k, \quad \mathfrak{V}_k = (\alpha\beta)_k, \quad (k = 1 \dots 6)$$

und die Ebene der Punkte α, β, γ mit u bezeichnet, so dass für beliebige ξ :

$$u_\xi = (\xi\alpha\beta\gamma),$$

so ist die Discriminante D der Form n^{ten} Grades in λ, μ, ν :

$$F(\lambda\mathfrak{U} + \mu\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{V})$$

gleich Null zu setzen, wenn \mathfrak{U} eine singuläre Ebene sein soll. Man erhält aber D aus \mathcal{A} , indem man alle Indices der Coefficienten von F mit den adjungirten und die Coordinaten a, b, c resp. mit α, β, γ vertauscht. Die Gleichung der Singularitätenfläche in Ebenencoordinaten entsteht also aus ihrer Gleichung in Punktcoordinaten, indem man $\xi_1 \dots \xi_4$ in $u_1 \dots u_4$ und alle Indices der Coefficienten von F in die adjungirten verwandelt.

Wenn man für die Form $F(x)$ eine symbolische Darstellung einführt:

$$F(x) = (a, x)^n = (b, x)^n = (c, x)^n = \dots,$$

so kann man auf Grund der vorangeschickten Betrachtung die Gleichungen der Singularitätenfläche aus dem symbolischen Ausdruck der Discriminante einer ternären Form n^{ten} Grades sofort in symbolischer Form herstellen. Die Discriminante der Form $(\lambda(a, u) + \mu(a, v) + \nu(a, w))^n$ als Function von λ, μ, ν ist bekanntlich eine lineare Verbindung von Producten aus Determinanten dritten Grades von der Form

$$\begin{vmatrix} (a, u) & (a, v) & (a, w) \\ (b, u) & (b, v) & (b, w) \\ (c, u) & (c, v) & (c, w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (bc)_1 & (bc)_2 & (bc)_3 & (bc)_4 & (bc)_5 & (bc)_6 \\ (ca)_1 & (ca)_2 & (ca)_3 & (ca)_4 & (ca)_5 & (ca)_6 \\ (ab)_1 & (ab)_2 & (ab)_3 & (ab)_4 & (ab)_5 & (ab)_6 \end{vmatrix}.$$

Eine derartige Determinante lässt sich nun, wie in §. 8 der erwähnten Abhandlung gezeigt ist, leicht als quadratische Form in den ξ ausdrücken; wird sie zur Abkürzung mit (a, b, c, ξ) bezeichnet, so ist:

$$(12.) \quad (a, b, c, \xi) = \sum_{k=1}^{k=6} a_k (E(b, \xi), E(c, \xi))_k.$$

Auf diesem Wege gelangt man also zur Gleichung der Singularitätenfläche in

Punktcoordinaten, und beim Uebergang zur Gleichung in Ebenencoordinaten hat man nur nöthig, die Determinanten (a, b, c, ξ) durch $[a, b, c, u]$ zu ersetzen, wo

$$(13.) \quad [a, b, c, u] = \sum_{k=1}^{k-6} a_k (\Pi(b, u), \Pi(c, u))_{k+3}.$$

Im einfachsten Falle, für $n=2$, hat man:

$$6A = (a, b, c, \xi)^2, \quad 6D = [a, b, c, u]^2.$$

Nach §. 8 der erwähnten Abhandlung kann man ohne Weiteres die Uebereinstimmung dieses Ergebnisses mit demjenigen erkennen, welches *Clebsch* für die von ihm eingeführte Normalform der Complexgleichungen mittelst Ausscheidung überflüssiger Factoren zuerst für $n=2$ *) aufgestellt und sodann auf beliebige Grade und auf gewisse allgemeinere covariante Flächen von Complexen ausgedehnt hat **). —

In derselben Weise, wie die Gleichung der Singularitätenfläche aus der Discriminante einer ebenen Curve abgeleitet wurde, wird die Gleichung der Brennfläche einer Congruenz $F=0$, $G=0$ aus der Bedingung für die Berührung zweier ebenen Curven entwickelt. Der Punkt ξ ist nämlich ein Brennpunkt und die Ebene u eine Fokalebene, wenn zwei von den mn Werthsystemen λ, μ, ν , welche die beiden Gleichungen

$$F(\lambda u + \mu v + \nu w) = 0 \quad \text{und} \quad G(\lambda u + \mu v + \nu w) = 0,$$

respective

$$F(\lambda \mathfrak{U} + \mu \mathfrak{B} + \nu \mathfrak{C}) = 0 \quad \text{und} \quad G(\lambda \mathfrak{U} + \mu \mathfrak{B} + \nu \mathfrak{C}) = 0$$

befriedigen, in eines zusammenfallen. Wenn also F und G vom zweiten Grade sind, und man setzt symbolisch:

$$F = (a, \mathfrak{x})^2 = (b, \mathfrak{x})^2 = (c, \mathfrak{x})^2 = (d, \mathfrak{x})^2, \quad G = (\mathfrak{A}, \mathfrak{x})^2 = (\mathfrak{B}, \mathfrak{x})^2 = (\mathfrak{C}, \mathfrak{x})^2,$$

so ist die Gleichung der Brennfläche in Punktcoordinaten:

$$(14.) \quad 4(3A\theta' - \theta^2)(3\theta A' - \theta'^2) - (9AA' - \theta\theta')^2 = 0$$

unter Benutzung der üblichen Bezeichnung:

$$(15.) \quad 6A = (a, b, c, \xi)^2, \quad 2\theta = (a, b, \mathfrak{A}, \mathfrak{x})^2, \quad 2\theta' = (a, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \xi)^2, \quad 6A' = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \xi)^2.$$

Die Gleichung der Brennfläche in Ebenencoordinaten lautet für denselben Fall:

$$(16.) \quad 4(3DT' - T^2)(3TD' - T'^2) - (9DD' - TT')^2 = 0,$$

*) Math. Ann. Bd. II S. 1.

**) Gött. Nachr. 1872. No. 3. und Math. Ann. Bd. V S. 435.

wo D, T, T', D' folgende Bedeutungen haben:

$$(17.) \quad 6D = [\alpha, \beta, \gamma, u]^2, \quad 2T = [\alpha, \beta, \mathfrak{A}, u]^2, \quad 2T' = [\alpha, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, u]^2, \quad 6D' = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, u]^2.$$

Die Congruenz der Complexe $F=0, G=0$ geht durch die Annahme

$$G = (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) = (\alpha, \beta)(\alpha, \mathfrak{x})^{n-1}(\beta, \mathfrak{x})^{n-1}$$

in die Congruenz der singulären Linien des Complexes $F=0$ über, und wir haben gesehen, dass in diesem Falle die Singularitätenfläche einen Theil der Brennfläche bildet. Die Ausscheidung der Singularitätenfläche aus der Gleichung (14.) oder (16.) wird in der That für $n=2$, also

$$G = (\mathfrak{A}, \mathfrak{x})^2 = (\alpha, \beta)(\alpha, \mathfrak{x})(\beta, \mathfrak{x})$$

in folgender Weise bewirkt. Man hat nach Formel (16.) der cit. Abh.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_{\xi}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x})^2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})(abcu) \\ &= (\mathfrak{F}, u) \sum \mathfrak{F}_k(au)_k + (\mathfrak{F}, v) \sum \mathfrak{F}_k(bu)_k + (\mathfrak{F}, w) \sum \mathfrak{F}_k(cu)_k \\ &= (c, \mathfrak{x})(\mathfrak{d}, \mathfrak{x}) \{ (c, u) \sum \mathfrak{d}_k(au)_k + (c, v) \sum \mathfrak{d}_k(bu)_k + (c, w) \sum \mathfrak{d}_k(cu)_k \}. \end{aligned}$$

Nun erhält man

$$2\Theta = \begin{vmatrix} (\alpha, u) & (\alpha, v) & (\alpha, w) \\ (\beta, u) & (\beta, v) & (\beta, w) \\ (\mathfrak{A}, u) & (\mathfrak{A}, v) & (\mathfrak{A}, w) \end{vmatrix}^2$$

aus $(\mathfrak{A}, \mathfrak{x})^2$, indem man \mathfrak{x}_k ersetzt durch

$$\begin{vmatrix} (\alpha, u) & (\alpha, v) & (\alpha, w) \\ (\beta, u) & (\beta, v) & (\beta, w) \\ u_k & v_k & w_k \end{vmatrix},$$

und mithin ergibt sich:

$$\Theta \cdot u_{\xi} = (\alpha, \beta, \gamma, \xi)(\alpha, \beta, \mathfrak{d}, \xi) \{ (c, u) \sum \mathfrak{d}_k(au)_k + (c, v) \sum \mathfrak{d}_k(bu)_k + (c, w) \sum \mathfrak{d}_k(cu)_k \}.$$

Addirt man hierzu die beiden Ausdrücke, welche durch Vertauschung von α und β mit c entstehen, so gelingt es, unter Berücksichtigung der Identität:

$$(\alpha, u)(\beta, c, \mathfrak{d}, \xi) + (\beta, u)(c, \alpha, \mathfrak{d}, \xi) + (c, u)(\alpha, \beta, \mathfrak{d}, \xi) = (\mathfrak{d}, u)(\alpha, \beta, c, \xi),$$

die Theilbarkeit von Θ durch \mathcal{A} nachzuweisen, indem

$$3\Theta \cdot u_{\xi} = (\alpha, \beta, c, \xi)^2 \{ (\mathfrak{d}, u) \sum \mathfrak{d}_k(au)_k + (\mathfrak{d}, v) \sum \mathfrak{d}_k(bu)_k + (\mathfrak{d}, w) \sum \mathfrak{d}_k(cu)_k \}$$

wird. Nach der eben citirten Formel ist aber

$$(\mathfrak{d}, u) \sum \mathfrak{d}_k(au)_k + (\mathfrak{d}, v) \sum \mathfrak{d}_k(bu)_k + (\mathfrak{d}, w) \sum \mathfrak{d}_k(cu)_k = \frac{1}{2}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d})(abcu) = \frac{1}{2}(\mathfrak{d}, \mathfrak{d})u_{\xi}.$$

Also findet man schliesslich für Θ und analog für T die Werthe:

$$(18.) \quad \Theta = (\mathfrak{d}, \mathfrak{d})\mathcal{A}, \quad T = (\mathfrak{d}, \mathfrak{d})D.$$

Für die singulären Linien des Complexes zweiten Grades wird demnach der nach Ausscheidung der Singularitätenfläche zurückbleibende Theil der Brennfläche durch die Gleichungen

$$(19.) \quad \begin{cases} 4(3\theta' - (\mathfrak{d}, \mathfrak{d}) \theta)(3\theta \mathcal{A}' - \theta'^2) = (9\mathcal{A}' - (\mathfrak{d}, \mathfrak{d}) \theta')^2 \mathcal{A}, \\ 4(3T' - (\mathfrak{d}, \mathfrak{d}) T)(3TD' - T'^2) = (9D' - (\mathfrak{d}, \mathfrak{d}) T')^2 D \end{cases}$$

in Punkt- resp. Ebenencoordinaten ausgedrückt.

In θ und T tritt die in den Coefficienten von F lineare Invariante

$$(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_5} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_6}$$

als Factor auf. Wird also die Complexgleichung $F = 0$ in der Normalform*) angenommen, so dass $(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}) = 0$, so verschwinden die Formen θ und T identisch, und die Gleichungen (19.) reduciren sich auf:

$$4\theta'^3 + 27\mathcal{A}\mathcal{A}'^2 = 0, \quad 4T'^3 + 27DD'^2 = 0.$$

Giessen, im December 1872.

*) Clebsch, Math. Ann. Bd. II., S. 1.